关于 Maxwell 方程组未知量个数与方程个数不一致的探讨

刘长礼，孟广为
北京应用物理与计算数学研究所，北京市（100094）
E-mail: liucl78@iapcm.ac.cn meng_guangwei@iapcm.ac.cn

摘　要：Maxwell 方程组有 B、E 两个矢量未知量，共 6 个未知数，而方程总数是 8 个，这并不自洽。其原因是每个旋度矢量方程的三个分量方程中有一个不独立；而 Maxwell 方程组有两个旋度矢量方程，这样就正好有两个分量方程不独立，剩下 6 个独立的方程。此外还讨论了有关规范的问题。指出由矢势 A 和标势 φ 表示的 Maxwell 方程组，因为在做变量代换时，多引入了一个未知量 Az，导致矢势和标势表示的方程组解不具有唯一性，需要引入规范条件。

关键字：Maxwell 方程组；旋度方程；方程不独立
中图分类号：O442

0. 引言

真空中 Maxwell 方程组为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

上面方程有 **B**、**E** 两个矢量未知量，共 6 个未知数。散度方程是标量方程，包括一个方程；旋度方程是矢量方程，包含三个分量方程，所以上面的方程总数是 8 个。这样 Maxwell 方程组包含 6 个未知量，而方程有 8 个。两者不相等，方程组本身存在自洽性问题，这个矛盾该如何解释？Maxwell 方程组最初包含 20 个未知量、20 个方程，十分复杂；在 1890 年前后，Hertz 对这个繁杂方程组进行了化简，其简化后的形式就是方程组(1)，并且沿用至今[1]。这一矛盾自 Hertz 时代至今一直存在，并且有着不同的解释（下面介绍了两种常用解释），因此把这一矛盾叫做 Maxwell-Hertz 佯谬是比较合适的。

有不少教材（比如参考文献[2]或者[6]）这样解释此矛盾：认为方程组(1)中的两个旋度方程是主要方程，而两个散度方程是它们两个的初始条件，从而剩下 6 个旋度分量方程，与 6 个未知量正好匹配。作者认为这种解释有些不妥。比如方程不含时间，也就是静电场和静磁场方程，这个时候没有初始条件的概念，又如何将散度方程解释成旋度方程的初始条件呢？而且这时方程依旧是有 6 个未知量，8 个方程。或者说，静电场方程是方程组(2)，此方程依旧有 3 个变量、4 个方程，也是不自洽的；也就是有一个方程不独立，但此时没有初始条件的概念，不能将静电场中的散度方程解释成旋度方程的初始条件。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=\rho/\varepsilon_0\end{cases} \tag{2}$$

另外一种较为常用的解释如下。由矢势 **A** 和标势 φ 表示的 Maxwell 方程组(4)可由方程组(1)通过变换(3)得到：

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi+\dfrac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\rho/\varepsilon_0\end{cases} \tag{4}$$

这种解释认为方程组(4)和(1)是等价的，而(4)共有 4 个方程、4 个未知量，这本身就是自洽的。方程组(4)是电磁学的本质方程，而(1)不是根本方程；这样电磁学的基本方程(4)就是自洽的，不存在上述矛盾。但是方程组(1)的解在确定边界条件下有唯一性，而方程组(4)（不包含规范条件）的解在确定边界条件下却没有唯一性，**A** 和 φ 存在规范自由度。两个等价的方程组为何解的唯一性却不一样？本文第三部分将对此做出解释。

方程组(1)的解存在并且唯一[3]，所以它的未知量个数与独立的方程个数应该一致，都是 6 个。也就是 Maxwell 方程中有两个不独立的方程，我们需要找到它们。其实是每个旋度矢量方程的三个分量方程中有一个不独立，这样就正好有两个分量方程不独立，剩下 6 个独立的方程，6 个未知量；这是本文的主要结论之一。从下面不同形式静电场方程的对比中，我们可以定性的看到三个旋度分量方程中有一个不独立。

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon_0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\times\nabla\varphi=0\end{cases}$$

上面是静电场方程的三种等价形式。静电场方程的解有唯一性[4]，所以未知量个数与独立方程个数应该一致。前两种形式未知量个数和方程个数一致，第三种等价形式（也就是方程组(2)）的未知量个数与方程个数不等。第二种等价形式和第三种等价形式非常接近，E 的散度方程是一样的，不同的一个是 E 的标势梯度，一个是 E 的旋度；对比来看，第二种形式有 4 个未知量、4 个独立方程，而第三种形式有 3 个未知量、4 个方程。由于两种形式是等价的，所以可以定性地得到：关于第三种形式中 E 的三个旋度分量方程中有一个方程是不独立的。下面严格证明这一结论。

1. 由 B、E 表示的 Maxwell 方程组

由于方程组中哪几个方程不独立是一个纯粹的数学问题，在这里我们只从数学角度讨论，不涉及物理因素。在此我们不单独讨论 Maxwell 方程组或者静电场方程，而讨论旋度方

程中是哪个方程不独立，这更具普遍性，同时这种讨论方式也包含了 Maxwell 方程组的问题。设旋度方程（先讨论不包含源项的情形）为：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \qquad (5)$$

此方程的未知量为矢量 $\boldsymbol{E}$，其分量形式（我们也称其为方程组(5)）是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0\end{cases} \qquad (5)$$

对方程组(5)的第一式求 x 的偏导，并对方程组(5)的第二式求 y 的偏导，然后求和，即：求 $\dfrac{\partial(5.1)}{\partial x}+\dfrac{\partial(5.2)}{\partial y}$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)}{\partial y}=0\\ &\Rightarrow\frac{\partial^2E_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2E_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2E_z}{\partial x\partial y}=0\\ &\Rightarrow-\frac{\partial^2E_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z\partial y}=0\\ &\Rightarrow\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0\end{aligned}$$

将上面最后一式对 z 积分得：

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=f(x,y)$$

这和方程组(5)的第三式非常相似，如果 $f(x,y)=0$，那么就是(5)的第三式；也就是从旋度方程的前二式可以推导出旋度方程的第三式。换句话说，三个旋度方程中只有两个独立，由任意两个方程可以推导出第三个方程。其中如何证明 $f(x,y)=0$ 是个问题。这个问题可以这样解释：就像不定积分的原函数存在一个常数一样（比如 $f'(x)$ 的原函数不是 $f(x)$，而是 $f(x)+c$，c 是任意常数），这两个方程存在一个与 z 无关的 $f(x,y)$ 任意函数差异；既然是任意函数，我们取其为零，这种取法是允许的，由此得到两个方程是一样的。读者可能会觉得这种方式过于牵强。或者可以这样理解：由于常数 c（或者 $f(x,y)$）的存在微分与积分没有一一对应关系，所以它们不是互逆算符。比如有可导函数 $f(x)$，其导函数是 $f'(x)$，而 $\int f'(x)dx=f(x)+c$；如果常数 $c\neq0$，积分后的结果不是原来的函数 $f(x)$，也就是微分和积分不具有互逆性；只有在常数 $c=0$ 的前提下（或者像参考文献[5]中所说在相差任意常数 c 的情况下，其实相差任意常数和常数 $c=0$ 是等价的），对于偏微分的积分来说是 $f(x,y)=0$，它们才有一一对应关系，才是互逆算符。如果我们在上面对 z 作和微分互逆的积分，这时 $f(x,y)$ 恒为 0，那么我们就会直接得到(2.3)式。换句话说，我们在积分与微分互逆的前提下，可以

得到 $f(x,y)=0$，从而从旋度方程的任意两式可以得到第三式；三个旋度方程中只有两个是独立的。

下面讨论包含矢量源项 $\boldsymbol{S}$（为空间和时间的函数）的旋度方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \qquad (5')$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=S_x(\boldsymbol{r},t)\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=S_y(\boldsymbol{r},t)\\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=S_z(\boldsymbol{r},t)\end{cases} \qquad (5')$$

下面我们看如何从前两式导出第三式。同样对方程组(5')的第一式求 x 的偏导，并对方程组(5')的第二式求 y 的偏导，然后求和，即：求 $\dfrac{\partial(5'.1)}{\partial x}+\dfrac{\partial(5'.2)}{\partial y}$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 E_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial^2 E_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z\partial y}=\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial S_x}{\partial x}-\frac{\partial S_y}{\partial y}$$

现定义一个新的变量 $S_z^{'}$，定义式为：$\dfrac{\partial S_z^{'}}{\partial z}=-\dfrac{\partial S_x}{\partial x}-\dfrac{\partial S_y}{\partial y}$。

则上面最后一式变成：$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}-S_z^{'}\right)=0$。

对此式做与微分互逆的积分（或者让积分常数为 0），有 $\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=S_z^{'}$。

当三个变量 $S_x,S_y,S_z^{'}$ 构成一个矢量时，$S_z^{'}$ 与(5')中的 S_z 具有完全一样的性质，即 $S_z^{'}\equiv S_z$。这样也就是说可以从(5')的前两式推导出第三式。

Maxwell 方程组有 2 个旋度矢量方程，共 6 个分量方程，按照上面的分析，此 6 个方程中共有 4 个独立的方程，再加上 2 个散度方程，在 Maxwell 方程组中有 6 个独立方程，6 个未知量。Maxwell-Hertz 佯谬得到解释。

2. 由 A、φ 表示的 Maxwell 方程组

下面我们讨论由矢势 **A** 和标势 φ 表示的 Maxwell 方程组(4)，并说明为什么需要规范条件。

我们先来分析方程组(4)中独立方程的个数。方程(4)包含 4 个未知量和 4 个方程，但 **A** 和 φ 有规范自由度，其解不能唯一确定；如要唯一确定 **A** 和 φ，则需要增加一个规范条件。这也就使得方程数目变成了 5 个，而未知量还是 4 个；这里再次出现不自洽的问题。其原因是矢势 **A** 所表示的矢量方程(4.1)是由方程(1)的第四个矢量方程推导得到的；由于矢量方程(1.4)的三个分量方程中有一个不独立，这也就导致矢量方程(4.1)的三个分量方程中有一个不独立，所以包含规范在内的 5 个方程实际上只有 4 个是独立的。这样只有包含规范条件在内的方程组(4)才有 4 个独立方程、4 个未知量。

下面讨论引言中提到的第二种解释。上面已经提到：方程组(1)有 6 个未知量、6 个独立的分量方程，并且解是有唯一性的；为什么只是作了一个变量代换（抛开变量的物理意义，从数学角度讲方程组(4)无非是方程组(1)作了一个变量代换），不包含规范条件的方程组(4)的解就不再具有唯一性？(1)和(4)是本来是等价的，为什么解的唯一性却不一样？哪里出了问题？解不唯一的原因是未知量个数多于独立方程的个数。那么究竟是在变量代换过程中丢掉了某个方程，还是代换过程中多引进了未知量呢？我们再作如下的变量代换，就不难看出问题所在。

$$\begin{aligned}
B_x &= \qquad -\frac{\partial A_y}{\partial z} \\
B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} \\
B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\
E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
E_y &= -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
E_z &= \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6}$$

在这里我们只引进了 $A_x\ A_y\ \varphi$ 3 个未知量（注意：不是设 A_z=0，而是根本就没有引进未知量 A_z）来替换方程组(1)的 6 个未知量（两个矢量 **B E**），而不像代换(3)（$A_x A_y A_z \varphi$ 4 个未知量来替换原来的 6 个未知量）。把(6)带入方程组(1)，**B** 的散度方程和 **E** 的旋度方程（Faraday 定律）自动满足；**B** 的旋度方程（包含位移电流的 Ampere 定律）和 **E** 的散度方程（Gauss 定律）变成方程组(7)：

$$\begin{cases}
\nabla^2 A_x - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J_x \\
\nabla^2 A_y - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J_y \\
-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J_z \\
\nabla^2 \varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y}\right) = -\rho/\varepsilon_0
\end{cases} \tag{7}$$

如前所述，方程组(7)的前三式只有两个是独立的，所以这个方程组是有 3 个未知量，3 个独立的方程，方程组本身就是自洽的；无需也不能引进规范条件。仅从数学角度讲，我们

使用两个不同的变量代换方式得到了方程组(4)和(7)，这两种代换方式非常相近，只是代换(6)比代换(3)少了一个变量而已。得到的两组方程(4)和(7)也非常相近，只差与 A_z 有关的项。也就是说我们常用的方程组(4)解的不唯一性，或者说为什么需要规范条件，是由于代换(3)多了引进了一个未知量 A_z（可以是矢量 **A** 中的任意一个分量）。如果我们用代换(6)，那么从 6 个未知量、6 个独立方程的(1)我们会得到 3 个未知量、3 个独立方程的(7)，(7)本身是自洽的，无需规范条件的。当然(3)和(4)比(6)和(7)的形式对称的多，漂亮的多。其实方程组(7)等价于(4)和规范条件 A_z=0。这也就说明了引言中对 Maxwell-Hertz 佯谬的第二种解释是不合理的，由于方程组(4)的解不具有唯一性，因此它不能和方程组(1)等价；与方程组(1)等价的是包含规范条件的(4)，或者说(1)和(7)是等价的；而且包含规范条件的方程组(4)包括 4 个独立方程及 4 个未知量，方程组(7)包含 3 个独立方程及 3 个未知量。

3. 结论

上面给出了 Maxwell 方程组不自洽的解释，是两个旋度矢量方程中各有一个不独立的方程，从而得到 6 个未知量 6 个独立方程的方程组。而由矢势 **A** 和标势 φ 表示的 Maxwell 方程组中，由于在做变量代换时，多引入了一个未知量 A_z，导致矢势和标势表示的方程组解不具有唯一性，需要引入规范条件。

参考文献

[1] 郭奕玲、沈慧君，1993，物理学史，北京：清华大学出版社，pp.147-150
[2] 俎栋林，2006，电动力学，北京：清华大学出版社，pp.115
[3] 谢处方、饶克谨等，2006，电磁场与电磁波（第四版），北京：高等教育出版社，pp.179-180
[4] 蔡圣善、朱耘、徐建军，2002，电动力学（第二版），北京：高等教育出版社，pp.86-87
[5] 张筑生，1990，数学分析新讲，北京：北京大学出版社，pp.202
[6] Rothwell, E.J. and Cloud, M.J., 2001, Electromagnetics, New York: CRC Press, Chapter II

A discussion to contradiction of the number of unknown variables and the number of Maxwell equations

Liu Changli, Meng Guangwei
Beijing Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing (100094)

Abstract

In Maxwell equations, there are both vector unknown variables(B,E)，and they include 6 unknown components. However, there are 8 equations in Maxwell equations. The number of equations is contradiction to the number of variables. The reason is that one component equation is not independent in the vector rotation equation, which includes 3 component equations, in Maxwell equations. There are two vector rotation equations in Maxwell equations, and then 6 independent equations and 6 variables are left. The questions of gauge conditions are talked about. If one redundant variable A_z is used in A, φ formulation's Maxwell equations, the solutions of these equations are not unique, and gauge conditions are needed.

Keywords: Maxwell equations; rotation; independent