代数几何学原理

（全译第二分册）

2012 年校

原载

Eléments de Géométrie Algébrique

A. Grothendieck, J. Dieudonné

Publications Mathématiques de l'IHES,

tome 8 (1961), p. 5-222.

无上甚深微妙法　百千万劫难遭遇
我今见闻得受持　愿解如来真实义

———《开经偈 · 武则天》

无所从来　亦无所去　故名如来

———《金刚经》

仿如来自虚空

——— Grothendieck

目　录

第二章　几类态射的整体性质 1

§1. 仿射态射 1

1.1　S 概形和 $\mathscr{O}_S$ 代数层 2

1.2　在概形上仿射的概形 2

1.3　$\mathscr{O}_S$ 代数层所给出的在 S 上仿射的概形 4

1.4　在 S 上仿射的概形上的拟凝聚层 6

1.5　基概形变换 8

1.6　仿射态射 10

1.7　模层的附随向量丛 11

§2. 齐次素谱 16

2.1　分次环和分次模的一般事实 16

2.2　分次环的分式环 20

2.3　分次环的齐次素谱 22

2.4　$\operatorname{Proj} S$ 上的分离概形结构 26

2.5　分次模的附随层 28

2.6　$\operatorname{Proj} S$ 上的一个层的附随分次 S 模 34

2.7　有限性条件 36

2.8　函子行为 39

2.9 概形 $\mathrm{Proj}\,S$ 的闭子概形 45
§3. 分次代数层的齐次谱 47
3.1 拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的齐次谱 47
3.2 分次 $\mathscr{S}$ 模层在 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}$ 上的附随层 52
3.3 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}$ 上的一个层的附随分次 $\mathscr{S}$ 模层 55
3.4 有限性条件 57
3.5 函子行为 60
3.6 概形 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}$ 的闭子概形 63
3.7 概形到齐次谱的态射 64
3.8 浸入齐次谱的判别法 67
§4. 射影丛。丰沛层 70
4.1 射影丛的定义 70
4.2 概形到射影丛的态射 72
4.3 Segre 态射 75
4.4 到射影丛的浸入。极丰沛层 78
4.5 丰沛层 83
4.6 相对丰沛层 89
§5. 拟仿射态射；拟射影态射；紧合态射；射影态射 94
5.1 拟仿射态射 94
5.2 Serre 判别法 97
5.3 拟射影态射 100
5.4 紧合态射和广泛闭态射 101
5.5 射影态射 104
5.6 Chow 引理 107
§6. 整型态射和有限态射 111
6.1 在概形上整型的概形 111
6.2 拟有限态射 116
6.3 概形的相对整闭包 118
6.4 $\mathscr{O}_X$ 模层的自同态的行列式 122
6.5 可逆层的范数 127
6.6 应用：丰沛性判别法 132
6.7 Chevalley 定理 138

§7. 赋值判别法 140
7.1 赋值环的复习 141
7.2 分离性的赋值判别法 143
7.3 紧合性的赋值判别法 145
7.4 代数曲线和 1 维函数域 150
§8. 概形的暴涨，投影锥，射影闭包 154
8.1 概形的暴涨 154
8.2 关于分次环的局部化的一些预备知识 159
8.3 投影锥 165
8.4 向量丛的射影闭包 170
8.5 函子行为 172
8.6 去顶锥的一个典范同构 174
8.7 投影锥的暴涨 176
8.8 丰沛层和收缩 180
8.9 Grauert 丰沛性判别法：陈述 185
8.10 Grauert 丰沛性判别法：证明 188
8.11 收缩的唯一性 192
8.12 投影锥上的拟凝聚层 195
8.13 子层和闭子概形的射影闭包 199
8.14 关于分次 $\mathscr{S}$ 模层的附随层的补充 201

第二章　几类态射的整体性质

概要

§1. 仿射态射。
§2. 齐次素谱。
§3. 分次代数层的齐次谱。
§4. 射影丛。丰沛层。
§5. 拟仿射态射；拟射影态射；紧合态射；射影态射。
§6. 整型态射和有限态射。
§7. 赋值判别法。
§8. 概形的暴涨；投影锥；射影闭包。

本章研究几类态射的性质，但不借助上同调的方法。我们将在第 III 章中使用上同调方法对这些态射进行更深入的考察，那里将主要用到第 II 章 §2, §4 和 §5 中的结果。初学者可以略去 §8 不读，因为它只包含了一般理论（§1 到 §3）的一些补充说明和简单应用，和本章其他的材料相比，这些内容不是很常用的。

§1. 仿射态射

本节的大部分结果都是第一章 §1 中相应部分的“整体”化；因此本质上没有什么新的概念出现，它们只是要为后面的内容准备一套语言。

1.1　S 概形和 $\mathscr{O}_S$ 代数层

(1.1.1) 设 S 是一个概形，X 是一个 S 概形，$f : X \to S$ 是结构态射。我们知道 (**0**, 4.2.4)，顺像 $f_*\mathscr{O}_X$ 是一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层，记为 $\mathscr{A}(X)$（只要不会造成误解）；若 U 是 S 的一个开集，则有

$$\mathscr{A}(f^{-1}(U)) = \mathscr{A}(X)|_U \quad 。$$

同样的，对任意 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$（相应的，$\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{B}$），我们用 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$（相应的，$\mathscr{A}(\mathscr{B})$）来标记顺像 $f_*\mathscr{F}$（相应的，$f_*\mathscr{B}$），它不仅是一个 S 模层 (相应的，S 代数层)，而且是一个 $\mathscr{A}(X)$ 模层 (相应的，$\mathscr{A}(X)$ 代数层)。

(1.1.2) 设 Y 是另一个 S 概形，$g : Y \to S$ 是结构态射，$h : X \to Y$ 是一个 S 态射；则有交换图表

(1.1.2.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd} \quad 。$$

根据定义，我们有 $h = (\psi, \theta)$，其中 $\theta : \mathscr{O}_Y \to h_*\mathscr{O}_X = \psi_*\mathscr{O}_X$ 是一个环层同态；由此可以导出 (**0**, 4.2.2) 一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $g_*(\theta) : g_*\mathscr{O}_Y \to g_*h_*\mathscr{O}_X = f_*\mathscr{O}_X$，换句话说，一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\mathscr{A}(Y) \to \mathscr{A}(X)$，我们把它记作 $\mathscr{A}(h)$。若 $h' : Y \to Z$ 是另一个 S 态射，则易见 $\mathscr{A}(h' \circ h) = \mathscr{A}(h) \circ \mathscr{A}(h')$。从而我们定义了一个从 S 概形范畴到 $\mathscr{O}_S$ 代数层范畴的反变函子 $\mathscr{A}(X)$。

现在设 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{G}$ 是一个 $\mathscr{O}_Y$ 模层，$u : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ 是 h 态射，也就是说 (**0**, 4.4.1)，u 是一个 $\mathscr{O}_Y$ 模层的同态 $\mathscr{G} \to h_*\mathscr{F}$。于是 $g_*(u) : g_*\mathscr{G} \to g_*h_*\mathscr{F} = f_*\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_S$ 模层的同态 $\mathscr{A}(\mathscr{G}) \to \mathscr{A}(\mathscr{F})$，记为 $\mathscr{A}(u)$；进而，二元组 $(\mathscr{A}(h), \mathscr{A}(u))$ 构成 $\mathscr{A}(Y)$ 模层 $\mathscr{A}(\mathscr{G})$ 到 $\mathscr{A}(X)$ 模层 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 的一个双重同态。

(1.1.3) 固定底概形 S，考虑二元组 $(X, \mathscr{F})$，其中 X 是一个 S 概形，$\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模层，这样的二元组构成一个范畴，其中的态射 $(X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{G})$ 被定义为一个二元组 (h, u)，其中 $h : X \to Y$ 是一个 S 态射，$u : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ 是一个 h 态射。于是可以说二元组 $(\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(\mathscr{F}))$ 是一个定义在上述范畴上的反变函子，取值在下面这个范畴中：对象是由一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层和它的一个模层所构成的二元组，态射是双重同态。

1.2　在概形上仿射的概形

定义 (1.2.1) — 设 X 是一个 S 概形，$f : X \to S$ 是结构态射。所谓 X 在 S 上是

仿射的，是指可以找到 S 的一个仿射开覆盖 (S_α)，使得 X 的开子概形 $f^{-1}(S_\alpha)$ 都是仿射的。

例子 (1.2.2) — S 的闭子概形都是在 S 上仿射的概形 (**I**, 4.2.3 和 4.2.4)。

注解 (1.2.3) — 一个在 S 上仿射的概形 X 未必是仿射概形，比如 $X = S$ (1.2.2)。另一方面，若仿射概形 X 是一个 S 概形，则 X 在 S 上未必是仿射的（参考 (1.3.3)）。然而，若 S 是分离概形，则任何仿射 S 概形 ①在 S 上都是仿射的 (**I**, 5.5.10)。

命题 (1.2.4) — 在 S 上仿射的概形必然在 S 上都是分离的。

这可由 (**I**, 5.5.5) 和 (**I**, 5.5.8) 立得。

命题 (1.2.5) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形，$f : X \to S$ 是结构态射。则对任意开集 $U \subset S$，$f^{-1}(U)$ 在 U 上都是仿射的。

依照定义 (1.2.1)，可以归结到 $S = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$ 的情形，此时 $f = ({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$，其中 $\varphi : A \to B$ 是一个同态。由于诸 $D(g)$ $(g \in A)$ 构成 S 的一个拓扑基，从而又可以限于考虑 $U = D(g)$ 的情形；然而此时我们知道 $f^{-1}(U) = D(\varphi(g))$ (**I**, 1.2.2.2)，故得命题。

命题 (1.2.6) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形，$f : X \to S$ 是结构态射。则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，$f_*\mathscr{F}$ 都是拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层。

有见于 (1.2.4)，这缘自 (**I**, 9.2.2, a))。

特别的，$\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{A}(X) = f_*\mathscr{O}_X$ 是拟凝聚的。

命题 (1.2.7) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形。则对任意 S 概形 Y，映射 $h \mapsto \mathscr{A}(h)$ 都是从集合 $\operatorname{Hom}_S(Y, X)$ 到集合 $\operatorname{Hom}(\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(Y))$ (1.1.2) 上的一一映射。

设 $f : X \to S$, $g : Y \to S$ 是结构态射。首先假设 $S = \operatorname{Spec} A$ 和 $X = \operatorname{Spec} B$ 都是仿射的；我们需要证明，对任意 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\omega : f_*\mathscr{O}_X \to g_*\mathscr{O}_Y$，均有唯一一个 S 态射 $h : Y \to X$，使得 $\mathscr{A}(h) = \omega$。根据定义，对任意开集 $U \subset S$，ω 都定义了一个 $\Gamma(U, \mathscr{O}_S)$ 代数的同态 $\omega_U = \Gamma(U, \omega) : \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_X) \to \Gamma(g^{-1}(U), \mathscr{O}_Y)$。特别的，对于 $U = S$，这给出一个 $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ 代数的同态 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$，该同态对应到一个唯一确定的 S 态射 $h : Y \to X$，因为 X 是仿射的 (**I**, 2.2.4)。只消再证明 $\mathscr{A}(h) = \omega$，换句话说，对于 S 的某个拓扑基中的任意开集 U，ω_U 都与 φ_U 重合，这里的 φ_U 是指这样一个代数同态，它与 h 限制到 $g^{-1}(U)$ 上所得到的 S 态射 $g^{-1}(U) \to f^{-1}(U)$ 相对应。可以限于考虑 $U = D(\lambda)$ $(\lambda \in S)$ 的情形；此时若 $f = ({}^a\rho, \widetilde{\rho})$，其中 $\rho : A \to B$ 是一个环同态，则有 $f^{-1}(U) = D(\mu)$，其中 $\mu = \rho(\lambda)$，并且 $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ 就是分式

① 译注：“仿射 S 概形”是指既是仿射概形又是 S 概形。

环 B_μ；然则，图表

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(Y,\mathscr{O}_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_\mu & \xrightarrow[\varphi_U]{} & \Gamma(g^{-1}(U),\mathscr{O}_Y) \end{array}$$

是交换的，并且把 φ_U 换成 ω_U 后的图表也是交换的；从而等式 $\varphi_U=\omega_U$ 缘自分式环的普适性质 ($\mathbf{0}$, 1.2.4)。

回到一般情形，设 (S_α) 是 S 的一个仿射开覆盖，并假设诸 $f^{-1}(S_\alpha)$ 都是仿射的。则任何 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\omega:\mathscr{A}(X)\to\mathscr{A}(Y)$ 通过取限制都可以给出一族 $\mathscr{O}_{S_\alpha}$ 代数层同态

$$\omega_\alpha\ :\ \mathscr{A}(f^{-1}(S_\alpha))\ \longrightarrow\ \mathscr{A}(g^{-1}(S_\alpha))\ ,$$

从而给出一族 S_α 态射 $h_\alpha:g^{-1}(S_\alpha)\to f^{-1}(S_\alpha)$（根据上面所述）。问题全都归结为证明：对于 $S_\alpha\cap S_\beta$ 的某个拓扑基中的任意仿射开集 U，h_α 和 h_β 在 $g^{-1}(U)$ 上的限制都是重合的，但这是显然的，因为依照上面所述，这两个限制都对应于 ω 在 U 上的限制同态 $\mathscr{A}(X)|_U\to\mathscr{A}(Y)|_U$。

推论 (1.2.8) — 设 X,Y 是两个在 S 上仿射的概形。则为了使一个 S 态射 $h:Y\to X$ 是同构，必须且只需 $\mathscr{A}(h):\mathscr{A}(X)\to\mathscr{A}(Y)$ 是同构。

这可由 (1.2.7) 和 $\mathscr{A}(X)$ 的函子性质立得。

1.3 $\mathscr{O}_S$ 代数层所给出的在 S 上仿射的概形

命题 (1.3.1) — 设 S 是一个概形。则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{B}$，均有一个在 S 上仿射的概形 X，使得 $\mathscr{A}(X)=\mathscr{B}$，概形 X 在只差唯一一个 S 同构的意义下是唯一确定的。

唯一性缘自 (1.2.8)；下面证明 X 的存在性。对任意仿射开集 $U\subset S$，设 X_U 是概形 $\operatorname{Spec}\Gamma(U,\mathscr{B})$；由于 $\Gamma(U,\mathscr{B})$ 是一个 $\Gamma(U,\mathscr{O}_S)$ 代数，故知 X_U 是一个 U 概形 ($\mathbf{I}$, 1.6.1)。进而，由于 $\mathscr{B}$ 是拟凝聚的，故知 $\mathscr{O}_U$ 代数层 $\mathscr{A}(X_U)$ 可以典范等同于 $\mathscr{B}|_U$ ($\mathbf{I}$, 1.3.7, 1.3.13 和 1.6.3)。设 V 是 S 的另一个仿射开集，并设 $X_{U,V}$ 是 X_U 的开子概形 $f_U^{-1}(U\cap V)$，其中 f_U 是指结构态射 $X_U\to U$；现在 $X_{U,V}$ 和 $X_{V,U}$ 在 $(U\cap V)$ 上都是仿射的 (1.2.5)，并且根据定义，$\mathscr{A}(X_{U,V})$ 和 $\mathscr{A}(X_{V,U})$ 都可以典范等同于 $\mathscr{B}|_{(U\cap V)}$。从而 (1.2.8) 有一个典范 S 同构 $\theta_{U,V}:X_{V,U}\to X_{U,V}$；进而，若 W 是 S 中的第三个仿射开集，并且 $\theta'_{U,V},\theta'_{V,W},\theta'_{U,W}$ 分别是 $\theta_{U,V},\theta_{V,W},\theta_{U,W}$ 在 $U\cap V\cap W$ 落在 X_V, X_W 和 X_W 中的逆像（借助结构态射）上的限制，则有 $\theta'_{U,V}\circ\theta'_{V,W}=\theta'_{U,W}$。因而可以找到这样一个概形 X，它可被一族仿射开集 (T_U) 所覆盖，并且对每个 U，均有一个同

构 $\varphi_U: X_U \to T_U$，该同构把 $f_U^{-1}(U\cap V)$ 映到 $T_U \cap T_V$ 上，并且满足 $\theta_{U,V} = \varphi_U^{-1}\circ\varphi_V$ (**I**, 2.3.1)。态射 $g_U = f_U \circ \varphi_U^{-1}$ 使 T_U 成为一个 S 概形，并且 g_U 和 g_V 在 $T_U\cap T_V$ 上是重合的，从而 X 是一个 S 概形。进而由 X 的定义易见，它在 S 上是仿射的，并且 $\mathscr{A}(T_U) = \mathscr{B}|_U$，从而 $\mathscr{A}(X) = \mathscr{B}$。

我们把上述 S 概形 X 称为 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{B}$ 的附随概形，或者称为 $\mathscr{B}$ 的谱，并记作 $\operatorname{Spec}\mathscr{B}$。

推论 (1.3.2) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形，$f: X\to S$ 是结构态射。则对任意仿射开集 $U\subset S$，X 的开子概形 $f^{-1}(U)$ 都是仿射的，并且它的环是 $\Gamma(U,\mathscr{A}(X))$。

依照 (1.2.6) 和 (1.3.1)，我们可以假设 X 是某个 $\mathscr{O}_S$ 代数层的附随概形，于是由 (1.3.1) 中所描绘的构造 X 的方法就可以推出结论。

例子 (1.3.3) — 设 S 是域 K 上的仿射平面，并且点 0 被双重化了 (**I**, 5.5.11)；则在 (**I**, 5.5.11) 的记号下，S 是两个仿射开集 Y_1, Y_2 的并集；若 f 是开浸入 $Y_1 \to S$，则 $f^{-1}(Y_2) = Y_1\cap Y_2$ 不是 Y_1 中的仿射开集 (前引)，从而我们得到一个仿射但不是在 S 上仿射的概形的例子。

推论 (1.3.4) — 设 S 是一个仿射概形；则为了使一个 S 概形 X 在 S 上是仿射的，必须且只需 X 是一个仿射概形。

推论 (1.3.5) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形，Y 是一个 X 概形。则为了使 Y 在 S 上是仿射的，必须且只需 Y 在 X 上是仿射的。

问题立可归结到 S 是仿射概形的情形，此时 X 也是仿射概形 (1.3.4)；并且上述两个条件都相当于说 Y 是一个仿射概形 (1.3.4)。

(1.3.6) 设 X 是一个在 S 上仿射的概形。依照 (1.3.5)，为了定义一个在 X 上仿射的概形 Y，只需给出一个在 S 上仿射的概形 Y 和一个 S 态射 $g: Y\to X$；换一种说法就是 (1.3.1 和 1.2.7)，只需给出一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{B}$ 和一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\mathscr{A}(X)\to\mathscr{B}$ (这也相当于在 $\mathscr{B}$ 上定义一个 $\mathscr{A}(X)$ 代数层的结构)。此时若 $f: X\to S$ 是结构态射，则有 $\mathscr{B} = f_*g_*\mathscr{O}_Y$。

推论 (1.3.7) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形；则为了使 X 在 S 上是有限型的，必须且只需拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{A}(X)$ 是有限型的 (**I**, 9.6.2)。

根据定义 (**I**, 9.6.2)，问题可以归结到 S 是仿射概形的情形；于是 X 是一个仿射概形 (1.3.4)，并且若 $S = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$，则 $\mathscr{A}(X)$ 就是 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\widetilde{B}$；由于 $\Gamma(U,\widetilde{B}) = B$，从而这个推论缘自 (**I**, 9.6.2) 和 (**I**, 6.3.3)。

推论 (1.3.8) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形；则为了使 X 是既约的，必须且只需拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{A}(X)$ 是既约的 (**0**, 4.1.4)。

事实上，问题在 S 上显然是局部性的；依照 (1.3.2)，这个推论缘自 (**I**, 5.1.1) 和 (**I**, 5.1.4)。

1.4　在 S 上仿射的概形上的拟凝聚层

命题 (1.4.1) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形，Y 是一个 S 概形，$\mathscr{F}$（相应的，$\mathscr{G}$）是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层（相应的，$\mathscr{O}_Y$ 模层）。则映射 $(h,u) \mapsto (\mathscr{A}(h), \mathscr{A}(u))$ 是一个从态射 $(Y,\mathscr{G}) \to (X,\mathscr{F})$ 的集合到双重同态 $(\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(\mathscr{F})) \to (\mathscr{A}(Y), \mathscr{A}(\mathscr{G}))$ (1.1.2 和 1.1.3) 的集合上的一一映射。

证明方法和 (1.2.7) 完全是一个套路，同时利用 (**I**, 2.2.5) 和 (**I**, 2.2.4)，细节留给读者。

推论 (1.4.2) — 在 (1.4.1) 的前提条件下，进而假设 Y 在 S 上是仿射的，则为了使 (h,u) 是一个同构，必须且只需 $(\mathscr{A}(h), \mathscr{A}(u))$ 是一个双重同构。

命题 (1.4.3) — 对任意二元组 $(\mathscr{B}, \mathscr{M})$，其中 $\mathscr{B}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层，$\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{B}$ 模层（这与说 $\mathscr{M}$ 是拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层是一回事 (**I**, 9.6.1)），均有一个二元组 $(X, \mathscr{F})$，其中 X 是一个在 S 上仿射的概形，$\mathscr{F}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，使得 $\mathscr{A}(X) = B$ 和 $\mathscr{A}(\mathscr{F}) = \mathscr{M}$；进而这个二元组在只差一个唯一同构的意义下是唯一确定的。

唯一性缘自 (1.4.1) 和 (1.4.2)；存在性的证明与 (1.3.1) 相同，细节仍然留给读者。我们把 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$ 记作 $\widetilde{\mathscr{M}}$，并且称之为拟凝聚 $\mathscr{B}$ 模层 $\mathscr{M}$ 的附随层；对任意仿射开集 $U \subset S$，$\widetilde{\mathscr{M}}|_{p^{-1}(U)}$（其中 p 是结构态射 $X \to S$）都可以典范同构于 $(\Gamma(U, \mathscr{M}))^{\sim}$。

推论 (1.4.4) — 在拟凝聚 $\mathscr{B}$ 模层的范畴上，函子 $\widetilde{\mathscr{M}}$（关于 $\mathscr{M}$）是一个协变加性正合函子，并且与归纳极限和直和可交换。

事实上，问题立可归结到 S 是仿射概形的情形，从而这个推论缘自 (**I**, 1.3.5, 1.3.9 和 1.3.11)。

推论 (1.4.5) — 在 (1.4.3) 的前提条件下，为了使 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 是有限型 $\mathscr{O}_X$ 模层，必须且只需 $\mathscr{M}$ 是有限型 $\mathscr{B}$ 模层。

问题立可归结为 $S = \operatorname{Spec} A$ 是仿射概形的情形。此时 $\mathscr{B} = \widetilde{B}$，其中 B 是一个有限型 A 代数 (**I**, 9.6.2)，并且 $\mathscr{M} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个 B 模 (**I**, 1.3.13)；在概形 X 上，$\mathscr{O}_X$ 就是环 B 的附随层，并且 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 就是 B 模 M 的附随层；从而为了使 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 是有限型的，必须且只需 M 是有限型的 (**I**, 1.3.13)，故得我们的陈言。

命题 (1.4.6) — 设 Y 是一个在 S 上仿射的概形，X, X' 是两个在 Y 上仿射的概形（从而在 S 上也是仿射的 (1.3.5)）。设 $\mathscr{B} = \mathscr{A}(Y)$，$\mathscr{A} = \mathscr{A}(X)$，$\mathscr{A}' = \mathscr{A}(X')$。

则 $X\times_Y X'$ 在 Y 上是仿射的 (从而在 S 上也是仿射的) 并且 $\mathscr{A}(X\times_Y X')$ 可以典范等同于 $\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$。

事实上 (**I**, 9.6.1) $\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{B}$ 代数层，从而也是拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层 (**I**, 9.6.1)；设 Z 是 $\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$ 的谱 (1.3.1)。典范 $\mathscr{B}$ 同态 $\mathscr{A}\to\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$ 和 $\mathscr{A}'\to\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$ 分别对应 (1.2.7) 于 Y 态射 $p:Z\to X$ 和 $p':Z\to X'$。为了证明三元组 (Z,p,p') 是纤维积 $X\times_Y X'$，可以限于考虑 S 是仿射概形的情形 (**I**, 3.2.6.4)，设它的环是 C。此时 $Y,\ X,\ X'$ 都是仿射概形 (1.3.4)，它们的环 B,A,A' 都是 C 代数，且满足 $\mathscr{B}=\widetilde{B},\ \mathscr{A}=\widetilde{A},\ \mathscr{A}'=\widetilde{A'}$。我们知道 (**I**, 1.3.13)，$\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$ 可以典范等同于 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $(A\otimes_B A')^{\sim}$，从而环 $\mathrm{A}(Z)$ 可以等同于 $A\otimes_B A'$，并且态射 $p,\ p'$ 分别对应于典范同态 $A\to A\otimes_B A',\ A'\to A\otimes_B A'$。于是命题缘自 (**I**, 3.2.2)。

推论 (1.4.7) — 设 $\mathscr{F}$ (相应的，$\mathscr{F}'$) 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 (相应的，$\mathscr{O}_{X'}$ 模层)；则 $\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes_Y\mathscr{F}')$ 可以典范等同于 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{A}(Y)}\mathscr{A}(\mathscr{F}')$。

我们知道 $\mathscr{F}\otimes_Y\mathscr{F}'$ 在 $X\times_Y X'$ 上是拟凝聚的 (**I**, 9.1.2)。设 $g:Y\to S,\ f:X\to Y,\ f':X'\to Y$ 是结构态射，于是结构态射 $h:Z\to S$ 既等于 $g\circ f\circ p$ 又等于 $g\circ f'\circ p'$。我们定义一个典范同态

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{A}(Y)}\mathscr{A}(\mathscr{F}')\longrightarrow\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes_Y\mathscr{F}')$$

如下：对任意开集 $U\subset S$，均有典范同态 $\Gamma(f^{-1}(g^{-1}(U)),\mathscr{F})\to\Gamma(h^{-1}(U),p^*\mathscr{F})$ 和典范同态 $\Gamma(f'^{-1}(g'^{-1}(U)),\mathscr{F}')\to\Gamma(h^{-1}(U),p'^*\mathscr{F}')$ (**0**, 4.4.3)，由此导出一个典范同态

$$\begin{aligned}\Gamma(f^{-1}(g^{-1}(U)),\mathscr{F})\otimes_{\Gamma(g^{-1}(U),\mathscr{O}_Y)}\Gamma(f'^{-1}(g'^{-1}(U)),\mathscr{F}')\longrightarrow&\\ \Gamma(h^{-1}(U),p^*\mathscr{F})\otimes_{\Gamma(h^{-1}(U),\mathscr{O}_Z)}\Gamma(h^{-1}(U),p'^*\mathscr{F}')&\ 。\end{aligned}$$

为了证明这是一个 $\mathscr{A}(S)$ 模层的同构，可以限于考虑下面的情形：S 是仿射概形 (从而 X,X',Y 和 $X\times_Y X'$ 都是仿射概形)，并且 (在 (1.4.6) 的记号下) $\mathscr{F}=\widetilde{M},\ \mathscr{F}'=\widetilde{M'}$，其中 M (相应的，M') 是一个 A 模 (相应的，A' 模)。此时 $\mathscr{F}\otimes_Y\mathscr{F}'$ 可以等同于 $(A\otimes_B A')$ 模 $M\otimes_B M'$ 在 $X\times_Y X'$ 上的附随层 (**I**, 9.1.3)，于是这个推论缘自 $\mathscr{O}_S$ 模层 $(M\otimes_B M')^{\sim}$ 与 $\widetilde{M}\otimes_{\widetilde{B}}\widetilde{M'}$ 之间的典范等同 (把 $M,\ M'$ 和 B 都看作是 C 模) (**I**, 1.3.13 和 1.6.3)。

特别的，若把 (1.4.7) 应用到 $X=Y$ 且 $\mathscr{F}'=\mathscr{O}_{X'}$ 的情形，则我们看到 $\mathscr{A}'$ 模层 $\mathscr{A}(f'^*\mathscr{F})$ 可以等同于 $\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$。

(1.4.8) 特别的，如果 $X=X'=Y$ (其中 X 在 S 上是仿射的)，我们看到若 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 是两个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，则有

(1.4.8.1) $$\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G})=\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{A}(X)}\mathscr{A}(\mathscr{G})\ ,$$

只差一个函子性的典范同构。进而若 $\mathscr{F}$ 是有限呈示的，则由 (**I**, 1.6.3 和 1.3.12) 知

(1.4.8.2) $$\mathscr{A}(\mathscr{H}om_X(\mathscr{F},\mathscr{G})) = \mathscr{H}om_{\mathscr{A}(X)}(\mathscr{A}(\mathscr{F}),\mathscr{A}(\mathscr{G})) ,$$

只差一个典范同构。

注解 (1.4.9) — 若 X, X' 是两个在 S 上仿射的概形，则它们的和 $X\coprod X'$ 在 S 上也是仿射的，因为两个仿射概形的和还是仿射概形。

命题 (1.4.10) — 设 S 是一个概形，$\mathscr{B}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层，$X=\operatorname{Spec}\mathscr{B}$。则对于 $\mathscr{B}$ 的任意拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$，$\widetilde{\mathscr{J}}$ 都是 $\mathscr{O}_X$ 的拟凝聚理想层，并且 X 上由 $\widetilde{\mathscr{J}}$ 所定义的闭子概形 Y 可以典范同构于 $\operatorname{Spec}(\mathscr{B}/\mathscr{J})$。

事实上，由 (**I**, 4.2.3) 立知，Y 在 S 上是仿射的；从而依照 (1.3.1)，问题归结到 S 是仿射概形的情形，此时命题可由 (**I**, 4.1.2) 立得。

我们也可以这样来陈述 (1.4.10) 的结果：若 $h:\mathscr{B}\to\mathscr{B}'$ 是拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层的一个满同态，则 $\mathscr{A}(h):\operatorname{Spec}\mathscr{B}'\to\operatorname{Spec}\mathscr{B}$ 是一个闭浸入。

命题 (1.4.11) — 设 S 是一个概形，$\mathscr{B}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层，$X=\operatorname{Spec}\mathscr{B}$。对于 $\mathscr{O}_S$ 的任意拟凝聚理想层 $\mathscr{K}$，（把结构态射 $X\to S$ 记为 f）均有 $(f^*\mathscr{K})\mathscr{O}_X=(\mathscr{K}\mathscr{B})^\sim$，只差一个典范同构。

问题在 S 上是局部性的，故可以归结到 $S=\operatorname{Spec}A$ 是仿射概形的情形，此时命题与 (**I**, 1.6.9) 无异。

1.5 基概形变换

命题 (1.5.1) — 设 X 是一个在 S 上仿射的概形。则对于基概形的任意扩张 $g:S'\to S$，$X'=X_{(S')}=X\times_S S'$ 都是在 S' 上仿射的概形。

设 f' 是投影 $X'\to S'$，只需证明对于 S' 的任意仿射开集 U'，只要 $g(U')$ 可以包含在 S 的一个仿射开集 U 之中，则 $f'^{-1}(U')$ 也是一个仿射开集 (1.2.1)；从而可以限于考虑 S 和 S' 都是仿射概形的情形，并且只需证明 X' 是一个仿射概形 (1.3.4)。然而此时 X 是一个仿射概形 (1.3.4)，并且若令 A,A' 和 B 分别是 S,S' 和 X 的环，则我们知道 X' 就是环 $A'\otimes_A B$ 所对应的仿射概形 (**I**, 3.2.2)。

推论 (1.5.2) — 在 (1.5.1) 的前提条件下，设 $f:X\to S$ 是结构态射，$f':X'\to S'$，$g':X'\to X$ 是投影，并使得图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[r, "g"'] & S' \end{tikzcd}$$

是交换的。则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均有一个 $\mathscr{O}_S$ 模层的典范同构

(1.5.2.1) $$u\ :\ g^*f_*\mathscr{F}\ \xrightarrow{\sim}\ f'_*g'^*\mathscr{F}\quad 。$$

特别的，存在一个从 $\mathscr{A}(X')$ 到 $g^*\mathscr{A}(X)$ 的典范同构。

为了定义 u，只需定义一个同态

$$v\ :\ f_*\mathscr{F}\ \longrightarrow\ g_*f'_*g'^*\mathscr{F}\ =\ f_*g'_*g'^*\mathscr{F}\quad ,$$

再取 $u\ =\ v^\sharp$ 即可 (**0**, 4.4.3)。我们令 $v\ =\ f_*(\rho)$，其中 ρ 是典范同态 $\mathscr{F}\ \rightarrow\ g'_*g'^*\mathscr{F}$ (**0**, 4.4.3)。为了证明 u 是一个同构，可以限于考虑 S 和 S' 都是仿射概形的情形，从而 X 和 X' 也都是仿射概形；在 (1.5.1) 的记号下，我们有 $\mathscr{F}\ =\ \widetilde{M}$，其中 M 是一个 B 模。由此立知 $g^*f_*\mathscr{F}$ 和 $f'_*g'^*\mathscr{F}$ 都等于 A' 模 $A'\otimes_A M$（把 M 看作 A 模）的附随 $\mathscr{O}_{S'}$ 模层，并且 u 就是附随于恒同映射的那个同态 (**I**, 1.6.3, 1.6.5 和 1.6.7)。

注解 (1.5.3) — 如果在 (1.5.2) 中不假设 X 在 S 上是仿射的，则结论不再成立，即使 $S'=\operatorname{Spec}\boldsymbol{k}(s)$ $(s\in S)$ 并且 $S'\rightarrow S$ 是典范态射 (**I**, 2.4.5)（此时 X' 与纤维 $f^{-1}(s)$ 无异 (**I**, 3.6.2)），这一点务必小心。换一种说法就是，如果 X 在 S 上不是仿射的，则“对拟凝聚层取顺像”的运算与“取纤维”的运算是不能交换的。然而我们将在第 III 章 (**III**, 4.2.4) 给出一个结果，它表明上述命题在“渐近”的意义下对于 X 上的凝聚层是成立的，只要假设 f 是紧合的 (5.4) 并且 S 是 Noether 的。

推论 (1.5.4) — 对任意在 S 上仿射的概形 X 和任意 $s\ \in\ S$，纤维 $f^{-1}(s)$（其中 f 表示结构态射 $X\rightarrow S$）都是仿射概形。

只需把 (1.5.1) 应用到 $S'=\operatorname{Spec}\boldsymbol{k}(s)$ 上，并且使用 (1.3.4)。

推论 (1.5.5) — 设 X 是一个 S 概形，S' 是一个在 S 上仿射的概形；则 $X'\ =\ X_{(S')}$ 是一个在 X 上仿射的概形。进而，若 $f:X\rightarrow S$ 是结构态射，则有一个 $\mathscr{O}_X$ 代数层的典范同构 $\mathscr{A}(X)\xrightarrow{\sim}f^*\mathscr{A}(S')$，并且对任意拟凝聚 $\mathscr{A}(S')$ 模层 $\mathscr{M}$，均有一个典范的双重同构 $f^*\mathscr{M}\xrightarrow{\sim}\mathscr{A}(\widetilde{f'^*\mathscr{M}})$，这里 $f'=f_{(S')}$ 是指结构态射 $X'\rightarrow S'$。

只需在 (1.5.1) 和 (1.5.2) 中把 X 和 S' 的位置互换即可。

(1.5.6) 现在设 S,S' 是两个概形，$q:S'\rightarrow S$ 是一个态射，$\mathscr{B}$（相应的，$\mathscr{B}'$）是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层（相应的，$\mathscr{O}_{S'}$ 代数层），$u:\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{B}'$ 是一个 q 态射（也就是说，是一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\mathscr{B}\rightarrow q_*\mathscr{B}'$）。于是若 $X=\operatorname{Spec}\mathscr{B}$, $X'=\operatorname{Spec}\mathscr{B}'$，则可以典范地导出一个态射

$$v=\operatorname{Spec}(u)\ :\ X'\ \longrightarrow\ X\ ,$$

使得图表

(1.5.6.1)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow[q]{} & S \end{array}$$

是交换的 (竖直箭头都是结构态射)。事实上，给出 u 与给出一个拟凝聚 $\mathscr{O}_{S'}$ 代数层的同态 $u^\sharp : q^*\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ 是等价的 ($\mathbf{0}$, 4.4.3)；从而它可以典范地定义出一个 S' 态射

$$w \ :\ \operatorname{Spec}\mathscr{B}' \longrightarrow \operatorname{Spec} q^*\mathscr{B}\ ,$$

且使得 $\mathscr{A}(w) = u^\sharp$ (1.2.7)。另一方面，由 (1.5.2) 知，$\operatorname{Spec} q^*\mathscr{B}$ 可以典范等同于 $X \times_S S'$；态射 v 就是 w 和第一个投影的合成 $X' \xrightarrow{w} X \times_S S' \xrightarrow{p_1} X$，并且 (1.5.6.1) 的交换性缘自定义。设 U (相应的，U') 是 S (相应的，S') 的一个仿射开集，满足 $q(U') \subset U$，设 $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_S)$, $A' = \Gamma(U', \mathscr{O}_{S'})$ 是它们的环，$B = \Gamma(U, \mathscr{B})$, $B' = \Gamma(U', \mathscr{B}')$；则 u 的限制，作为一个 $(q|_{U'})$ 态射：$\mathscr{B}|_U \to \mathscr{B}'|_{U'}$，对应于代数间的一个双重同态 $B \to B'$；若 V, V' 分别是 U, U' 在 X, X' 中的逆像 (关于结构态射)，则 v 的限制态射 $V' \to V$ 就对应着 ($\mathbf{I}$, 1.7.3) 上面这个双重同态。

(1.5.7) 在与 (1.5.6) 相同的假设下，设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{B}$ 模层；则有一个典范的 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层同构

(1.5.7.1)
$$v^*\widetilde{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} ((q^*\mathscr{M}) \otimes_{q^*\mathscr{B}} \mathscr{B}')^\sim \quad 。$$

事实上，典范同构 (1.5.2.1) 已经把 $p_1^*\widetilde{\mathscr{M}}$ 典范同构于 $q^*\mathscr{B}$ 模层 $q^*\mathscr{M}$ 的附随层 (在 $\operatorname{Spec} q^*\mathscr{B}$ 上)，只需再应用 (1.4.7) 即可。

1.6　仿射态射

(1.6.1) 所谓一个概形态射 $f : X \to Y$ 是仿射的，是指它把 X 定义成一个在 Y 上仿射的概形。于是前几节的所说的性质可以翻译成下面的形式：

命题 (1.6.2) — (i) 闭浸入总是仿射的。

(ii) 两个仿射态射的合成也是仿射的。

(iii) 若 $f : X \to Y$ 是一个仿射的 S 态射，则对任意基扩张 $S' \to S$，$f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ 都是仿射的。

(iv) 若 $f : X \to Y$ 和 $f' : X' \to Y'$ 是两个仿射的 S 态射，则

$$f \times_S f' \ :\ X \times_S X' \longrightarrow Y \times_S Y'$$

也是仿射的。

(v) 若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个态射，并且 $g \circ f$ 是仿射的，同时 g 是分离的，则 f 是仿射的。

(vi) 若 f 是仿射的，则 f_{red} 也是如此。

依照 (**I**, 5.5.12)，只需证明 (i), (ii) 和 (iii)。然则 (i) 与例子 (1.2.2) 无异，(ii) 与 (1.3.5) 无异；最后 (iii) 可由 (1.5.1) 得出，因为 $X_{(S')}$ 可以等同于纤维积 $X \times_Y Y_{(S')}$ (**I**, 3.3.11)。

推论 (1.6.3) — 若 X 是一个仿射概形，Y 是一个分离概形，则任何态射 $X \to Y$ 都是仿射的。

命题 (1.6.4) — 设 Y 是一个局部 *Noether* 概形，$f: X \to Y$ 是一个有限型态射。则为了使 f 是仿射的，必须且只需 f_{red} 是如此。

根据 (1.6.2, (vi))，我们只需证明条件的充分性。为此只需证明若 Y 是 Noether 且仿射的，则 X 是仿射的；然此时 Y_{red} 是仿射的，从而 X_{red} 也是如此，这是根据前提条件。然则 X 还是 Noether 的，从而由 (**I**, 6.1.7) 就可以推出结论。

1.7 模层的附随向量丛

(1.7.1) 设 A 是一个环，E 是一个 A 模。还记得 E 上的对称代数 (algèbre symétri--que) 是指张量代数 $\mathbf{T}(E)$ 除以它的由所有形如 $x \otimes y - y \otimes x$（$x, y$ 跑遍 E）的元素所生成的双边理想后的商代数，我们记之为 $\mathbf{S}(E)$（或 $\mathbf{S}_A(E)$）。代数 $\mathbf{S}(E)$ 还可以用下面的普适性质来描述：若 σ 是典范映射 $E \to \mathbf{S}(E)$（即 $E \to \mathbf{T}(E)$ 和典范映射 $\mathbf{T}(E) \to \mathbf{S}(E)$ 的合成），则任何 A 线性映射 $E \to B$（其中 B 是一个交换 A 代数）都可以唯一地分解为 $E \xrightarrow{\sigma} \mathbf{S}(E) \xrightarrow{g} B$，其中 g 是一个 A 代数的同态。由这个本征描述立知，对于两个 A 模 E, F，我们有

$$\mathbf{S}(E \oplus F) = \mathbf{S}(E) \otimes \mathbf{S}(F) ,$$

只差一个典范同构；进而 $\mathbf{S}(E)$（关于 E）是一个从 A 模范畴到 A 交换代数范畴的协变函子；最后，上述本征描述还表明，若 $E = \varinjlim E_\lambda$，则有 $\mathbf{S}(E) = \varinjlim \mathbf{S}(E_\lambda)$，只差一个典范同构。为了简单起见，通常把乘积 $\sigma(x_1)\sigma(x_2)\ldots\sigma(x_n)$（其中 $x_i \in E$）记作 $x_1 x_2 \ldots x_n$，只要不会造成误解。代数 $\mathbf{S}(E)$ 是分次的，其中 $\mathbf{S}_n(E)$ 是由 E 中的 n 个元素 $(n \geqslant 0)$ 乘积的线性组合所组成的；代数 $\mathbf{S}(A)$ 典范同构于一元多项式代数 $A[T]$，而代数 $\mathbf{S}(A^n)$ 则典范同构于 n 元多项式代数 $A[T_1, \ldots, T_n]$。

(1.7.2) 设 φ 是一个环同态 $A \to B$。若 F 是一个 B 模，则典范映射 $F \to \mathbf{S}(F)$ 给出一个典范映射 $F_{[\varphi]} \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$，从而它又可以分解为 $F_{[\varphi]} \to \mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$；其中的典范同态 $\mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$ 是满的，但未必是一一的。若 E 是一个 A 模，则

任何双重同态 $E \to F$（也就是说，任何 A 同态 $E \to F_{[\varphi]}$）都可以典范地定义出一个 A 代数的同态 $\mathbf{S}(E) \to \mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$，也就是说，定义出代数之间的一个双重同态 $\mathbf{S}(E) \to \mathbf{S}(F)$。

在同样的记号下，对任意 A 模 E，$\mathbf{S}(E \otimes_A B)$ 都可以典范等同于代数 $\mathbf{S}(E) \otimes_A B$；这可由 $\mathbf{S}(E)$ 的普适性质 (1.7.1) 立得。

(1.7.3) 设 R 是环 A 的一个乘性子集；把 (1.7.2) 应用到环 $B = R^{-1}A$ 上，并且援引 $R^{-1}E = E \otimes_A R^{-1}A$，我们看到 $\mathbf{S}(R^{-1}E) = R^{-1}\mathbf{S}(E)$，只差一个典范同构。进而，若 $R' \supseteq R$ 是 A 的另一个乘性子集，则图表

$$\begin{array}{ccc} R^{-1}E & \longrightarrow & R'^{-1}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}(R^{-1}E) & \longrightarrow & \mathbf{S}(R'^{-1}E) \end{array}$$

是交换的。

(1.7.4) 现在设 $(S, \mathscr{A})$ 是一个环积空间，并设 $\mathscr{E}$ 是 S 上的一个 $\mathscr{A}$ 模层。若把每个开集 $U \subset S$ 都对应到 $\Gamma(U, \mathscr{A})$ 模 $\mathbf{S}(\Gamma(U, \mathscr{E}))$ 上，则我们定义了一个代数预层（根据 $\mathbf{S}(E)$ 的函子性质 (1.7.2)）；我们把这个预层的附随层称为 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{E}$ 的 $\mathscr{A}$ 对称代数层，并记作 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 或 $\mathbf{S}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})$。由 (1.7.1) 立知，$\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 是下面这个普适问题的解：任何 $\mathscr{A}$ 模层同态 $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$（其中 $\mathscr{B}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 代数层）都可以唯一地分解为 $\mathscr{E} \to \mathbf{S}(\mathscr{E}) \to \mathscr{B}$，其中第二个箭头是一个 $\mathscr{A}$ 代数同态。从而在 $\mathscr{A}$ 模层的同态 $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 代数层的同态 $\mathbf{S}(\mathscr{E}) \to \mathscr{B}$ 之间有一个一一对应。特别的，任何 $\mathscr{A}$ 模层同态 $u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 都定义了一个 $\mathscr{A}$ 代数层同态 $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(\mathscr{E}) \to \mathbf{S}(\mathscr{F})$，从而 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个协变函子。

依照 (1.7.2) 和 $\mathbf{S}$ 与归纳极限的交换性，对任意点 $s \in S$，均有 $(\mathbf{S}(\mathscr{E}))_s = \mathbf{S}(\mathscr{E}_s)$。若 $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ 是两个 $\mathscr{A}$ 模层，则 $\mathbf{S}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{F})$ 可以典范等同于 $\mathbf{S}(\mathscr{E}) \otimes_A \mathbf{S}(\mathscr{F})$，因为相关的预层具有这个性质。

还可以注意到 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 是一个分次 $\mathscr{A}$ 代数层，它是诸 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathbf{S}_n(\mathscr{E})$ 的直和，其中 $\mathbf{S}_n(\mathscr{E})$ 是预层 $U \mapsto \mathbf{S}_n(\Gamma(U, \mathscr{E}))$ 的附随层。特别的，若取 $\mathscr{E} = \mathscr{A}$，则我们看到 $\mathbf{S}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})$ 可以等同于 $\mathscr{A}[T] = \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Z]$（$T$ 是未定元，$\mathbb{Z}$ 是常值层）。

(1.7.5) 设 $(T, \mathscr{B})$ 是另一个环积空间，f 是一个态射 $(S, \mathscr{A}) \to (T, \mathscr{B})$。若 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{B}$ 模层，则 $\mathbf{S}(f^*\mathscr{F})$ 可以典范等同于 $f^*\mathbf{S}(\mathscr{F})$；事实上，若 $f = (\psi, \theta)$，则根据定义 ($\mathbf{0}$, 4.3.1)，我们有

$$\mathbf{S}(f^*\mathscr{F}) \ = \ \mathbf{S}((\psi^*\mathscr{F}) \otimes_{\psi^*\mathscr{B}} \mathscr{A}) \ = \ \mathbf{S}(\psi^*\mathscr{F}) \otimes_{\psi^*\mathscr{B}} \mathscr{A}$$

(1.7.2)；对于 S 的任意开集 U 和 $\mathbf{S}(\psi^*\mathscr{F})$ 在 U 上的任意截面 h，在每一点 $s \in U$ 处都

有一个邻域 V，使得 h 在它上面与 $\mathbf{S}(\Gamma(V, \psi^*\mathscr{F}))$ 中的某个元素重合；遵照 $\psi^*\mathscr{F}$ 的定义 (**0**, 3.7.1)，并且有见于（对一个模 E 来说）$\mathbf{S}(E)$ 中的任何元素都是 E 中有限个元素的乘积的线性组合，我们可以找到 $\psi(s)$ 在 T 中的一个邻域 W 和 $\mathbf{S}(\mathscr{F})$ 在 W 上的一个截面 h'，以及 s 的一个邻域 $V' \subset V \cap \psi^{-1}(W)$，使得 h 在 V' 上与 $t \mapsto h'(\psi(t))$ 重合；故得我们的陈言。

命题 (1.7.6) — 设 A 是一个环，$S = \operatorname{Spec} A$ 是它的素谱，$\mathscr{E} = \widetilde{M}$ 是一个 A 模 M 的附随层；则 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 是 A 代数 $\mathbf{S}(M)$ 的附随层。

事实上，对任意 $f \in A$，均有 $\mathbf{S}(M_f) = (\mathbf{S}(M))_f$ (1.7.3)，从而命题缘自定义 (**I**, 1.3.4)。

推论 (1.7.7) — 若 S 是一个概形，$\mathscr{E}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层，则 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 是拟凝聚的。进而若 $\mathscr{E}$ 是有限型的，则每个 $\mathscr{O}_S$ 模层 $\mathbf{S}_n(\mathscr{E})$ 都是有限型的。

第一个陈言可由 (1.7.6) 和 (**I**, 1.4.1) 立得；第二个则缘自下面的事实：若 E 是一个有限型 A 模，则 $\mathbf{S}_n(E)$ 也是有限型 A 模；此时我们应用 (**I**, 1.3.13)。

定义 (1.7.8) — 设 $\mathscr{E}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层。我们把拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 的谱 (1.3.1) 称为 $\mathscr{E}$ 在 S 上所定义的向量丛 (fibré vectoriel)，并记作 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$。 * (**追加$_{\mathbf{III}}$, 14)** — 如果 $\mathscr{E} = \mathscr{O}_S^n$，则我们也把 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 写成 $\mathbf{V}_S^n$；进而若 $S = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，则也把 $\mathbf{V}_S^n$ 写成 $\mathbf{V}_A^n$；我们有 $\mathbf{V}_A^n = \operatorname{Spec} A[T_1, \ldots, T_n]$，其中 T_i 都是未定元。 *

依照 (1.2.7)，对任意 S 概形 X，在 S 态射 $X \to \mathbf{V}(\mathscr{E})$ 与 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\mathbf{S}(\mathscr{E}) \to \mathscr{A}(X)$ 之间都有一个一一对应，从而这些 S 态射也与 $\mathscr{O}_S$ 模层同态 $\mathscr{E} \to \mathscr{A}(X) = f_*\mathscr{O}_X$（$f$ 是结构态射 $X \to S$）是一一对应的。特别的：

(1.7.9) 取 X 是 S 在某个开集 $U \subset S$ 上所诱导的开子概形。则一个 S 态射 $U \to \mathbf{V}(\mathscr{E})$ 与 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 在开集 $p^{-1}(U)$（p 是结构态射 $\mathbf{V}(\mathscr{E}) \to S$）上所诱导的 U 概形的一个 U 截面无异 (**I**, 2.5.5)。于是根据上面所述，这些 U 截面与 $\mathscr{O}_S$ 模层同态 $\mathscr{E} \to j_*(\mathscr{O}_S|_U)$（$j$ 是典范含入 $U \to S$）是一一对应的，这也相当于说 (**0**, 4.4.3)，它们与 $\mathscr{O}_S|_U$ 同态 $j^*\mathscr{E} = \mathscr{E}|_U \to \mathscr{O}_S|_U$ 是一一对应的。进而，易见一个 S 态射在一个开集 $U' \subset U$ 上的限制恰好对应于同态 $\mathscr{E}|_U \to \mathscr{O}_S|_U$ 在 U' 上的限制。由此可知，$\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 的 S 截面芽层可以典范等同于 $\mathscr{E}$ 的对偶 $\check{\mathscr{E}}$。

特别的，若取 $X = U = S$，则零同态 $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_S$ 对应于 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 的一个典范 S 截面，称为 S 零截面（参考 (8.3.3)）。

(1.7.10) 现在取 X 是域 K 的谱 $\{\xi\}$；从而结构态射 $f : X \to S$ 对应于一个嵌入 $\boldsymbol{k}(s) \to K$，其中 $s = f(\xi)$ (**I**, 2.4.6)；从而一个 S 态射 $\{\xi\} \to \mathbf{V}(\mathscr{E})$ 与一个 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 的取值在 $\boldsymbol{k}(s)$ 的扩张 K 中的点无异 (**I**, 3.4.5)，这些点都位于 $p^{-1}(s)$ 的点之上。我们也可以把这些点所组成的集合称为 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 在点 s 上的 K 有理纤维，根据 (1.7.8)，这个集

合可以等同于 $\mathscr{O}_S$ 模层同态 $\mathscr{E}\to f_*\mathscr{O}_X$ 的集合，这也相当于说 ($\mathbf{0}$, 4.4.3)，它可以等同于 $\mathscr{O}_S$ 模层同态 $f^*\mathscr{E}\to\mathscr{O}_X=K$ 的集合。然而根据定义 ($\mathbf{0}$, 4.3.1)，$f^*\mathscr{E}=\mathscr{E}_s\otimes_{\mathscr{O}_s}K=\mathscr{E}^s\otimes_{\boldsymbol{k}(s)}K$，这里我们令 $\mathscr{E}^s=\mathscr{E}_s/\mathfrak{m}_s\mathscr{E}_s$；从而 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 在点 s 上的 K 有理纤维可以等同于 K 向量空间 $\mathscr{E}^s\otimes_{\boldsymbol{k}(s)}K$ 的对偶；若 $\mathscr{E}^s$ 或者 K 在 $\boldsymbol{k}(s)$ 上是有限维的，则这个对偶还可以等同于 $(\mathscr{E}^s)^{\check{}}\otimes_{\boldsymbol{k}(s)}K$，这里我们用 $(\mathscr{E}^s)^{\check{}}$ 来记 $\boldsymbol{k}(s)$ 向量空间 $\mathscr{E}^s$ 的对偶。

命题 (1.7.11) — (i) $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 是一个反变函子（关于 $\mathscr{E}$），从拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层范畴到在 S 上仿射的概形范畴。

(ii) 若 $\mathscr{E}$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_S$ 模层，则 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 在 S 上是有限型的。

(iii) 若 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 是两个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层，则 $\mathbf{V}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ 可以典范等同于 $\mathbf{V}(\mathscr{E})\times_S\mathbf{V}(\mathscr{F})$。

(iv) 设 $g:S'\to S$ 是一个态射；则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层 $\mathscr{E}$，$\mathbf{V}(g^*\mathscr{E})$ 都可以典范等同于 $\mathbf{V}(\mathscr{E})_{(S')}=\mathbf{V}(\mathscr{E})\times_S S'$。

(v) 拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层的一个满同态 $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ 对应于一个闭浸入 $\mathbf{V}(\mathscr{F})\to\mathbf{V}(\mathscr{E})$。

(i) 可由 (1.2.7) 立得，有见于任何 $\mathscr{O}_S$ 模层同态 $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ 都典范地定义了一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathbf{S}(\mathscr{F})$ 的事实。(ii) 可由定义 ($\mathbf{I}$, 6.3.1) 和下面的事实立得：若 E 是一个有限型 A 模，则 $\mathbf{S}(E)$ 是一个有限型 A 代数。为了证明 (iii)，只需考虑典范同构 $\mathbf{S}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}(\mathscr{E})\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathbf{S}(\mathscr{F})$ (1.7.4) 并利用 (1.4.6) 即可。同样的，为了证明 (iv)，只需考虑典范同构 $\mathbf{S}(g^*\mathscr{E})\xrightarrow{\sim}g^*\mathbf{S}(\mathscr{E})$ (1.7.5) 并利用 (1.5.2) 即可。最后，为了证明 (v)，只需注意到若同态 $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ 是满的，则与之对应的 $\mathscr{O}_S$ 代数层同态 $\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathbf{S}(\mathscr{F})$ 也是满的。从而由 (1.4.10) 就可以推出结论。

(1.7.12) 特别的，取 $\mathscr{E}=\mathscr{O}_S$；则概形 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_S)$ 是一个在 S 上仿射的概形，它是 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathbf{S}(\mathscr{O}_S)$ 的谱，并且 $\mathbf{S}(\mathscr{O}_S)$ 可以等同于 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{O}_S[T]=\mathscr{O}_S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T]$（$T$ 是未定元）；对于 $S=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 这是显然的（依照 (1.7.6)），在一般情形，考虑结构态射 $S\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 并利用 (1.7.11, (iv)) 即可。由于这个缘故，我们也使用记号 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_S)=S[T]$，从而有公式

(1.7.12.1)
$$S[T]\ =\ S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T]\ 。$$

于是我们可以把 $S[T]$ 的 S 截面芽层与 $\mathscr{O}_S$ 之间的等同 ($\mathbf{I}$, 3.3.15) 看作是 (1.7.9) 中的更一般结果的一个特殊情形。

* **(追加$_{\mathbf{III}}$, 16)** — 我们也使用记号：

$$\mathbf{V}(\mathscr{O}_S^n)\ =\ \mathbf{V}_S^n\ =\ S[T_1,\dots,T_n]\ 。{}^*$$

(1.7.13) 我们在 (1.7.8) 中已经看到，对任意 S 概形 X，$\operatorname{Hom}_S(X,S[T])$ 都可以典范等同于 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S,\mathscr{A}(X))$，后者又典范同构于 $\Gamma(S.\mathscr{A}(X))$，从而具有一个环

结构；进而，任何 S 态射 $h: X \to Y$ 都对应着一个环同态 $\Gamma(\mathscr{A}(h)): \Gamma(X, \mathscr{A}(Y)) \to \Gamma(S, \mathscr{A}(X))$ (1.1.2)。如果我们给 $\mathrm{Hom}_S(X, S[T])$ 赋予上述环结构，则可以把 $\mathrm{Hom}_S(X, S[T])$ 看作是一个从 S 概形范畴到环范畴的反变函子（关于 X）。另一方面，$\mathrm{Hom}_S(X, \mathbf{V}(\mathscr{E}))$ 可以等同于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(X))$（这里把 $\mathscr{A}(X)$ 看作是一个 $\mathscr{O}_S$ 模层）；从而典范地带有一个定义在环 $\mathrm{Hom}_S(X, S[T])$ 上的模结构，并且由上面所述可以看到，二元组

$$\left(\mathrm{Hom}_S(X, S[T])\,,\ \mathrm{Hom}_S(X, \mathbf{V}(\mathscr{E}))\right)$$

是 X 的一个反变函子，取值在全体二元组 (A, M) 所组成的范畴之中，其中 A 是一个环，M 是一个 A 模，并且态射就是双重同态。

我们把这个事实解释为：$S[T]$ 是一个 S 环概形，$\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 是 S 环概形 $S[T]$ 上的一个 S 模概形（参考第零章 §8）。

(1.7.14) 我们下面来说明，由定义在 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 上的 S 模概形结构可以反过来构造出 $\mathscr{O}_S$ 模层 $\mathscr{E}$（只差一个唯一的同构）：为此我们首先证明，利用这个结构可以定义出一个从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathbf{S}(\mathscr{E}) = \mathscr{A}(\mathbf{V}(\mathscr{E}))$ 的某个 $\mathscr{O}_S$ 子模层上的典范同构。事实上 (1.7.4)，$\mathscr{O}_S$ 代数层同态的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbf{S}(\mathscr{E}), \mathscr{A}(X))$ 可以典范等同于 $\mathscr{O}_S$ 模层同态的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(X))$：若 h, h' 是后一集合中的两个元素，s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $\mathscr{E}$ 在一个开集 $U \subset S$ 上的一些截面，t 是 $\mathscr{A}(X)$ 在 U 上的一个截面，则根据定义，我们有

$$(h + h')(s_1 s_2 \ldots s_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \left(h(s_i) + h'(s_i)\right)$$

和

$$(t.h)(s_1 s_2 \ldots s_n) \;=\; t^n \prod_{i=1}^{n} h(s_i) \quad 。$$

据此，若 z 是 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 在 U 上的一个截面，则 $h \mapsto h(z)$ 是一个从 $\mathrm{Hom}_S(X, \mathbf{V}(\mathscr{E})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbf{S}(\mathscr{E}), \mathscr{A}(X))$ 到 $\Gamma(U, \mathscr{A}(X))$ 的映射。我们下面证明，$\mathscr{E}$ 可以等同于 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 的这样一个子模层：对任意开集 $U \subset S$ 和这个 $\mathscr{O}_S$ 子模层在 U 上的任意截面 z 以及任意 S 概形 X，映射 $h \mapsto h(z)$ 都是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S|_U}(\mathbf{S}(\mathscr{E})|_U, \mathscr{A}(X)|_U)$ 到 $\Gamma(U, \mathscr{A}(X))$ 的一个 $\Gamma(U, \mathscr{A}(X))$ 模同态。

事实上，易见 $\mathscr{E}$ 具有这个性质；为了证明逆命题成立，可以限于证明：当 $S = \operatorname{Spec} A, \mathscr{E} = \widetilde{M}$ 时，$\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 在 S 上的一个截面 z 只要满足上述性质（对于 $U = S$）就必然是 $\mathscr{E}$ 的一个截面；此时我们有 $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$，其中 $z_n \in \mathbf{S}_n(M)$，而问题归结为证明当 $n \neq 1$ 时总有 $z_n = 0$。令 $B = \mathbf{S}(M)$，并取 X 是概形 $\operatorname{Spec} B[T]$，其中 T 是一个未定元。则集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbf{S}(\mathscr{E}), \mathscr{A}(X))$ 可以等同于环同态 $h: B \to B[T]$ 的集合 (**I**, 1.3.13)，并且根据前面所述，我们有 $(T.h)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n h(z_n)$ ：z 上的前提条件蕴涵

着对任意同态 h 均有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n h(z_n) = T.\sum\limits_{n=0}^{\infty} h(z_n)$。特别的，若取 h 是典范含入，则我们得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n z_n = T.\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$，这就足以说明当 $n \neq 1$ 时总有 $z_n = 0$。

命题 (1.7.15) — *设 Y 是一个具有 Noether 底空间的概形或拟紧分离概形。则任何在 Y 上仿射且有限型的概形 X 都可以 Y 同构于某个形如 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 的 Y 概形的一个 Y 闭子概形，其中 $\mathscr{E}$ 是一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层。*[1]

事实上，拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{A}(X)$ 是有限型的 (1.3.7)。前提条件说明 $\mathscr{A}(X)$ 可由它的一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}$ 所生成 (**I**, 9.6.5)；根据定义，这又表明由含入 $\mathscr{E} \to \mathscr{A}(X)$ 典范延拓而成的典范同态 $\mathbf{S}(\mathscr{E}) \to \mathscr{A}(X)$ 是满的；于是由 (1.4.10) 就可以推出结论。

§2. 齐次素谱

2.1 分次环和分次模的一般事实

记号 (2.1.1) — 给了一个具有正次数的分次环 S（译注：以下简称*正分次环*，按照法文习惯，0 也是“正”的，参考 Bourbaki《代数学》, 第 I 章, § 2, n° 5），我们用 S_n 来标记由 S 中的全体 n 次元 $(n \geqslant 0)$ 所组成的集合，并且用 S_+ 来标记全体 S_n $(n > 0)$ 的 (直) 和；我们有 $1 \in S_0$，S_0 是 S 的一个子环，S_+ 是 S 的一个分次理想，并且 S 是 S_0 和 S_+ 的直和。若 M 是 S 上的一个分次模 (可以具有正或负的次数)，则我们也用 M_n 来标记由 M 中的全体 n 次元 $(n \in \mathbb{Z})$ 所组成的 S_0 模。

对任意整数 $d > 0$，我们把诸 S_{nd} 的直和标记为 $S^{(d)}$；于是若把 S_{nd} 中的元素定义为 n 次齐次元，则 $S^{(d)}$ 具有一个分次环的结构。

对于一个满足 $0 \leqslant k \leqslant d-1$ 的整数 k，我们把诸 M_{nd+k} $(n \in \mathbb{Z})$ 的直和标记为 $M^{(d,k)}$；它是一个分次 $S^{(d)}$ 模，即我们把 M_{nd+k} 中的元素看作是 n 次齐次元。$M^{(d,0)}$ 也被记为 $M^{(d)}$。

在同样的记号下，对任意整数 n（正或负），我们可以定义一个分次 S 模 $M(n)$，即对所有 $k \in \mathbb{Z}$，令 $(M(n))_k = M_{n+k}$。特别的，$S(n)$ 是一个分次 S 模，满足 $(S(n))_k = S_{n+k}$（对于 $n < 0$，我们令 $S_n = 0$）。所谓一个分次 S 模 M 是*自由的*，是指它作为分次模同构于一族形如 $S(n)$ 的模的直和；由于 $S(n)$ 是一个单苇 S 模 (由次数为 $-n$ 的元素 $1 \in S$ 所生成)，故说 M 是自由的即相当于说它在 S 上具有一个由齐次元素所组成的基底。

[1] 译注：在第 IV 章的 (1.7.10) 中，此命题将得到改进。

所谓一个分次 S 模 M 是有限呈示的，是指可以找到一个正合序列 $P \to Q \to M \to 0$，其中 P, Q 都是一些形如 $S(n)$ 的模的有限直和，并且该序列中的同态都是 0 次的 (参考 (2.1.2)) 。

(2.1.2) 设 M, N 是两个分次 S 模；则在 $M \otimes_S N$ 上可以定义一个分次 S 模的结构，方法如下：首先，在张量积 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ 上可以定义一个分次 $\mathbb{Z}$ 模的结构 ($\mathbb{Z}$ 上的分次结构是：$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$，并且对于 $n \neq 0$ 均有 $\mathbb{Z}_n = 0$)，即令 $(M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_q = \bigoplus_{m+n=q} M_m \otimes_{\mathbb{Z}} N_n$ (由于 M 和 N 分别是诸 M_m 和诸 N_n 的直和，故知 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ 可以典范等同于诸 $M_m \otimes_{\mathbb{Z}} N_n$ 的直和) 。准此，我们有 $M \otimes_S N = (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)/P$，其中 P 是由所有形如 $(xs) \otimes y - x \otimes (sy)$ $(x \in M,\ y \in N,\ s \in S)$ 的元素在 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ 中所生成的 $\mathbb{Z}$ 子模；易见 P 是 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ 的一个分次 $\mathbb{Z}$ 子模，由此立知，取商模上可以在 $M \otimes_S N$ 上得到一个分次 S 模的结构。

对于两个分次 S 模 M, N，还记得所谓一个 S 同态 $u : M \to N$ 是 k 次的，是指对任意 $j \in \mathbb{Z}$，均有 $u(M_j) \subset N_{j+k}$ 。若以 H_n 来标记 M 到 N 的全体 n 次同态所组成的集合，并且令 H 是 M 到 N 的全体 S 模同态的集合，则我们用 $\operatorname{Hom}_S(M, N)$ 来标记诸 H_n $(n \in \mathbb{Z})$ 在 S 模 H 中的 (直) 和；一般来说，$\operatorname{Hom}_S(M, N)$ 与 H 并不相等。然而若 M 是有限型的，则有 $H = \operatorname{Hom}_S(M, N)$；事实上，此时可以假设 M 是由有限个齐次元 x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 所生成的，且任何同态 $u \in H$ 都可以唯一地写成 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k$ 的形式，其中对每个 k，$u_k(x_i)$ 就是 $u(x_i)$ 的 $k + \deg(x_i)$ 次齐次分量 $(1 \leqslant i \leqslant n)$，这意味着除了有限个指标之外总有 $u_k = 0$；由定义知 $u_k \in H_k$，故得结论。

我们把 $\operatorname{Hom}_S(M, N)$ 中的零次元称为分次 S 模的同态。易见 $S_m H_n \subset H_{m+n}$，从而诸 H_n 在 $\operatorname{Hom}_S(M, N)$ 上定义了一个分次 S 模结构。

由上述定义立知，对于两个分次 S 模 M, N，我们有

(2.1.2.1) $$M(m) \otimes_S N(n) = (M \otimes_S N)(m+n) \ ,$$

(2.1.2.2) $$\operatorname{Hom}_S(M(m), N(n)) = (\operatorname{Hom}_S(M, N))(n-m) \ 。$$

设 S, S' 是两个分次环；一个分次环的同态 $\varphi : S \to S'$ 是指这样一个环同态，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $\varphi(S_n) \subset S'_n$ (换句话说，φ 是分次 $\mathbb{Z}$ 模的一个 0 次同态) 。这样一个同态在 S' 上定义了一个分次 S 模的结构；于是 S' 同时具有这个分次模结构和一个分次环结构，我们称 S' 是一个分次 S 代数。

现在若 M 是一个分次 S 模，则分次 S 模的张量积 $M \otimes_S S'$ 自然地带有一个分次 S' 模的结构，这个分次就是上面所定义的。

引理 (2.1.3) — 设 S 是一个正分次环，E 是 S_+ 的一个由齐次元所组成的子集，

则为了使 E 能够生成作为 S 模的 S_+，必须且只需 E 能够生成作为 S_0 代数的 S。

条件显然是充分的；下面证明它也是必要的。设 E_n（相应的，E^n）是 E 中的全体次数等于 n（相应的，$\leqslant n$）的元素组成的集合；于是只需证明 S_n $(n > 0)$ 作为 S_0 模是由 E^n 中元素的总次数为 n 的乘积所生成的。对 n 进行归纳，依照前提条件，$n = 1$ 的情形是显然的；进而可以说明 $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} S_p E_{n-p}$，故由归纳法立得结论。

推论 (2.1.4) — 为了使 S_+ 是有限型理想，必须且只需 S 是有限型 S_0 代数。

事实上，只要把每个生成元都换成它的齐次分量，我们总可以假设 S_0 代数 S（相应的，S 理想 S_+）的生成元组是由有限个齐次元所组成的。

推论 (2.1.5) — 为了使 S 是 *Noether* 的，必须且只需 S_0 是 *Noether* 的并且 S 是有限型 S_0 代数。

条件显然是充分的；它也是必要的，因为 S_0 同构于 S/S_+，并且 S_+ 是一个有限型理想 (2.1.4)。

引理 (2.1.6) — 设 S 是一个正分次环，并且是有限型 S_0 代数，M 是一个有限型分次 S 模。则:

(i) 诸 M_n 都是有限型 S_0 模，并且可以找到一个整数 n_0，使得当 $n \leqslant n_0$ 时，总有 $M_n = 0$。

(ii) 可以找到一个整数 n_1 和一个整数 $h > 0$，使得当 $n \geqslant n_1$ 时，总有 $M_{n+h} = S_h M_n$。

(iii) 对任意一组满足 $d > 0, 0 \leqslant k \leqslant d-1$ 的整数 (d,k)，$M^{(d,k)}$ 都是有限型的 $S^{(d)}$ 模。

(iv) 对任意整数 $d > 0$，$S^{(d)}$ 都是有限型 S_0 代数。

(v) 可以找到一个整数 $h > 0$，使得当 $m > 0$ 时，总有 $S_{mh} = (S_h)^m$。

(vi) 对任意整数 $n > 0$，均可找到一个整数 m_0，使得当 $m \geqslant m_0$ 时，总有 $S_m \subset S_+^n$。

可以假设 S（作为 S_0 代数）是由一组次数为 h_i 的齐次元 f_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 所生成的，并且 M（作为 S_0 模）是由一组次数为 k_j 的齐次元 x_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ 所生成的。于是易见 M_n 是由这样一些元素 $f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r} x_j$ 的 S_0 系数线性组合所组成的，其中 α_i 都是 $\geqslant 0$ 的整数，并且满足 $k_j + \sum_i \alpha_i h_i = n$；对每个 j，只有有限组 (α_i) 满足上述方程，因为 $h_i > 0$，故得 (i) 的第一个陈言；第二个陈言是显然的。另一方面，设 h 是诸 h_i 的最小公倍数，并且令 $g_i = f_i^{h/h_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$，则这些 g_i 都是 h 次的；设 z_μ 是这样一些元素 $f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r} x_j$，其中 $0 \leqslant \alpha_i < h/h_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$，；它们只有有限个，设 n_1 是其最高次数。则易见当 $n \geqslant n_1$ 时，M_{n+k} 中的元素都是这些 z_μ 的线性组合，并且其系数是 g_i 的一些次数 > 0 的单项式，从而我们有 $M_{n+h} = S_h M_n$，这

就证明了 (ii)。使用同样的方法，我们看到，（对任意 $d>0$）$M^{(d,k)}$ 的元素都是一些 $g^d f_1^{\alpha_1}\dots f_r^{\alpha_r}x_j$ 的 S_0 系数线性组合，其中 $0\leqslant\alpha_i<d$，并且 g 是 S 的齐次元；故得 (iii)；取 $M=S_+$，则 (iv) 缘自 (iii) 和引理 (2.1.3)，因为 $(S_+)^{(d)}=(S^{(d)})_+$。取 $M=S$，则 (v) 可由 (ii) 推出。最后，对于给定的 n，只有有限个 (α_i) 满足 $\alpha_i\geqslant 0$ 和 $\sum\alpha_i<n$，从而若 m_0 是诸和式 $\sum\limits_i n_ih_i$ 中的最大者，则当 $m>m_0$ 时总有 $S_m\subset S_+^n$，这就证明了 (vi)。

推论 (2.1.7) — 若 S 是 *Noether* 的，则对任意整数 $d>0$，$S^{(d)}$ 都是如此。

这缘自 (2.1.5) 和 (2.1.6, (iv))。

(2.1.8) 设 $\mathfrak{p}$ 是分次环 S 的一个分次素理想；则 $\mathfrak{p}$ 是诸子群 $\mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}\cap S_n$ 是直和。假设 $\mathfrak{p}$ 不包含 S_+。于是若 $f\in S_+$ 不属于 $\mathfrak{p}$，则关系式 $f^nx\in\mathfrak{p}$ 等价于 $x\in\mathfrak{p}$；特别的，若 $f\in S_d$ $(d>0)$，则对任意 $x\in S_{m-nd}$，关系式 $f^nx\in\mathfrak{p}_m$ 都等价于 $x\in\mathfrak{p}_{m-nd}$。

命题 (2.1.9) — *设 n_0 是一个 >0 的整数; 对每一个 $n\geqslant n_0$，设 $\mathfrak{p}_n$ 是 S_n 的一个子群。为了能找到 S 的一个不包含 S_+ 的分次素理想 $\mathfrak{p}$ 使得对任意 $n\geqslant n_0$ 均有 $\mathfrak{p}\cap S_n=\mathfrak{p}_n$，必须且只需以下诸条件都是成立的:*

1° *对任意 $m\geqslant 0$ 和任意 $n\geqslant n_0$，均有 $S_m\mathfrak{p}_n\subset\mathfrak{p}_{m+n}$。*

2° *对 $m\geqslant n_0,\ n\geqslant n_0,\ f\in S_m,\ g\in S_n$，关系式 $fg\in\mathfrak{p}_{m+n}$ 总蕴涵 $f\in\mathfrak{p}_m$ 或 $g\in\mathfrak{p}_n$。*

3° *至少存在一个 $n\geqslant n_0$ 使得 $\mathfrak{p}_n\neq S_n$。*

进而，分次素理想 $\mathfrak{p}$ 是唯一的。

条件 1° 和 2° 显然是必要的。进而，若 $\mathfrak{p}\not\supseteq S_+$，则至少有一个 $k>0$ 使得 $\mathfrak{p}\cap S_k\neq S_k$；若 $f\in S_k$ 不属于 $\mathfrak{p}$，则根据 (2.1.8)，$\mathfrak{p}\cap S_n=S_n$ 蕴涵 $\mathfrak{p}\cap S_{n-mk}=S_{n-mk}$；从而若对充分大的 n 均有 $\mathfrak{p}\cap S_n=S_n$，则必有 $\mathfrak{p}\supseteq S_+$，这与前提条件矛盾，这就证明了 3° 是必要的。反过来，假设条件 1°, 2°, 3° 都得到满足。首先注意下面的事实：假设可以找到一个整数 $d\geqslant n_0$ 和一个不属于 $\mathfrak{p}_d$ 的 $f\in S_d$，于是若 $\mathfrak{p}$ 存在，则当 $m<n_0$ 时，$\mathfrak{p}_m=\mathfrak{p}\cap S_m$ 必然等于这样一些 $x\in S_m$ 的集合，即除了有限个 r 之外，总有 $f^rx\in\mathfrak{p}_{m+rd}$。这就足以说明，只要 $\mathfrak{p}$ 存在，它就是唯一的。只消再证明 $\mathfrak{p}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathfrak{p}_n$ 就是一个素理想，其中当 $m<n_0$ 时 $\mathfrak{p}_m$ 就是用上述条件来定义的。首先注意到，依照 2°，对于 $m\geqslant n_0$，$\mathfrak{p}_m$ 同样可以被描述为这样一些 $x\in S_m$ 的集合，即除了有限个 r 之外，总有 $f^rx\in\mathfrak{p}_{m+rd}$。据此，若 $g\in S_m,\ x\in\mathfrak{p}_n$，则除了有限个 r 之外，总有 $f^rgx\in\mathfrak{p}_{m+n+rd}$，从而 $gx\in\mathfrak{p}_{m+n}$，这证明了 $\mathfrak{p}$ 是 S 的一个理想。为了证明它是一个素理想，换句话说，为了证明分次环 $S/\mathfrak{p}$（其分次是由子群 $S_n/\mathfrak{p}_n$ 所定义的）是一个整环，只需证明（考虑 $S/\mathfrak{p}$ 中的两个元素的最高次分量）若 $x\in S_m,\ y\in S_n$ 满足 $x\notin\mathfrak{p}_m,\ y\notin\mathfrak{p}_n$，则必有 $xy\notin\mathfrak{p}_{m+n}$。假如这件事不成立，那么当 r 充分大时，总

有 $f^{2r}xy\in\mathfrak{p}_{m+n+2rd}$；然而对所有的 $r>0$，皆有 $f^ry\notin\mathfrak{p}_{n+rd}$；于是由条件 2∘ 知，除了有限个 r 之外，总有 $f^rx\in\mathfrak{p}_{m+rd}$，由此就可以推出 $x\in\mathfrak{p}_m$，这与前提条件矛盾。

(2.1.10) 如果 S_+ 的子集 $\mathfrak{J}$ 是 S 的一个理想，则我们也称它是 S_+ 的理想，如果 $\mathfrak{J}$ 是 S 的某个不包含 S_+ 的分次素理想与 S_+ 的交集，则我们也称它是 S_+ 的分次素理想 (根据 (2.1.9)，S 的这个分次素理想是唯一确定的)。若 $\mathfrak{J}$ 是 S_+ 的一个理想，则 $\mathfrak{J}$ 在 S_+ 中的根是指 S_+ 中的这样一些元素所组成的集合，即它的某个方幂落在 $\mathfrak{J}$ 中，换句话说，这就是集合 $\mathfrak{r}_+(\mathfrak{J})=\mathfrak{r}(\mathfrak{J})\cap S_+$；特别的，0 在 S_+ 中的根也被称为 S_+ 的诣零根，并记作 $\mathfrak{N}_+$：从而它就是由 S_+ 的全体幂零元所组成的集合。若 $\mathfrak{J}$ 是 S_+ 的一个分次理想，则它的根 $\mathfrak{r}_+(\mathfrak{J})$ 也是一个分次理想。事实上，取商环 $S/\mathfrak{J}$ 可以把问题归结到 $\mathfrak{J}=0$ 的情形，此时只需证明若 $x=x_h+x_{h-1}+\cdots+x_k$ 是一个幂零元，则每一个 $x_i\in S_i$ $(1\leqslant h\leqslant i\leqslant k)$ 都是幂零元；我们可以假设 $x_k\neq0$，则 x^n 的最高次分量就是 x_k^n，从而 x_k 是幂零的，再对 k 进行归纳即可。所谓一个分次环 S 是本质既约的，是指 $\mathfrak{N}_+=0$，换句话说，S_+ 不含非零的幂零元。

(2.1.11) 注意到在一个分次环 S 中，若元素 x 是一个零因子，则它的最高次分量也是一个零因子。所谓一个分次环 S 是本质整的，是指环 S_+ (没有单位元) 不包含零因子并且 $\neq0$；这只需验证环 S_+ 中的非零齐次元都不是零因子即可。易见若 $\mathfrak{p}$ 是 S_+ 的一个分次素理想，则 $S/\mathfrak{p}$ 是本质整的。

设 S 是一个本质整的分次环，并设 $x_0\in S_0$；于是若在 S_+ 中可以找到一个齐次元 $f\neq0$，使得 $x_0f=0$，则有 $x_0S_+=0$，因为对任意 $g\in S_+$，均有 $(x_0g)f=(x_0f)g=0$，从而由前提条件知 $x_0g=0$。为了使 S 是整的，必须且只需 S_0 是整的并且 S_+ 在 S_0 中的零化子等于 0。

2.2　分次环的分式环

(2.2.1) 设 S 是一个正分次环，f 是 S 中的一个齐次元，次数为 $d>0$；于是分式环 $S'=S_f$ 是分次的，其中的 S'_n 是由这样一些 x/f^k 所组成的集合，其中 $x\in S_{n+kd}$ 且 $k\geqslant0$ (注意这里的 n 可以取负值)；我们把 S' 中次数为 0 的元素组成的子环 $S'_0=(S_f)_0$ 记作 $S_{(f)}$。

若 $f\in S_d$，则 S_f 中的单项式族 $(f/1)^h$ (h 可以取正或负值) 构成环 $S_{(f)}$ 上的一个线性无关组 (système libre)，并且由它们的线性组合所组成的集合与环 $(S^{(d)})_f$ 无异，从而同构于 $S_{(f)}[T,T^{-1}]=S_{(f)}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$ (其中 T 是一个未定元)。事实上，若有一个关系式 $\sum\limits_{h=-a}^{b}z_h(f/1)^h=0$，其中 $z_h=x_h/f^m$，并且所有 x_h 都属于 S_{md}，则根据定义，这个关系式等价于存在一个 $k>-a$ 使得 $\sum\limits_{h=-1}^{b}f^{h+k}x_h=0$，由于在后一个关系式中各项的次数都不相同，故知对所有 h 都有 $f^{h+k}x_h=0$，从而 $z_h=0$。

若 M 是一个分次 S 模，则 $M' = M_f$ 是一个分次 S' 模，其中 M'_n 是由这样一些 z/f^k 所组成的集合，其中 $z \in M_{n+kd}$ 且 $k \geqslant 0$；我们用 $M_{(f)}$ 来标记由 M' 中的全体次数为 0 的元素所组成的集合；则易见 $M_{(f)}$ 是一个 $S_{(f)}$ 模，并且我们有 $(M^{(d)})_f = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} (S^{(d)})_f$。

引理 (2.2.2) — 设 d, e 是两个 >0 的整数，$f \in S_d$, $g \in S_e$。则有一个典范的环同构

$$S_{(fg)} \xrightarrow{\sim} (S_{(f)})_{g^d/f^e} \quad 。$$

若我们把这两个环等同，则还有一个典范的模同构

$$M_{(fg)} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})_{g^d/f^e} \quad 。$$

事实上，fg 整除 $f^e g^d$，后者又整除 $(fg)^{de}$，从而分次环 $S_{(fg)}$ 和 $S_{f^e g^d}$ 可以典范等同；另一方面，$S_{f^e g^d}$ 还可以等同于 $(S_{f^e})_{g^d/1}$ (**0**, 1.4.6)，并且由于 $f^e/1$ 在 S_{f^e} 中是可逆的，故知 $S_{f^e g^d}$ 也可以等同于 $(S_{f^e})_{g^d/f^e}$。现在元素 g^d/f^e 在 S_{f^e} 中是 0 次的；由此立知，$(S_{f^e})_{g^d/f^e}$ 中的零次元子环就是 $(S_{(f^e)})_{g^d/f^e}$，并且由于显然有 $S_{(f^e)} = S_{(f)}$，这就证明了命题的第一部分，第二部分同理可证。

(2.2.3) 在 (2.2.2) 的前提条件下，易见典范同态 $S_f \to S_{fg}$ (**0**, 1.4.1) (它把 x/f^k 映到 $g^k x/(fg)^k$) 是 0 次的，从而它的限制给出了一个典范同态 $S_{(f)} \to S_{(fg)}$，并使得图表

$$\begin{tikzcd} & S_{(f)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S_{(fg)} \arrow[rr, "\sim"] & & (S_{(f)})_{g^d/f^e} \end{tikzcd}$$

是交换的。同理可以定义一个典范同态 $M_{(f)} \to M_{(fg)}$。

引理 (2.2.4) — 若 f, g 是 S_+ 中的两个齐次元，则环 $S_{(fg)}$ 是由 $S_{(f)}$ 和 $S_{(g)}$ 的典范像的并集所生成的。

依照 (2.2.2)，只需证明 $1/(g^d/f^e) = f^{d+e}/(fg)^d$ 属于 $S_{(g)}$ 在 $S_{(fg)}$ 中的典范像，而根据定义这是显然的。

命题 (2.2.5) — 设 d 是一个 > 0 的整数，并设 $f \in S_d$。则有一个典范的环同构 $S_{(f)} \xrightarrow{\sim} S^{(d)}/(f-1)S^{(d)}$；若我们把这两个环等同，则还有一个典范的模同构 $M_{(f)} \xrightarrow{\sim} M^{(d)}/(f-1)M^{(d)}$。

第一个同构是把 x/f^n，其中 $x \in S_{nd}$，对应到元素 $\bar{x}$，这是指 $x \bmod (f-1)S^{(d)}$ 的同余类；这个映射是合理的，因为对任意 $x \in S^{(d)}$，均有同余关系 $f^h x \equiv x (\bmod (f-1)S^{(d)})$，从而若有 $h > 0$ 使得 $f^h x = 0$，则有 $\bar{x} = 0$。另一方面，若 $x \in S_{nd}$ 满

足 $x=(f-1)y$，其中 $y=y_{hd}+y_{(h+1)d}+\cdots+y_{kd}$，并且 $y_{jd}\in S_{jd}$, $y_{hd}\neq 0$，则必有 $h=n$ 和 $x=-y_{hd}$，并且有关系式 $y_{(j+1)d}=fy_{jd}$ $(h\leqslant j\leqslant k-1)$ 和 $fy_{kd}=0$，由此就可以推出 $f^{k-n}x=0$；从而对任意元素 $x\in S_{nd}$ 的同余类 $\bar{x} \bmod (f-1)S^{(d)}$，我们可以把它对应到 $S_{(f)}$ 中的元素 x/f^n，因为上面的注解表明，这个定义是合理的。易见这两个映射都是环同态，并且是互逆的。对于 M 可以采用同样的程序。

推论 (2.2.6) — *若 S 是 Noether 的，则 $S_{(f)}$ 也是如此，其中 f 是一个次数 >0 的齐次元。*

这可由 (2.1.7) 和 (2.2.5) 立得。

(2.2.7) 设 T 是 S_+ 中的一个由齐次元素所组成的乘性子集；则 $T_0=T\cup\{1\}$ 是 S 的一个乘性子集；由于 T_0 中的元素都是齐次的，故知环 $T_0^{-1}S$ 上有一个明显的分次结构；我们以 $S_{(T)}$ 来标记 $T_0^{-1}S$ 的零次元子环，也就是说，它是由这样一些 x/h 所组成的子环，其中 $h\in T$ 且 x 是次数与 h 相同的齐次元。我们知道 (**0**, 1.4.5)，$T_0^{-1}S$ 可以典范等同于诸 S_f（f 跑遍 T）的归纳极限 (关于典范同态 $S_f\to S_{fg}$)；由于这个等同保持次数，从而它把 $S_{(T)}$ 等同于诸 $S_{(f)}$ $(f\in T)$ 的归纳极限。对任意分次 S 模 M，可以同样地定义 (环 $S_{(T)}$ 上的) 模 $M_{(T)}$，它是由 $T_0^{-1}M$ 中的零次元所组成的，可以看出，这个模是诸 $M_{(f)}$ $(f\in T)$ 的归纳极限。

若 $\mathfrak{p}$ 是 S_+ 的一个分次素理想，T 是由 S_+ 中的所有不属于 $\mathfrak{p}$ 的齐次元所组成的集合，则我们分别用 $S_{(\mathfrak{p})}$ 和 $M_{(\mathfrak{p})}$ 来标记环 $S_{(T)}$ 和模 $M_{(T)}$。

2.3 分次环的齐次素谱

(2.3.1) 给了一个正分次环 S，S 的*齐次素谱*是指 S_+ 的分次素理想的集合 (2.1.10)，记作 $\operatorname{Proj} S$，这也相当于说，它是 S 的那些不包含 S_+ 的齐次素理想的集合；下面我们要在集合 $\operatorname{Proj} S$ 上定义一个*分离概形*的结构。

(2.3.2) 对于 S 的任意子集 E，设 $V_+(E)$ 是由包含 E 但不包含 S_+ 的那些分次素理想所组成的集合；从而它就是 $\operatorname{Spec} S$ 的子集 $V(E)\cap\operatorname{Proj} S$。于是由 (**I**, 1.1.2) 可以推出：

(2.3.2.1) $$V_+(0)=\operatorname{Proj} S\ ,\qquad V_+(S)=V_+(S_+)=\varnothing\ ,$$

(2.3.2.2) $$V_+\Big(\bigcup_\lambda E_\lambda\Big)=\bigcap_\lambda V_+(E_\lambda)\ ,$$

(2.3.2.3) $$V_+(EE')=V_+(E)\cup V_+(E')\ 。$$

把 E 换成由 E 所生成的分次理想并不会改变集合 $V_+(E)$；进而，若 $\mathfrak{J}$ 是 S 的一

个分次理想，则对任意 $n>0$，均有

(2.3.2.4) $$V_+(\mathfrak{J}) \ = \ V_+\Big(\bigcup_{q\geqslant n}(\mathfrak{J}\cap S_q)\Big) \quad 。$$

事实上，若 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Proj}S$ 包含了 $\mathfrak{J}$ 中的所有次数 $\geqslant n$ 的元素，则根据前提条件，可以找到一个齐次元 $f\in S_d$ 且不属于 $\mathfrak{p}$，故知对任意 $m\geqslant 0$ 和任意 $x\in S_m\cap\mathfrak{J}$，除了有限个 r 之外总有 $f^rx\in\mathfrak{J}\cap S_{m+rd}$，从而 $f^rx\in\mathfrak{p}\cap S_{m+rd}$，这就表明 $x\in\mathfrak{p}\cap S_m$ (2.1.9)。

最后，对于 S 的任意分次理想 $\mathfrak{J}$，均有

(2.3.2.5) $$V_+(\mathfrak{J}) \ = \ V_+\big(\mathfrak{r}_+(\mathfrak{J})\big) \quad 。$$

(2.3.3) 根据定义，在 $X=\operatorname{Proj}S$ 上的由 $\operatorname{Spec}S$ 的 Zariski 拓扑所诱导的拓扑下，诸 $V_+(E)$ 都是 X 的闭子集，我们把这个诱导拓扑也称为 X 上的 *Zariski* 拓扑。对任意 $f\in S$，令

(2.3.3.1) $$D_+(f) \ = \ D(f)\cap\operatorname{Proj}S \ = \ \operatorname{Proj}S-V_+(f) \quad 。$$

于是对 S 中的两个元素 f,g，我们有 (**I**, 1.1.9.1)

(2.3.3.2) $$D_+(fg) \ = \ D_+(f)\cap D_+(g) \quad 。$$

命题 (2.3.4) — *如果让 f 跑遍 S 中的齐次元的集合，则这些 $D_+(f)$ 构成 $X=\operatorname{Proj}S$ 的一个拓扑基。*

事实上，由 (2.3.2.2) 和 (2.3.2.4) 知，X 的任何闭子集都是一些形如 $V_+(f)$ 的子集的交集，其中 f 是次数 >0 的齐次元。

(2.3.5) 设 f 是 S_+ 中的一个齐次元，次数为 $d>0$；则对 S 的任何一个不包含 f 的分次素理想 $\mathfrak{p}$，由形如 x/f^n，其中 $x\in\mathfrak{p}$ 且 $n\geqslant 0$，的元素所组成的集合是分式环 S_f 的一个素理想 (**0**, 1.2.6)；从而它与 $S_{(f)}$ 的交集是 $S_{(f)}$ 的一个素理想，我们记之为 $\psi_f(\mathfrak{p})$ ：它是由全体形如 x/f^n，其中 $n\geqslant 0$, $x\in\mathfrak{p}\cap S_{nd}$，的元素所组成的。我们于是定义了一个映射

$$\psi_f \ : \ D_+(f) \longrightarrow \operatorname{Spec}S_{(f)} \quad 。$$

进而，若 $g\in S_e$ 是 S_+ 中的另一个齐次元，则有下面的交换图表

(2.3.5.1) $$\begin{tikzcd} D_+(f) \arrow[r, "\psi_f"] & \operatorname{Spec}S_{(f)} \\ D_+(fg) \arrow[u] \arrow[r, "\psi_{fg}"'] & \operatorname{Spec}S_{(fg)} \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

其中左边的竖直箭头是包含，右边的是映射 ${}^a\omega_{fg,f}$，是由典范同态 $\omega=\omega_{fg,f}:S_{(f)}\to S_{(fg)}$ 所导出的 (**I**, 1.2.1)。事实上，若 $x/f^n\in\omega^{-1}(\psi_{fg}(\mathfrak{p}))$，其中 $fg\notin\mathfrak{p}$，则根据定义，我们有 $g^nx/(fg)^n\in\psi_f(\mathfrak{p})$，从而 $g^nx\in\mathfrak{p}$，因而 $x\in\mathfrak{p}$，反过来是显然的。

命题 (2.3.6) — 映射 ψ_f 是 $D_+(f)$ 到 $\operatorname{Spec}S_{(f)}$ 的一个同胚。

首先，ψ_f 是连续的；因为若有 $h\in S_{nd}$ 满足 $h/f^n\in\psi_f(\mathfrak{p})$，则根据定义，我们有 $h\in\mathfrak{p}$，反之也对，从而 $\psi_f^{-1}(D(h/f^n))=D_+(hf)$，我们的陈言缘自公式 (2.3.3.2)。进而，当 h 跑遍这些集合 S_{nd} 时，诸 $D_+(hf)$ 构成 $D_+(f)$ 的一个拓扑基，这是依据 (2.3.4) 和公式 (2.3.3.2)；从而上面所述表明，有见于 $D_+(f)$ 和 $\operatorname{Spec}S_{(f)}$ 都满足 $(\mathbb{T}_0)$ 公理，ψ_f 是单的，并且它的逆映射 $\psi_f(D_+(f))\to D_+(f)$ 是连续的。最后，为了证明 ψ_f 是满的，注意到若 $\mathfrak{q}_0$ 是 $S_{(f)}$ 的一个素理想，并且对任意 $n>0$，令 $\mathfrak{p}_n$ 是由这样一些 $x\in S_n$ 所组成的集合，其中 $x^d/f^n\in\mathfrak{q}_0$，则这些 $\mathfrak{p}_n$ 满足 (2.1.9) 中的条件：事实上，若 $x\in S_n$，$y\in S_n$ 满足 $x^d/f^n\in\mathfrak{q}_0$ 和 $y^d/f^n\in\mathfrak{q}_0$，则有 $(x+y)^{2d}/f^{2n}\in\mathfrak{q}_0$，故得 $(x+y)^d/f^n\in\mathfrak{q}_0$，因为 $\mathfrak{q}_0$ 是素理想；这就证明了 $\mathfrak{p}_n$ 是 S_n 的子群，(2.1.9) 中的其它条件都很容易验证，只需注意到 $\mathfrak{q}_0$ 是素理想。若 $\mathfrak{p}$ 是由此定义出的 S 的分次素理想，则我们有 $\psi_f(\mathfrak{p})=\mathfrak{q}_0$，因为若 $x\in S_{nd}$，则关系式 $x/f^n\in\mathfrak{q}_0$ 和 $x^d/f^{nd}\in\mathfrak{q}_0$ 是等价的，这仍然是因为 $\mathfrak{q}_0$ 是素理想。

推论 (2.3.7) — 为了使 $D_+(f)=\varnothing$，必须且只需 f 是幂零的。

事实上，为了使 $\operatorname{Spec}S_{(f)}=\varnothing$，必须且只需 $S_{(f)}=0$，或者说在 S_f 中 $1=0$，根据定义，这也就意味着 f 是幂零的。

推论 (2.3.8) — 设 E 是 S_+ 的一个子集。则以下诸条件是等价的:

a) $V_+(E)=X=\operatorname{Proj}S$。

b) E 中的任何元素都是幂零的。

c) E 中的任何元素的任何齐次分量都是幂零的。

易见 c) 蕴涵 a) 且 b) 蕴涵 a)。若 $\mathfrak{J}$ 是由 E 在 S 中所生成的分次理想，则条件 a) 等价于 $V_+(\mathfrak{J})=X$；当然 a) 就说明任何齐次元 $f\in\mathfrak{J}$ 都满足 $V_+(f)=X$，从而依照 (2.3.7)，f 是幂零的。

推论 (2.3.9) — 若 $\mathfrak{J}$ 是 S_+ 的一个分次理想，则 $\mathfrak{r}_+(\mathfrak{J})$ 就等于 S_+ 的所有包含 $\mathfrak{J}$ 的分次素理想的交集。

考虑分次商环 $S/\mathfrak{J}$，则可以归结到 $\mathfrak{J}=0$ 的情形。现在只需证明若 $f\in S_+$ 不是幂零的，则必可找到 S 的一个分次素理想不包含 f；然则，f 至少有一个分量不是幂零的，从而可以假设 f 是齐次的；此时我们的陈言缘自 (2.3.7)。

(2.3.10) 对于 $X=\operatorname{Proj}S$ 的任意子集 Y，设 $\mathfrak{j}_+(Y)$ 是由那些满足 $Y\subset V_+(f)$ 的 $f\in S_+$ 所组成的集合；这也相当于说，$\mathfrak{j}_+(Y)=\mathfrak{j}(Y)\cap S_+$；从而 $\mathfrak{j}_+(Y)$ 是 S_+ 的一个

理想，并且与它在 S_+ 中的根相等。

命题 (2.3.11) — (i) 对于 S_+ 的任意子集 E，$\mathfrak{j}_+(V_+(E))$ 都等于 E 在 S_+ 中所生成的理想的根。

(ii) 对于 X 的任意子集 Y，$V_+(\mathfrak{j}_+(Y))$ 都等于 Y 在 X 中的闭包 $\overline{Y}$。

(i) 若 $\mathfrak{J}$ 是由 E 在 S_+ 中所生成的分次理想，则有 $V_+(E) = V_+(\mathfrak{J})$，从而我们的陈言缘自 (2.3.9)。

(ii) 由于 $V_+(\mathfrak{J}) = \bigcap_{f\in\mathfrak{J}} V_+(f)$，故知对任意 $f \in \mathfrak{J}$，关系式 $Y \subset V_+(\mathfrak{J})$ 都蕴涵 $Y \subset V_+(f)$，从而 $\mathfrak{j}_+(Y) \supset \mathfrak{J}$，遂得到 $V_+(\mathfrak{j}_+(Y)) \subset V_+(\mathfrak{J})$，根据闭集的定义，这也就证明了 (ii)。

推论 (2.3.12) — 在 $X = \operatorname{Proj} S$ 的闭子集 Y 与 S_+ 的分次根式理想 (译注：为简单起见，我们把与它在 S_+ 中的根相等的分次理想称为分次根式理想) 之间有一个一一对应 $Y \mapsto \mathfrak{j}_+(Y)$, $\mathfrak{J} \mapsto V_+(\mathfrak{J})$； X 中的两个闭子集的并集 $Y_1 \cup Y_2$ 对应于 $\mathfrak{j}_+(Y_1) \cap \mathfrak{j}_+(Y_2)$，任意一族闭子集 (Y_λ) 的交集对应于诸 $\mathfrak{j}_+(Y_\lambda)$ 的和在 S_+ 中的根。

推论 (2.3.13) — 设 $\mathfrak{J}$ 是 S_+ 的一个分次理想；则为了使 $V_+(\mathfrak{J}) = \varnothing$，必须且只需 S_+ 中的任何元素都有一个方幂落在 $\mathfrak{J}$ 中。

这个推论还有一个等价的形式：

推论 (2.3.14) — 设 (f_α) 是 S_+ 中的一族齐次元。则为了使诸 $D_+(f_\alpha)$ 构成 $X = \operatorname{Proj} S$ 的一个覆盖，必须且只需 S_+ 的任何元素都有一个方幂落在由诸 f_α 所生成的理想之中。

推论 (2.3.15) — 设 (f_α) 是 S_+ 中的一族齐次元，f 是 S_+ 的一个元素。则下述关系是等价的: a) $D_+(f) \subset \bigcup_\alpha D_+(f_\alpha)$； b) $V_+(f) \supset \bigcap_\alpha V_+(f_\alpha)$； c) f 的某个方幂落在由诸 f_α 所生成的理想之中。

推论 (2.3.16) — 为了使 $X = \operatorname{Proj} S$ 是空集，必须且只需 S_+ 中的任何元素都是幂零的。

推论 (2.3.17) — 在 (2.3.12) 的一一对应下，X 的不可约闭子集对应于 S_+ 的分次素理想。

事实上，若 $Y = Y_1 \cup Y_2$，且 Y_1, Y_2 都是与 Y 不相等的闭子集，则有

$$\mathfrak{j}_+(Y) = \mathfrak{j}_+(Y_1) \cap \mathfrak{j}_+(Y_2) \quad 。$$

此时理想 $\mathfrak{j}_+(Y_1)$ 和 $\mathfrak{j}_+(Y_2)$ 都与 $\mathfrak{j}_+(Y)$ 不相等，从而 $\mathfrak{j}_+(Y)$ 不是素理想。反过来，若 $\mathfrak{J}$ 是 S_+ 的一个分次理想，且不是素的，则可以找到 S_+ 中的两个元素 f, g，满足 $f \notin \mathfrak{J}$, $g \notin \mathfrak{J}$, $fg \in \mathfrak{J}$；于是根据 (2.3.2.3)，$V_+(f) \not\supset V_+(\mathfrak{J})$, $V_+(g) \not\supset V_+(\mathfrak{J})$，同时 $V_+(f) \cup$

$V_+(g) \supseteq V_+(\mathfrak{J})$；由此可以得知，$V_+(\mathfrak{J})$ 是两个闭子集 $V_+(f) \cap V_+(\mathfrak{J})$, $V_+(g) \cap V_+(\mathfrak{J})$ 的并集，每一个都与 $V_+(\mathfrak{J})$ 不相等。

2.4 Proj S 上的分离概形结构

(2.4.1) 设 f, g 是 S_+ 中的两个齐次元；考虑仿射概形 $Y_f = \operatorname{Spec} S_{(f)}$, $Y_g = \operatorname{Spec} S_{(g)}$ 和 $Y_{fg} = \operatorname{Spec} S_{(fg)}$。依照 (2.2.2)，对应于典范同态 $\omega_{fg,f} : S_{(f)} \to S_{(fg)}$ 的那个态射 $w_{fg,f} = ({}^a\omega_{fg,f}, \widetilde{\omega}_{fg,f}) : Y_{fg} \to Y_f$ 是一个开浸入 (**I**, 1.3.6)。藉由 $\psi_f : D_+(f) \to Y_f$ 的逆同胚 (2.3.6)，我们可以把 Y_f 的仿射概形结构搬运到 $D_+(f)$ 上；于是依据图表 (2.3.5.1) 的交换性， 仿射概形 $D_+(fg)$ 可以等同于仿射概形 $D_+(f)$ 的开子概形 $D_+(fg)$。由此易见 (有见于 (2.3.5))，在 $X = \operatorname{Proj} S$ 上有唯一一个概形结构，使得它在诸 $D_+(f)$ 上的限制恰好就是上面所给出的仿射概形结构。进而：

命题 (2.4.2) — Proj S 是分离概形。

根据 (**I**, 5.5.6)，只需证明对于 S_+ 中的任意两个齐次元 f, g，$D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$ 都是仿射的，并且它的环可由 $D_+(f)$ 和 $D_+(g)$ 的环的典范像所生成；根据定义，第一点是显然的，第两点缘自 (2.2.4)。

以后当我们说齐次素谱 Proj S 是一个分离概形时，总是指上面所定义的这个概形结构。

例子 (2.4.3) — 设 $S = K[T_1, T_2]$，其中 K 是一个域，T_1, T_2 是两个未定元，S 上的分次由总次数来定义。于是由 (2.3.14) 知，Proj S 是 $D_+(T_1)$ 和 $D_+(T_2)$ 的并集；易见这两个仿射概形都典范同构于 $\operatorname{Spec} K[T]$，并且 Proj S 可由它们黏合而成，使用 (**I**, 2.3.2) 的方法 (参考 (7.4.14))。

命题 (2.4.4) — 设 S 是一个正分次环，并设 X 是分离概形 Proj S。

(i) 若 $\mathfrak{N}_+$ 是 S_+ 的诣零根 (2.1.10)，则分离概形 X_{red} 典范同构于 $\operatorname{Proj}(S/\mathfrak{N}_+)$；特别的，若 S 是本质既约的，则 Proj S 是既约的。

(ii) 假设 S 是本质既约的。则为了使 X 是整的，必须且只需 S 是本质整的。

(i) 设 $\overline{S}$ 是分次环 $S/\mathfrak{N}_+$，并设 $x \mapsto \overline{x}$ 是典范同态 $S \to \overline{S}$，它是 0 次的。对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，典范同态 $S_f \to \overline{S}_{\overline{f}}$ (**0**, 1.5.1) 都是满的，并且是 0 次的，从而它的限制给出一个满同态 $S_{(f)} \to \overline{S}_{(\overline{f})}$；若我们假设 $f \notin \mathfrak{N}_+$，则易见 $\overline{S}_{(\overline{f})}$ 是既约的，并且上述同态的核就是 $S(f)$ 的诣零根，换句话说，$\overline{S}_{(\overline{f})} = (S(f))_{\mathrm{red}}$。从而上述同态对应于一个闭浸入 $D_+(\overline{f}) \to D_+(f)$，该浸入把 $D_+(\overline{f})$ 等同于 $(D_+(f))_{\mathrm{red}}$ (**I**, 5.1.2)，特别的，该浸入给出底空间上的一个同胚。进而，若 $g \notin \mathfrak{N}_+$ 是 S_+ 中的另一个齐次元，

则图表

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \longrightarrow & \overline{S}_{(\overline{f})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{(fg)} & \longrightarrow & \overline{S}_{(\overline{fg})} \end{array}$$

是交换的；进而，由于当 f 跑遍次数 > 0 的齐次非幂零元时，诸 $D_+(f)$ 构成 $X = \operatorname{Proj} S$ 的一个覆盖 (2.3.7)，故我们看到，诸态射 $D_+(\bar{f}) \to D_+(f)$ 可以黏合成一个闭浸入 $\operatorname{Proj} \bar{S} \to \operatorname{Proj} S$，并且它在底空间上是一个同胚；故得结论 (**I**, 5.1.2)。

(ii) 假设 S 是本质整的，换句话说 (0) 是 S_+ 的一个不同于 S_+ 的分次素理想；于是依照 (i)，S 是既约的，再依照 (2.3.17)，S 是不可约的。反过来，假设 S 是本质既约的并且 X 是整的；则对于 S_+ 中的齐次元 $f \neq 0$，我们有 $D_+(f) \neq \varnothing$ (2.3.7)；X 是不可约的这个条件表明，若 f, g 是 S_+ 中的两个非零的齐次元，则有 $D_+(f) \cap D_+(g) \neq \varnothing$；从而 $fg \neq 0$，这是依据 (2.3.3.2)，由此可知 S_+ 中没有零因子，故得第一个陈言。

(2.4.5) 给了一个交换环 A，还记得所谓一个分次环 S 是一个分次 A 代数，是指它具有一个 A 代数的结构，并且每个子群 S_n 都是 A 模；其实只需要求 S_0 是一个 A 代数即可，换句话说，为了在 S 上定义一个分次 A 代数的结构，只需在 S_0 上定义一个 A 代数的结构，然后对于 $\alpha \in A,\ x \in S_n$，令 $\alpha.x = (\alpha.1)x$。

命题 (2.4.6) — 假设 S 是一个分次 A 代数。则在 $X = \operatorname{Proj} S$ 上，结构层 $\mathscr{O}_X$ 是一个 A 代数层 (这里把 A 看作是 X 上的常值层)；换句话说，X 是 $\operatorname{Spec} A$ 上的一个分离概形。

只需注意到对于 S_+ 的任意齐次元 f，$S_{(f)}$ 都是一个 A 代数，并且对于 S_+ 的两个齐次元 f, g，图表

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \longrightarrow & S_{(fg)} \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & A & \end{array}$$

是交换的。

命题 (2.4.7) — 设 S 是一个正分次环。

(i) 对任意整数 $d > 0$，均有一个从分离概形 $\operatorname{Proj} S$ 到分离概形 $\operatorname{Proj} S^{(d)}$ 上的典范同构。

(ii) 设 S' 是这样一个分次环：$S'_0 = \mathbb{Z}$，并且对于 $n > 0$，均有 $S'_n = S_n$ (看作是 $\mathbb{Z}$ 模)。则有一个从分离概形 $\operatorname{Proj} S$ 到分离概形 $\operatorname{Proj} S'$ 上的典范同构。

(i) 首先证明映射 $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap S^{(d)}$ 是集合 $\operatorname{Proj} S$ 到集合 $\operatorname{Proj} S^{(d)}$ 上的一一映射。事

实上，假设给了一个分次素理想 $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Proj} S^{(d)}$，令 $\mathfrak{p}_{nd} = \mathfrak{p}' \cap S_{nd}$ $(n \geqslant 0)$。对于那些不是 d 的倍数的 $n > 0$，我们定义 $\mathfrak{p}_n$ 是由满足 $x^d \in \mathfrak{p}_{nd}$ 的那些 $x \in S_n$ 所组成的集合；若 $x \in \mathfrak{p}_n$, $y \in \mathfrak{p}_n$，则有 $(x+y)^{2d} \in \mathfrak{p}_{2nd}$，从而 $(x+y)^d \in \mathfrak{p}_{nd}$，因为 $\mathfrak{p}'$ 是素理想；易见这样定义出来的一族 $\mathfrak{p}_n$ 满足 (2.1.9) 中的条件，从而存在唯一一个素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ 使得 $\mathfrak{p} \cap S^{(d)} = \mathfrak{p}'$。由于对 S_+ 的任意齐次元 f，均有 $V_+(f) = V_+(f^d)$ (2.3.2.3)，故知上述一一映射是拓扑空间的一个同胚。最后，在这些记号下，$S_{(f)}$ 和 $S_{(f^d)}$ 可以典范等同 (2.2.2)，从而作为分离概形，$\operatorname{Proj} S$ 与 $\operatorname{Proj} S^{(d)}$ 是典范等同的。

(ii) 若把每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ 都对应到 S' 的那个满足 $\mathfrak{p}' \cap S_n = \mathfrak{p} \cap S_n$ $(n > 0)$ 的唯一素理想 $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Proj} S'$ 上 (2.1.9)，则易见这给出了底空间的一个典范同胚 $\operatorname{Proj} S \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} S'$，因为当 f 是 S_+ 中的齐次元时，$V_+(f)$ 对于 S 和 S' 给出相同的集合。进而由于 $S_{(f)} = S'_{(f)}$，故知 $\operatorname{Proj} S$ 与 $\operatorname{Proj} S'$ 可以等同，作为分离概形。

推论 (2.4.8) — 若 S 是一个分次 A 代数，且 S'_A 是这样一个分次 A 代数：$(S'_A)_0 = A$, $(S'_A)_n = S_n$ $(n > 0)$，则有一个从 $\operatorname{Proj} S$ 到 $\operatorname{Proj} S'_A$ 的典范同构。

事实上，在 (2.4.7, (ii)) 的记号下，这两个概形都典范同构于 $\operatorname{Proj} S'$。

2.5 分次模的附随层

(2.5.1) 设 M 是一个分次 S 模。对于 S_+ 中的任何齐次元 f，$M_{(f)}$ 都是一个 $S_{(f)}$ 模，从而对应于仿射概形 $\operatorname{Spec} S_{(f)}$（可以等同于 $D_+(f)$）上的一个拟凝聚层 $(M_{(f)})^\sim$ (**I**, 1.3.4)。

命题 (2.5.2) — 在 $X = \operatorname{Proj} S$ 上存在唯一一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\widetilde{M}$ 满足下面的条件：对于 S_+ 的任意齐次元 f，均有 $\Gamma(D_+(f), \widetilde{M}) = M_{(f)}$，并且对于 S_+ 的两个齐次元 f, g，限制同态 $\Gamma(D_+(f), \widetilde{M}) \to \Gamma(D_+(fg), \widetilde{M})$ 是典范同态 $M_{(f)} \to M_{(fg)}$ (2.2.3)。

假设 $f \in S_d$, $g \in S_e$。由于依照 (2.2.2)，$D_+(fg)$ 可以等同于 $(S_{(f)})_{g^d/f^e}$ 的素谱，故知 $D_+(f)$ 上的层 $(M_{(f)})^\sim$ 在 $D_+(fg)$ 上的限制可以典范等同于模 $(M_{(f)})_{g^d/f^e}$ 的附随层 (**I**, 1.3.6)，从而也典范等同于 $(M_{(fg)})^\sim$ (2.2.2)；由此可知，存在一个典范同构

$$\theta_{g,f} \ :\ (M_{(f)})^\sim|_{D_+(fg)} \xrightarrow{\sim} (M_{(g)})^\sim|_{D_+(fg)} ,$$

并且若 h 是 S_+ 中的第三个齐次元，则在 $D_+(fgh)$ 上总有 $\theta_{f,h} = \theta_{f,g} \circ \theta_{g,h}$。因而 (**0**, 3.3.1) 在 X 上存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，并且对于 S_+ 的每个齐次元 f，都有一个同构 $\eta_f : \mathscr{F}|_{D_+(f)} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})^\sim$，使得 $\theta_{g,f} = \eta_g \circ \eta_f^{-1}$。考虑预层 $D_+(f) \mapsto M_{(f)}$（定义在 X 的一个拓扑基上），限制同态是典范同态 $M_{(f)} \to M_{(fg)}$，设它的附随层是 $\mathscr{G}$，则上面所述表明，$\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是同构的（有见于 (**I**, 1.3.7)）；这个层 $\mathscr{G}$ 就满足命题中对于 $\widetilde{M}$ 所提出的条件。特别的，我们有 $\widetilde{S} = \mathscr{O}_X$。

定义 (2.5.3) — 我们把 (2.5.2) 中所定义的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\widetilde{M}$ 称为分次 S 模 M 的

附随层。

还记得在分次 S 模的范畴中，态射是指次数为 0 的分次模同态。这样一来：

命题 (2.5.4) — 函子 $\widetilde{M}$（关于 M）是一个协变加性正合函子，从分次 S 模的范畴映到拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层的范畴，并且与归纳极限和直和可交换。

事实上，这些性质都是局部性的，故只需对层 $\widetilde{M}|_{D_+(f)} = (M_{(f)})^{\sim}$ 进行验证即可；现在函子 M_f 之于 M，函子 N_0 之于 N（在分次 S_f 模的范畴中），以及函子 $\widetilde{P}$ 之于 P（在 $S_{(f)}$ 模的范畴中）都具有正合性并且与归纳极限和直和可交换 (**I**, 1.3.5 和 1.3.9)；故得命题。

我们把对应于 0 次同态 $u : M \to N$ 的那个层同态记作 $\widetilde{u} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$。则由 (2.5.4) 易见，(**I**, 1.3.9 和 1.3.10) 中的结果对于分次 S 模和 0 次同态仍然是有效的（$\widetilde{M}$ 换成这里的含义）；证明也完全是直接的。

命题 (2.5.5) — 对任意 $\mathfrak{p} \in X = \operatorname{Proj} S$，均有 $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$。

事实上，根据定义 $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim \Gamma(D_+(f), \widetilde{M})$，其中 f 跑遍 S_+ 中满足 $f \notin \mathfrak{p}$ 的齐次元的集合；由于 $\Gamma(D_+(f), \widetilde{M}) = M_{(f)}$，故而命题缘自 $M_{(\mathfrak{p})}$ 的定义 (2.2.7)。

特别的，局部环 $(\mathscr{O}_X)_f p$ 与 $S_{(\mathfrak{p})}$ 无异，它是由这样一些 x/f 所组成的，其中 f 是 S_+ 中的齐次元，且不属于 $\mathfrak{p}$，x 是与 f 有相同次数的元素。

更特别的，若 S 是本质整的，从而 $X = \operatorname{Proj} S$ 是整的 (2.4.4)，于是若 $\xi = (0)$ 是 X 的一般点，则有理函数域 $\mathrm{R}(X) = \mathscr{O}_\xi$ 是由这样一些 fg^{-1} 所组成的集合，其中 f, g 是 S_+ 中的同次元，并且 $g \neq 0$。

命题 (2.5.6) — 若对任意 $z \in M$ 和 S_+ 中的任意齐次元 f，均可找到 f 的一个方幂，它可以零化 z，则有 $\widetilde{M} = 0$。如果 S 作为 S_0 代数可由它的 1 次齐次元的集合 S_1 所生成，则上述条件也是必要的。

事实上，条件 $\widetilde{M} = 0$ 等价于对 S_+ 中的任意齐次元 f 均有 $M_{(f)} = 0$。另一方面，若 $f \in S_d$，则说 $M_{(f)} = 0$ 即意味着对任意次数是 d 的倍数的齐次元 $z \in M$，均可找到一个方幂 f^n，使得 $f^n z = 0$。从而若对任意 $f \in S_1$ 都有 $M_{(f)} = 0$，则上述条件对所有 $f \in S_1$ 都得到满足，当然也对 S_+ 中的所有齐次元都是满足的，只要 S_1 可以生成 S，因为此时 S_+ 中的任何齐次元都是 S_1 中元素的乘积的线性组合。

命题 (2.5.7) — 设 d 是一个 > 0 的整数，$f \in S_d$。则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$(\mathscr{O}_X|_{D_+(f)})$ 模层 $(S(nd))^{\sim}|_{D_+(f)}$ 都典范同构于 $\mathscr{O}_X|_{D_+(f)}$。

事实上，乘以 S_f 中的可逆元 $(f/1)^n$ 的映射是一个从 $S_{(f)} = (S_f)_0$ 到 $(S_f)_{nd} = (S_f(nd))_0 = (S(nd)_f)_0 = S(nd)_{(f)}$ 的一一映射；换句话说，$S_{(f)}$ 模 $S_{(f)}$ 与 $S(nd)_{(f)}$ 是典范同构的，故得命题。

推论 (2.5.8) — $\mathscr{O}_X$ 模层 $(S(nd))^{\sim}$ 在开集 $U = \bigcup_{f \in S_d} D_+(f)$ 上的限制是一个可逆 $(\mathscr{O}_X|_U)$ 模层 $(\mathbf{0}, 5.4.1)$。

推论 (2.5.9) — 若 S 的理想 S_+ 是由 1 次齐次元的集合 S_1 所生成的，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathscr{O}_X$ 模层 $(S(n))^{\sim}$ 都是可逆的。

依照前提条件和 (2.3.14)，$X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$，只需再把 (2.5.8) 应用到 $U = X$ 上即可。

(2.5.10) 在本节随后的内容中，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们令

(2.5.10.1)
$$\mathscr{O}_X(n) \ = \ (S(n))^{\sim} \quad ,$$

并且对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和任意开集 $U \subset X$ 以及任意 $(\mathscr{O}_X|_U)$ 模层 $\mathscr{F}$，我们令

(2.5.10.2)
$$\mathscr{F}(n) \ = \ \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X|_U} (\mathscr{O}_X(n)|_U) \quad 。$$

若理想 S_+ 是由 S_1 生成的，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，函子 $\mathscr{F}(n)$（关于 $\mathscr{F}$）都是正合的，因为 $\mathscr{O}_X(n)$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

(2.5.11) 设 M, N 是两个分次 S 模。则对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，都可以定义一个函子性的典范 $S_{(f)}$ 模同态

(2.5.11.1)
$$\lambda_f \ : \ M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \ \longrightarrow \ (M \otimes_S N)_{(f)} \ ,$$

即把同态 $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \to M_f \otimes_{S_f} N_f$（由含入 $M_{(f)} \to M_f$，$N_{(f)} \to N_f$，$S_{(f)} \to S_f$ 所导出）与典范同构 $M_f \otimes_{S_f} N_f \to (M \otimes_S N)_f$ $(\mathbf{0}, 1.3.4)$ 进行合成，注意到根据两个分次模的张量积的定义，第二个同构是保持次数的；从而对于 $x \in M_{md}$，$y \in N_{nd}$，我们有

$$\lambda_f((x/f^m) \otimes (y/f^n)) \ = \ (x \otimes y)/f^{m+n} \quad 。$$

由上述定义立知，若 $g \in S_e$ $(e > 0)$，则图表

$$\begin{array}{ccc} M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} & \xrightarrow{\lambda_f} & (M \otimes_S N)_{(f)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(fg)} \otimes_{S_{(fg)}} N_{(fg)} & \xrightarrow[\lambda_{fg}]{} & (M \otimes_S N)_{(fg)} \end{array}$$

（其中右边的竖直箭头是典范同态，左边的则来自典范同态）是交换的。从而由诸 λ_f 可以导出一个函子性的典范 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(2.5.11.2)
$$\lambda \ : \ \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{N} \ \longrightarrow \ (M \otimes_S N)^{\sim} \quad 。$$

特别的，考虑 S 的两个分次理想 $\mathfrak{J}, \mathfrak{K}$；则由于 $\widetilde{\mathfrak{J}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 都是 $\mathscr{O}_X$ 的理想层，故有一个典范同态 $\widetilde{\mathfrak{J}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{\mathfrak{K}} \to \mathscr{O}_X$；此时图表

(2.5.11.3)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{J}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{\mathfrak{K}} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr] & & (\mathfrak{J} \otimes_S \mathfrak{K})^{\sim} \arrow[dl] \\ & \mathscr{O}_X & \end{tikzcd}$$

是交换的。事实上，问题可以归结到每个开集 $D_+(f)$（f 是 S_+ 中的齐次元）上，从而可由 λ_f 的定义 (2.5.11.1) 及 (**I**, 1.3.13) 立得。

最后注意到若 M, N, P 是三个分次 S 模，则图表

(2.5.11.4)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{N} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{P} \arrow[r, "\lambda\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\lambda"'] & (M \otimes_S N)^{\sim} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{P} \arrow[d, "\lambda"] \\ \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} (N \otimes_S P)^{\sim} \arrow[r, "\lambda"'] & (M \otimes_S N \otimes_S P)^{\sim} \end{tikzcd}$$

是交换的。仍然只需在每个 $D_+(f)$ 上进行验证，此时可由定义和 (**I**, 1.3.13) 立得。

(2.5.12) 在 (2.5.11) 的前提条件下，我们可以定义一个函子性的典范 $S_{(f)}$ 模同态

(2.5.12.1)
$$\mu_f \ : \ (\mathrm{Hom}_S(M, N))_{(f)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_{(f)}}(M_{(f)}, N_{(f)}) \ ,$$

即把 u/f^n（u 是一个次数为 nd 的同态）对应到这样一个同态 $M_{(f)} \to N_{(f)}$：它把 x/f^m $(x \in M_{md})$ 映到 $u(x)/f^{m+n}$。于是对于 $g \in S_e$ $(e > 0)$，我们也有一个交换图表

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Hom}_S(M, N))_{(f)} \arrow[r, "\mu_f"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S_{(f)}}(M_{(f)}, N_{(f)}) \arrow[d] \\ (\mathrm{Hom}_S(M, N))_{(fg)} \arrow[r, "\mu_{fg}"'] & \mathrm{Hom}_{S_{(fg)}}(M_{(fg)}, N_{(fg)}) \end{tikzcd}$$

（左边的竖直箭头是典范同态，右边的则来自典范同态）。由此也可以（有见于 (**I**, 1.3.8)）由诸 μ_f 定义出一个函子性的典范 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(2.5.12.2)
$$\mu \ : \ (\mathrm{Hom}_S(M, N))^{\sim} \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \ .$$

命题 (2.5.13) — 假设理想 S_+ 是由 S_1 所生成的。则同态 λ (2.5.11.2) 是一个同构；如果分次 S 模 M 是有限呈示的 (2.1.1)，则同态 μ 也是同构。

由于 X 是诸 $D_+(f)$ $(f \in S_1)$ 的并集 (2.3.14)，故而在上述条件下，问题归结为证明当 f 是次数为 1 的齐次元时，λ_f 和 μ_f 都是同构。此时我们可以定义一个 $\mathbb{Z}$ 双线性

映射 $M_m\times N_n\to M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$，即把 (x,y) 对应到元素 $(x/f^m)\otimes(y/f^n)$（若 $m<0$，则 x/f^m 是指 $f^{-m}x/1$）。这些映射定义了一个 $\mathbb{Z}$ 线性映射 $M\otimes_{\mathbb{Z}}N\to M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$，若 $f\in S_g$，则这个映射把 $(sx)\otimes y$ 映到 $(s/f^q)((x/f^m)\otimes(y/f^n))$（对于 $x\in M_m$，$y\in N_n$）。从而由此可以导出一个相对于典范同态 $S\to S_{(f)}$ 的双重模同态 $\gamma_f: M\otimes_S N\to M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$（把 $s\in S_q$ 映到 s/f^q）。进而假设对于元素 $\sum\limits_i(x_i\otimes y_i)$（$x_i$，$y_i$ 分别是次数为 m,n 的齐次元），我们有 $f^r\sum\limits_i(x_i\otimes y_i)=0$，换句话说 $\sum\limits_i(f^rx_i\otimes y_i)=0$。依照 (**0**, 1.3.4)，由此可以推出 $\sum\limits_i(f^rx_i/f^{m_i+r})\otimes(y_i/f^{n_i})=0$，也就是说 $\gamma_f\big(\sum\limits_i(x_i\otimes y_i)\big)=0$。从而 γ_f 可以分解为 $M\otimes_S N\to(M\otimes_S N)_f\xrightarrow{\gamma'_f}M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$；若 λ'_f 是 γ' 在 $(M\otimes_S N)_{(f)}$ 上的限制，则易见 λ_f 和 λ'_f 是互逆的 $S_{(f)}$ 同态，故得命题的第一部分。

为了证明第二部分，假设 M 是一个分次 S 同态 $P\to Q$ 的余核，其中 P 和 Q 都是有限个形如 $S(n)$ 的模的直和；利用 $\mathrm{Hom}_S(L,N)$ 对于 L 的左正合性以及 $M_{(f)}$ 对于 M 的正合性，问题立即归结为证明当 $M=S(n)$ 时 μ_f 是一个同构。然则，对于 N 中的任意齐次元 z，设 u_z 是 $S(n)$ 到 N 的这样一个同态，它满足 $u_z(1)=z$；则易见 $\eta: z\to u_z$ 是 $N(-n)$ 到 $\mathrm{Hom}_S(S(n),N)$ 上的一个同构，且次数为 0。它又给出一个同构

$$\eta_f\ :\ (N(-n))_{(f)}\longrightarrow(\mathrm{Hom}_S(S(n),N))_{(f)}\quad。$$

另一方面，设 η'_f 是这样一个同构 $N_{(f)}\to\mathrm{Hom}_{S_{(f)}}(S(n)_{(f)},N_{(f)})$，它把 $z'\in N_{(f)}$ 对应到下面这个同态 $v_{z'}: s/f^k\mapsto sz'/f^{n+k}$（对于 $s\in S_{n+k}=(S(n))_k$）。易见合成映射

$$(N(-n))_{(f)}\xrightarrow{\eta_f}(\mathrm{Hom}_S(S(n),N))_{(f)}\xrightarrow{\mu_f}\mathrm{Hom}_{S_{(f)}}(S(n)_{(f)},N_{(f)})\xrightarrow{\eta_f'^{-1}}N_{(f)}$$

就是 $(N(-n))_{(f)}$ 到 $N_{(f)}$ 上的同构 $z/f^h\mapsto z/f^{h-n}$，从而 μ_f 是一个同构。

若理想 S_+ 是由 S_1 所生成的，则由 (2.5.13) 可以推出，对于 S 的任意理想 $\mathfrak{J}$ 和任意分次 S 模 M，均有

(2.5.13.1) $$\widetilde{\mathfrak{J}}.\widetilde{M}=\mathfrak{J}.M^{\sim}\quad,$$

只差一个典范同构；事实上，这是缘自图表

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{J}}\otimes_{\mathscr{O}_X}\widetilde{M} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr] & & (\mathfrak{J}\otimes_S M)^{\sim} \arrow[dl] \\
& \widetilde{M} &
\end{tikzcd}$$

的交换性，它的验证可以参照 (2.5.11.3) 的方法。

推论 (2.5.14) — 假设 S 是由 S_1 所生成的。则对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$，均有:

(2.5.14.1) $$\mathscr{O}_X(m) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n) \;=\; \mathscr{O}_X(m+n) \ ,$$

(2.5.14.2) $$\mathscr{O}_X(n) \;=\; (\mathscr{O}_X(1))^{\otimes n} \ ,$$

只差一个典范同构。

第一个公式缘自 (2.5.13) 和 0 次典范同构 $S(m) \otimes_S S(n) \xrightarrow{\sim} S(m+n)$ 的存在性，后面这个同构把 $1 \otimes 1$（第一个 1 属于 $(S(m))_{-m}$，第二个 1 属于 $(S(n))_{-n}$）对应到元素 $1 \in (S(m+n))_{-(m+n)}$。接下来只需对 $n = -1$ 证明第二个公式即可，依照 (2.5.13)，这又归结为证明 $\mathrm{Hom}_S(S(1), S)$ 典范同构于 $S(-1)$，而这可由定义 (2.1.2) 以及 $S(1)$ 是一个单苇 S 模的事实直接验证。

推论 (2.5.15) — 假设 S 是由 S_1 所生成的。则对任意分次 S 模 M 和任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有

(2.5.15.1) $$(M(n))^{\sim} \;=\; \widetilde{M}(n) \ ,$$

只差一个典范同构。

这是缘自定义 (2.5.10.2), (2.5.10.1) 和命题 (2.5.13) 以及 0 次典范同构 $M(n) \xrightarrow{\sim} M \otimes_S S(n)$ 的存在性，后面这个同构把元素 $z \in (M(n))_h = M_{n+h}$ 对应到元素 $z \otimes 1 \in M_{n+h} \otimes (S(n))_{-n} \subset (M \otimes_S S(n))_h$。

(2.5.16) 我们用 S' 来记这样一个分次环：$S'_0 = \mathbb{Z}$, $S'_n = S_n$ $(n > 0)$。于是若 $f \in S_d$ $(d > 0)$，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $(S(n))_{(f)} = (S'(n))_{(f)}$，因为 $(S'(n))_{(f)}$ 中的元素都具有 x/f^k 的形状，其中 $x \in S'_{n+kd}$ $(k > 0)$，并且总可以取一个 k 满足 $n + kd \neq 0$。由于 $X = \mathrm{Proj}\, S$ 和 $X' = \mathrm{Proj}\, S'$ 可以典范等同 (2.4.7, (ii))，故知对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathscr{O}_X(n)$ 和 $\mathscr{O}_{X'}(n)$ 在上述等同下也都是互相等同的。

另一方面，注意到对任意 $d > 0$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有

$$(S^{(d)})_h \;=\; S_{(n+h)d} \;=\; (S(nd))_{hd} \ ,$$

从而对任意 $f \in S_d$，均有 $(S^{(d)})_{(f)} = (S(nd))_{(f)}$。我们知道分离概形 $X = \mathrm{Proj}\, S$ 和 $X^{(d)} = \mathrm{Proj}\ S^{(d)}$ 可以典范等同 (2.4.7，(i))；故知上面所述也表明，若 S_0 代数 $S^{(d)}$ 是由 S_d 所生成的，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathscr{O}_X(nd)$ 和 $\mathscr{O}_{X^{(d)}}(n)$ 在上述等同下也都是互相等同的。

命题 (2.5.17) — 设 d 是一个 > 0 的整数，并设 $U = \bigcup_{f \in S_d} D_+(f)$。则对任意整数 n，典范同态 $\mathscr{O}_X(nd) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(-nd) \to \mathscr{O}_X$ 在 U 上的限制都是一个同构。

依照 (2.5.16)，可以限于考虑 $d=1$ 的情形，此时由 (2.5.13) 的证明方法就可以推出结论。

2.6　Proj S 上的一个层的附随分次 S 模

在这一小节中，我们总假设 S 是由 1 次齐次元的集合 S_1 所生成的。

(2.6.1) 现在 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X(1)$ 是可逆的 (2.5.9)；有见于 (2.5.14.2)，对任意 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，我们令 (**0**, 5.4.6)

(2.6.1.1)
$$\Gamma_*(\mathscr{F}) \;=\; \Gamma_*(\mathscr{O}_X(1),\mathscr{F}) \;=\; \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X,\mathscr{F}(n)) \quad 。$$

还记得 (**0**, 5.4.6) $\Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 上有一个分次环的结构，$\Gamma_*(\mathscr{F})$ 上则有一个 $\Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 上的分次模的结构。

因为 $\mathscr{O}_X(n)$ 是局部自由的，所以 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个左正合的加性协变函子；特别的，若 $\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的一个理想层，则 $\Gamma_*(\mathscr{J})$ 可以典范等同于 $\Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 的一个分次理想。

(2.6.2) 设 M 是一个分次 S 模；则对任意 $f\in S_d$ $(d>0)$，$x\mapsto x/1$ 都是一个 Abel 群同态 $M_0\to M_{(f)}$，且由于 $M_{(f)}$ 可以典范等同于 $\Gamma(D_+(f),\widetilde{M})$，故我们得到一个 Abel 群同态 $\alpha_0^f : M_0\to\Gamma(D_+(f),\widetilde{M})$。易见对任意 $g\in S_e$ $(e>0)$，图表

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(D_+(f),\widetilde{M}) \arrow[dd] \\ M_0 \arrow[ur, "\alpha_0^f"] \arrow[dr, "\alpha_0^{fg}"'] & \\ & \Gamma(D_+(fg),\widetilde{M}) \end{tikzcd}$$

都是交换的；这就意味着对任意 $x\in M_0$，$\widetilde{M}$ 的两个截面 $\alpha_0^f(x)$ 和 $\alpha_0^g(x)$ 在 $D_+(f)\cap D_+(g)$ 上都是重合的，从而存在唯一一个截面 $\alpha_0(x)\in\Gamma(X,\widetilde{M})$ 使得它在每个 $D_+(f)$ 上的限制恰好是 $\alpha_0^f(x)$。于是我们定义出一个 Abel 群同态 (没有用到 S 由 S_1 生成的这个条件)

(2.6.2.1)
$$\alpha_0 \;:\; M_0 \longrightarrow \Gamma(X,\widetilde{M}) \quad 。$$

把这个结果应用到分次 S 模 $M(n)$ (对任意 $n\in\mathbb{Z}$) 上，就可以对每个 $n\in\mathbb{Z}$ 都得到一个 Abel 群同态

(2.6.2.2)
$$\alpha_n \;:\; M_n \;=\; (M(n))_0 \longrightarrow \Gamma(X,\widetilde{M}(n))$$

(有见于 (2.5.15))；从而得到一个函子性的分次 Abel 群同态 (次数为 0)

(2.6.2.3) $$\alpha \ : \ M \longrightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})$$

(也记作 α_M)，它在每个 M_n 上的限制正好与 α_n 重合。

特别的，若取 $M = S$，则易见 (有见于 $\Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 上的乘法的定义 (**0**, 5.4.6)) $\alpha : S \to \Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 是一个分次环同态，并且对任意分次 S 模 M，(2.6.2.3) 都是一个分次模的双重同态。

命题 (2.6.3) — 对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，$D_+(f)$ 都等于由那些使 $\mathscr{O}_X(d)$ 的截面 $\alpha_d(f)$ 不归零 (**0**, 5.5.2) 的点 $\mathfrak{p} \in X$ 所组成的集合。

根据前提条件 $X = \bigcup_{g \in S_1} D_+(g)$，故只需证明对任意 $g \in S_1$，使 $\alpha_d(f)$ 不归零的那些 $\mathfrak{p} \in D_+(g)$ 的集合都等于 $D_+(fg)$。然则，根据定义，$\alpha_d(f)$ 在 $D_+(g)$ 上的限制就是那个与 $(S(d))_{(g)}$ 中的元素 $f/1$ 相对应的截面；通过典范同构 $(S(d))_{(g)} \xrightarrow{\sim} S_{(g)}$ (2.5.7)，$\mathscr{O}_X(d)$ 在 $D_+(g)$ 上的这个截面又可以等同于 $\mathscr{O}_X$ 在 $D_+(g)$ 上的那个与 $S_{(g)}$ 中的元素 f/g^d 相对应的截面；说这个截面在 $\mathfrak{p} \in D_+(g)$ 处归零即意味着 $f/g^d \in \mathfrak{q}$，其中 $\mathfrak{q}$ 是 $S_{(g)}$ 的对应于 $\mathfrak{p}$ 的素理想 (2.3.6)；根据定义，这也相当于说 $f \in \mathfrak{p}$，故得命题。

(2.6.4) 现在设 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模层，并且令 $M = \Gamma_*(\mathscr{F})$；由于存在分次环的同态 $\alpha : S \to \Gamma_*(\mathscr{O}_X)$，我们也可以把 M 看作是一个分次 S 模。对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，由 (2.6.3) 知，$\mathscr{O}_X(d)$ 的截面 $\alpha_d(f)$ 在 $D_+(f)$ 上的限制是可逆的；从而对任意 $n > 0$，$\mathscr{O}_X(nd)$ 的截面 $\alpha_d(f^n)$ 在 $D_+(f)$ 上的限制也是可逆的。现在设 $z \in M_{nd} = \Gamma(X, \mathscr{F}(nd))$ $(n > 0)$；若有一个整数 $k \geqslant 0$ 使得 $f^k z$ 在 $D_+(f)$ 上的限制 (也就是说 $\mathscr{F}((n+k)d)$ 的截面 $(z|_{D_+(f)})(\alpha_d(f^k)|_{D_+(f)})$) 化为零，则由上述注解可知，我们也有 $z|_{D_+(f)} = 0$。这就表明，我们可以定义一个 $S_{(f)}$ 同态 $\beta_f \ : \ M_{(f)} \ \to \ \Gamma(D_+(f), \mathscr{F})$，即把元素 z/f^n 对应到 $\mathscr{F}$ 在 $D_+(f)$ 上的截面 $(z|_{D_+(f)})(\alpha_d(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}$。进而容易验证，对于 $g \in S_e$ $(e > 0)$，图表

(2.6.4.1)
$$\begin{tikzcd} M_{(f)} \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & \Gamma(D_+(f), \mathscr{F}) \arrow[d] \\ M_{(fg)} \arrow[r, "\beta_{fg}"'] & \Gamma(D_+(fg), \mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

是交换的。还记得 $M_{(f)}$ 可以典范等同于 $\Gamma(D_+(f), \widetilde{M})$，并且诸 $D_+(f)$ 构成 X 的一个拓扑基 (2.3.4)，故我们看到，这些 β_f 都来自唯一一个典范 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(2.6.4.2) $$\beta \ : \ (\Gamma_*(\mathscr{F}))^\sim \ \longrightarrow \ \mathscr{F}$$

(也记作 $\beta_{\mathscr{F}}$)，它显然是函子性的。

命题 (2.6.5) — 设 M 是一个分次 S 模，$\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模层；则合成同态

(2.6.5.1) $$\widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} (\Gamma_*(\widetilde{M}))^{\sim} \xrightarrow{\beta} \widetilde{M} ,$$

(2.6.5.2) $$\Gamma_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_*((\Gamma_*(\mathscr{F}))^{\sim}) \xrightarrow{\Gamma_*(\beta)} \Gamma_*(\mathscr{F})$$

都是恒同同构。

(2.6.5.1) 的验证是局部性的：在开集 $D_+(f)$ 上，这可由定义以及 (在拟凝聚层上) β 是由它在 $D_+(f)$ 的截面上的作用所唯一确定的 (**I**, 1.3.8) 这个事实立得。(2.6.5.2) 的验证可以对每个次数分别进行：若令 $M = \Gamma_*(\mathscr{F})$，则有 $M_n = \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ 和 $(\Gamma_*(\widetilde{M}))_n = \Gamma(X, \widetilde{M}(n)) = \Gamma(X, (M(n))^{\sim})$。现在，若 $f \in S_1$ 且 $z \in M_n$，则 $\alpha_n^f(z)$ 是 $(M(n))_{(f)}$ 中的元素 $z/1$，并且等于 $(f/1)^n(z/f^n)$；它通过 β 又对应到 $D_+(f)$ 上的截面

$$\big((\alpha_1(f))^n|_{D_+(f)}\big)\Big(\big(z|_{D_+(f)}\big)\big((\alpha_1(f))^n|_{D_+(f)}\big)^{-1}\Big) ,$$

也就是说，这是 z 在 $D_+(f)$ 上的限制，这就证明了 (2.6.5.2)。

2.7 有限性条件

命题 (2.7.1) — (i) *若 S 是一个 Noether 分次环，则 $X = \operatorname{Proj} S$ 是 Noether 分离概形。*

(ii) *若 S 是一个有限型分次 A 代数，则 $X = \operatorname{Proj} S$ 是一个在 $Y = \operatorname{Spec} A$ 上有限型的分离概形。*

(i) 若 S 是 Noether 的，则理想 S_+ 可以由一组有限个齐次元 f_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ 所生成，从而 (2.3.14) X 的底空间是这些 $D_+(f_i) = \operatorname{Spec} S_{(f_i)}$ 的并集，问题归结为证明每个 $S_{(f_i)}$ 都是 Noether 的，这是缘自 (2.2.6)。

(ii) 前提条件表明，S_0 是有限型 A 代数，且 S 是有限型 S_0 代数，从而 S_+ 是一个有限型理想 (2.1.4)。和 (i) 同样，问题归结为证明对任意 $f \in S_d$，$S_{(f)}$ 都是有限型 A 代数。依照 (2.2.5)，只需证明 $S^{(d)}$ 是有限型 A 代数即可，这缘自 (2.1.6)。

(2.7.2) 以下我们要考虑分次 S 模 M 上的一些有限性条件：

(TF) *存在一个整数 n，使得子模 $\bigoplus_{k \geqslant n} M_k$ 是一个有限型 S 模。*

(TN) *存在一个整数 n，使得当 $k \geqslant n$ 时总有 $M_k = 0$。*

若 M 满足 (TN) 条件，则对 S_+ 中的任意齐次元 f，均有 $M_{(f)} = 0$，从而 $\widetilde{M} = 0$。

设 M, N 是两个分次 S 模；所谓一个次数为 0 的同态 $u : M \to N$ 是 (TN) 单 (相应的，(TN) 满，(TN) 一一) 的，是指存在一个整数 n，使得当 $k \geqslant n$ 时 $u_k : M_k \to$

N_k 都是单 (相应的，满，一一) 的。从而说 u 是 (TN) 单 (相应的，(TN) 满) 的相当于说 $\operatorname{Ker} u$ (相应的，$\operatorname{Coker} u$) 满足 (TN) 条件。依照 (2.5.4)，若 u 是 (TN) 单 (相应的，(TN) 满，(TN) 一一) 的，则 $\widetilde{u}$ 是单 (相应的，满，一一) 的；如果 u 是 (TN) 一一的，则我们也称 u 是一个 (TN) 同构。

命题 (2.7.3) — *设 S 是一个分次环，且理想 S_+ 是有限型的，又设 M 是一个分次 S 模。*

(i) *若 M 满足 (TF) 条件，则 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\widetilde{M}$ 是有限型的。*

(ii) *假设 M 满足 (TF) 条件；则为了使 $\widetilde{M} = 0$，必须且只需 M 满足 (TN) 条件。*

我们已经看到 (TN) 条件蕴涵 $\widetilde{M} = 0$。若 M 满足 (TF) 条件，则根据前提条件，分次子模 $M' = \bigoplus_{k \geqslant n} M_k$ 是有限型的，并且 M/M' 满足 (TN) 条件；因而我们有 $(M/M')^{\sim} = 0$，并且函子 $\widetilde{M}$ 的正合性 (2.5.4) 就说明了 $\widetilde{M} = \widetilde{M'}$；从而为了证明 $\widetilde{M}$ 是有限型的，可以限于考虑 M 是有限型的这个情形。由于问题是局部性的，故只需证明 $M_{(f)}$ 是一个有限型 $S_{(f)}$ 模 (**I**, 1.3.9)；然而 $M^{(d)}$ 是一个有限型 $S^{(d)}$ 模 (2.1.6, (iii))，从而我们的陈言缘自 (2.2.5)。

现在假设 M 满足 (TF) 条件，并且 $\widetilde{M} = 0$；则在上面的记号下，我们有 $\widetilde{M'} = 0$，且针对 M 的 (TN) 条件等价于针对 M' 的 (TN) 条件，从而为了证明 $\widetilde{M} = 0$ 蕴涵 M 满足 (TN) 条件，可以限于考虑 M 具有一组有限个齐次生成元 x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ 的情形；另一方面，设 $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ 是理想 S_+ 的一组齐次生成元。根据前提条件，对任意 j，均有 $M_{(f_j)} = 0$，从而可以找到一个整数 n，使得对任何 i, j 均有 $f_j^n x_i = 0$。设 f_j 的次数是 n_j，并设 m 是数值 $\sum_j r_j n_j$ 中的最大者，其中 (r_j) 是任意一组满足 $\sum_j r_j \leqslant nq$ 的整数，只有有限种选择；易见当 $k > m$ 时，对任意 i，均有 $S_k x_i = 0$；若 h 是诸 x_i 的次数中的最大者，则当 $k > h + m$ 时，总有 $M_k = 0$，这就完成了证明。

推论 (2.7.4) — *设 S 是一个正分次环，且理想 S_+ 是有限型的；则为了使 $X = \operatorname{Proj} S = \varnothing$，必须且只需存在一个整数 n，使得当 $k \geqslant n$ 时总有 $S_k = 0$。*

事实上，条件 $X = \varnothing$ 等价于 $\mathscr{O}_X = \widetilde{S} = 0$，并且 S 是一个单苇 S 模。

定理 (2.7.5) — *假设理想 S_+ 是由有限个次数为 1 的齐次元所生成的；设 $X = \operatorname{Proj} S$。则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，典范同态 $\beta : (\Gamma_*(\mathscr{F}))^{\sim} \to \mathscr{F}$ (2.6.4 都是同构。*

事实上，若 S_+ 是由有限个元素 $f_i \in S_1$ 所生成的，则 X 是它的有限个拟紧子空间 $\operatorname{Spec} S_{(f_i)}$ 的并集 (2.3.6)，从而也是拟紧的；进而，X 还是一个分离概形 (2.4.2)；根据 (**I**, 9.3.2), (2.5.14.2) 和 (2.6.3)，对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，均有一个典范同构 $(\Gamma_*(\mathscr{F}))_{(\alpha_d(f))} \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_+(f), \mathscr{F})$；此外根据定义，$(\Gamma_*(\mathscr{F}))_{(\alpha_d(f))}$ (这里把 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 看作是 $\Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 模) 与 $(\Gamma_*(\mathscr{F}))_{(f)}$ 无异 (这里把 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 看作是 S 模)；若把上述典范同

构的定义 ($\mathbf{I}$, 9.3.1) 写出来，则可以看出它与同态 β_f 是重合的，故得定理。

注解 (2.7.6) — 若我们假设分次环 S 是 *Noether* 的，再假设理想 S_+ 是由次数为 1 的齐次元的集合 S_1 所生成的，则 (2.7.5) 中的条件自动成立。

推论 (2.7.7) — 在 (2.7.5) 的前提条件下，任何拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层都同构于一个形如 $\widetilde{M}$ 的 $\mathscr{O}_X$ 模层，其中 M 是一个分次 S 模。

推论 (2.7.8) — 在 (2.7.5) 的前提条件下，每个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层都同构于一个形如 $\widetilde{N}$ 的 $\mathscr{O}_X$ 模层，其中 N 是一个有限型的分次 S 模。

可以假设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个分次 S 模 (2.7.7)。设 $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 M 的一组齐次生成元；对于 L 的每一个有限子集 H，设 M_H 是由诸 f_λ $(\lambda \in H)$ 在 M 中所生成的分次子模；易见 M 就是这些子模 M_H 的归纳极限，从而 $\mathscr{F}$ 是诸 $\mathscr{O}_X$ 子模层 $\widetilde{M_H}$ 的归纳极限 (2.5.4)。而由于 $\mathscr{F}$ 是有限型的，并且 X 的底空间是拟紧的，故由 ($\mathbf{0}$, 5.2.3) 知，对于 L 的某个有限子集 H，我们有 $\mathscr{F} = \widetilde{M_H}$ 。

推论 (2.7.9) — 在 (2.7.5) 的前提条件下，设 $\mathscr{F}$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层。则可以找到一个整数 n_0，使得对任意 $n \geqslant n_0$，$\mathscr{F}(n)$ 都同构于一个形如 $\mathscr{O}_X^k$ ($k > 0$ 依赖于 n) 的 $\mathscr{O}_X$ 模层的商模层，从而是由它在 X 上的有限个整体截面所生成的 ($\mathbf{0}$, 5.1.1)。

依照 (2.7.8)，可以假设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是有限个形如 $S(m_i)$ 的 S 模的直和的商模；从而依照 (2.5.4)，可以限于考虑 $M = S(m)$ 的情形，此时 $\mathscr{F}(n) = (S(m+n))^{\sim} = \mathscr{O}_X(m+n)$ (2.5.15)。从而只需证明

引理 (2.7.9.1) — 在 (2.7.5) 的前提条件下，对任意 $n \geqslant 0$，均可找到一个整数 k (依赖于 n) 和一个满同态 $\mathscr{O}_X^k \to \mathscr{O}_X(n)$ 。

事实上，只需证明 (2.7.2) 对于一个适当的整数 k，存在一个从分次 S 模的乘积 S^k 到 $S(n)$ 的 0 次 (TN) 满同态 u 。然则，我们有 $(S(n))_0 = S_n$，并且根据前提条件，对任意 $h > 0$，均有 $S_h = S_1^h$，从而 $SS_n = S_n + S_{n+1} + \dots$ 。由于 S_n 是一个有限型 S_0 模 (2.1.5 和 2.1.6, (i))，故可取出它的一个生成元组 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$；现在定义 u 就是这样一个同态，它把 S^k 的典范基底中的第 i 个元素映到 a_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 上；则由于 Coker u 可以等同于 $(S(n))_{-n} + \cdots + (S(n))_{-1}$，故知这个 u 就是是我们所要的。

推论 (2.7.10) — 在 (2.7.5) 的前提条件下，设 $\mathscr{F}$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层。则可以找到一个整数 n_0，使得对任意 $n \geqslant n_0$，$\mathscr{F}$ 都同构于一个形如 $(\mathscr{O}_X(-n))^k$ (k 依赖于 n) 的 $\mathscr{O}_X$ 模层的商模层。

命题 (2.7.11) — 假设 (2.7.5) 的前提条件得到满足，并设 M 的一个分次 S 模。则:

(i) 典范同态 $\widetilde{\alpha}:\widetilde{M}\to(\Gamma_*(\widetilde{M}))^{\sim}$ 是一个同构。

(ii) 设 $\mathscr{G}$ 是 $\widetilde{M}$ 的一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 子模层，并设 N 是 M 的这样一个分次 S 子模，它等于 $\Gamma_*(\mathscr{G})$ 在 α 下的逆像。则我们有 $\widetilde{N}=\mathscr{G}$（依照 (2.5.4)，$\widetilde{N}$ 可以等同于 $\widetilde{M}$ 的一个 $\mathscr{O}_X$ 子模层）。

依照 (2.7.5)，$\beta:(\Gamma_*(\widetilde{M}))^{\sim}\to\widetilde{M}$ 是一个同构，再依照 (2.6.5.1)，$\widetilde{\alpha}$ 就是它的逆同构，故得 (i)。设 P 是 $\Gamma_*(\widetilde{M})$ 的分次 S 子模 $\alpha(M)$；则由于 $\widetilde{M}$ 是一个正合函子 (2.5.4)，故知 $\widetilde{M}$ 在 $\widetilde{\alpha}$ 下的像就等于 $\widetilde{P}$，从而依照 (i)，$\widetilde{P}=(\Gamma_*(\widetilde{M}))^{\sim}$。令 $Q=\Gamma_*(\mathscr{G})\cap P$；依照上面所述和 (2.5.4)，我们有 $\widetilde{Q}=(\Gamma_*(\mathscr{G}))^{\sim}$，从而 β 在 $\widetilde{Q}$ 上的限制是该 $\mathscr{O}_X$ 模层到 $\mathscr{G}$ 上的一个同构 (2.7.5)。然而根据 N 的定义和 (2.5.4)，同构 $\widetilde{\alpha}$ 在 $\widetilde{N}$ 上的限制是一个从 $\widetilde{N}$ 到 $\widetilde{Q}$ 上的同构，故由 (2.6.5.1) 就可以推出结论。

2.8 函子行为

(2.8.1) 设 S,S' 是两个正分次环，$\varphi:S'\to S$ 是一个分次环同态。我们用 $G(\varphi)$ 来标记 $V_+(\varphi(S'_+))$ 在 $X=\operatorname{Proj}S$ 中的补集，它是一个开集，并且就是所有 $D_+(\varphi(f'))$ 的并集，其中 f' 跑遍 S'_+ 中的齐次元的集合。从而把 $\operatorname{Spec}S$ 到 $\operatorname{Spec}S'$ 的连续映射 ${}^a\varphi$ (**I**, 1.2.1) 限制到 $G(\varphi)$ 上就给出一个从 $G(\varphi)$ 到 $\operatorname{Proj}S'$ 的连续映射，适当混用一下记号，我们仍记之为 ${}^a\varphi$。若 $f'\in S_+$ 是一个齐次元，则有见于 ${}^a\varphi$ 把 $G(\varphi)$ 映到 $\operatorname{Proj}S'$ 中这个事实，以及 (**I**, 1.2.2.2)，我们有

(2.8.1.1)
$$ {}^a\varphi^{-1}(D_+(f')) = D_+(\varphi(f')) \ 。$$

另一方面，设 $f=\varphi(f')$，则同态 φ 典范地定义了一个分次环同态 $S'_{f'}\to S_f$（在同样的记号下），把它限制到零次元上就可以得到一个同态 $S'_{(f')}\to S_{(f)}$，我们记之为 $\varphi_{(f)}$；它又对应于 (**I**, 1.6.1) 仿射概形间的一个态射 $({}^a\varphi_{(f)},\widetilde{\varphi}_{(f)}):\operatorname{Spec}S_{(f)}\to\operatorname{Spec}S'_{(f')}$。若我们把 $\operatorname{Spec}S_{(f)}$ 典范等同于 $\operatorname{Proj}S$ 的开子概形 $D_+(f)$ (2.3.6)，则上面就定义了一个态射 $\Phi_f:D_+(f)\to D_+(f')$，并且 ${}^a\varphi_{(f)}$ 可以等同于 ${}^a\varphi$ 在 $D_+(f)$ 上的限制。另一方面，易见若 g' 是 S_+ 中的另一个齐次元，并且 $g=\varphi(g')$，则图表

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) & \xrightarrow{\Phi_f} & D_+(f') \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_+(fg) & \xrightarrow[\Phi_{fg}]{} & D_+(f'g') \end{array}$$

是交换的，这是源于下述图表的交换性

$$\begin{tikzcd} S'_{(f')} \arrow[r, "\varphi_{(f)}"] \arrow[d, "\omega_{f'g',f'}"'] & S_{(f)} \arrow[d, "\omega_{fg,f}"] \\ S'_{(f'g')} \arrow[r, "\varphi_{(fg)}"'] & S_{(fg)} \end{tikzcd},$$

有见于 $G(\varphi)$ 的定义和 (2.3.3.2)，我们就得到：

命题 (2.8.2) — 给了一个分次环同态 $\varphi : S' \to S$，则有唯一一个从开子概形 $G(\varphi)$ 到概形 $\operatorname{Proj} S'$ 的态射 $({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$（称为 φ 的附随态射，并记作 $\operatorname{Proj}(\varphi)$），使得对于 S'_+ 的任何齐次元 f'，该态射在 $D_+(\varphi(f'))$ 上的限制都与同态 $S'_{(f')} \to S_{(\varphi(f'))}$（来自 φ）所对应的态射是重合的。

注意到在同样的记号下，若 $f' \in S'_d$，则图表

(2.8.2.1)
$$\begin{tikzcd} S'_{(f')} \arrow[r, "\varphi_{(f)}"] \arrow[d, "\wr"'] & S_{(f)} \arrow[d, "\wr"'] \\ S'^{(d)}/(f'-1)S'^{(d)} \arrow[r] & S^{(d)}/(f-1)S^{(d)} \end{tikzcd}$$

是交换的（竖直箭头是指同构 (2.2.5)）。

推论 (2.8.3) — (i) 态射 $\operatorname{Proj}(\varphi)$ 是仿射的。

(ii) 若 $\operatorname{Ker}(\varphi)$ 是幂零的（特别的，若 φ 是单的），则态射 $\operatorname{Proj}(\varphi)$ 是一个笼罩。

(i) 可由 (2.8.2) 和 (2.8.1.1) 立得。另一方面，若 $\operatorname{Ker}(\varphi)$ 是幂零的，则易见对于 S_+ 的任意齐次元 f'，$\operatorname{Ker}(\varphi_f)$（令 $f = \varphi(f')$）都是幂零的，从而 $\operatorname{Ker}(\varphi_{(f)})$ 也是幂零的；于是由 (2.8.2) 和 (**I**, 1.2.7) 就可以推出结论。

注意到一般来说，从 $\operatorname{Proj} S$ 到 $\operatorname{Proj} S'$ 可以有不仿射的态射，从而并非来自于某个分次环同态 $S' \to S$；结构态射 $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Spec} A$ 就是一个例子，这里我们取 A 是一个域（$\operatorname{Spec} A$ 可以等同于 $\operatorname{Proj} A[T]$ (3.1.7)）；事实上，这可由 (**I**, 2.3.2) 推出。

(2.8.4) 设 S'' 是第三个正分次环，$\varphi' : S'' \to S'$ 是一个分次环同态，并且令 $\varphi'' = \varphi \circ \varphi'$。使用 (2.8.1.1) 中的方法和公式 ${}^a\varphi'' = ({}^a\varphi') \circ ({}^a\varphi)$ 容易验证 $G(\varphi'') \subset G(\varphi')$，并且若 Φ, Φ' 和 Φ'' 分别是 φ, φ' 和 φ'' 的附随态射，则有 $\Phi'' = \Phi' \circ (\Phi|_{G(\varphi'')})$。

(2.8.5) 假设 S（相应的，S'）是一个分次 A 代数（相应的，分次 A' 代数），并

设 $\psi : A' \to A$ 是一个环同态，且使得图表

(2.8.5.1)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ S' \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

是交换的。则可以分别把 $G(\varphi)$ 和 $\operatorname{Proj} S'$ 分别看作是 $\operatorname{Spec} A$ 和 $\operatorname{Spec} A'$ 上的分离概形；若 Φ 和 Ψ 分别是 φ 和 ψ 的附随态射，则图表

$$\begin{tikzcd} G(\varphi) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \operatorname{Proj} S' \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "\Psi"'] & \operatorname{Spec} A' \end{tikzcd}$$

是交换的，事实上，只需对 Φ 在 $D_+(f)$ 上的限制给出证明即可，这里 $f = \varphi(f')$，且 f' 在 S_+ 中是齐次的；从而这是缘自图表

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ S'_{(f')} \arrow[r, "\varphi_{(f)}"'] & S_{(f)} \end{tikzcd}$$

的交换性。

(2.8.6) 现在设 M 是一个分次 S 模，考虑 S' 模 $M_{[\varphi]}$，它显然是分次的。设 f' 是 S'_+ 中的一个齐次元，并设 $f = \varphi(f')$；我们知道 (**0**, 1.5.2)，存在一个典范同构 $(M_{[\varphi]})_{f'} \xrightarrow{\sim} (M_f)_{[\varphi_f]}$，并且易见该同构保持次数，从而有典范同构 $(M_{[\varphi]})_{(f')} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})_{[\varphi_{(f)}]}$。这个同构典范地对应于一个层同构 $(M_{[\varphi]})^\sim|_{D_+(f')} \xrightarrow{\sim} (\Phi_f)_*(\widetilde{M}|_{D_+(f)})$ (2.5.2 和 **I**, 1.6.3)。进而，若 g' 是 S_+ 中的另一个齐次元，并且 $g = \varphi(g')$，则图表

$$\begin{tikzcd} (M_{[\varphi]})_{(f')} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (M_{(f)})_{[\varphi_{(f)}]} \arrow[d] \\ (M_{[\varphi]})_{(f'g')} \arrow[r, "\sim"] & (M_{(fg)})_{[\varphi_{(fg)}]} \end{tikzcd}$$

是交换的，由此立知，同构

$$(M_{[\varphi]})^\sim|_{D_+(f'g')} \xrightarrow{\sim} (\Phi_{fg})_*(\widetilde{M}|_{D_+(fg)})$$

就是同构 $(M_{[\varphi]})^\sim|_{D_+(f')} \xrightarrow{\sim} (\Phi_f)_*(\widetilde{M}|_{D_+(f)})$ 在 $D_+(f'g')$ 上的限制。现在令 $X' = \operatorname{Proj} S'$，由于 Φ_f 是态射 Φ 在 $D_+(f)$ 上的限制，从而有见于 (2.8.1.1)，我们得到：

命题 (2.8.7) — 存在一个从 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $(M_{[\varphi]})^{\sim}$ 到 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\Phi_*(\widetilde{M}|_{G(\varphi)})$ 的函子性典范同构。

由此马上可以导出一个从 φ 态射 $M' \to M$（其中 M 是一个分次 S 模，M' 是一个分次 S' 模）的集合到 Φ 态射 $\widetilde{M}' \to \widetilde{M}|_{G(\varphi)}$ 的集合中的函子性典范映射。在 (2.8.4) 的记号下，若 M'' 是一个分次 S'' 模，则一个 φ 态射 $M' \to M$ 和一个 φ' 态射 $M'' \to M'$ 的合成就典范对应着 $\widetilde{M}'|_{G(\varphi')} \to \widetilde{M}|_{G(\varphi'')}$ 与 $\widetilde{M}'' \to \widetilde{M}'|_{G(\varphi')}$ 的合成。

命题 (2.8.8) — 在 (2.8.1) 的前提条件下，设 M' 是一个分次 S' 模。则有一个从 $(\mathscr{O}_X|_{G(\varphi)})$ 模层 $\Phi^*\widetilde{M}'$ 到 $(\mathscr{O}_X|_{G(\varphi)})$ 模层 $(M' \otimes_{S'} S)^{\sim}|_{G(\varphi)}$ 的函子性典范同态 ν。若理想 S'_+ 是由 S'_1 所生成的，则 ν 是一个同构。

事实上，对于 $f' \in S'_d$ $(d > 0)$，我们可以定义一个函子性的典范 $S_{(f)}$ 同态（令 $f = \varphi(f')$）

$$\nu_f \ : \ M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)} \ \longrightarrow \ (M' \otimes_{S'} S)_{(f)} \ ,$$

即把同态 $M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)} \to M'_{f'} \otimes_{S'_{f'}} S_f$ 与典范同构 $M'_{f'} \otimes_{S'_{f'}} S_f \xrightarrow{\sim} (M' \otimes_{S'} S)_f$ (**0**, 1.5.4) 进行合成，注意到后者是保持次数的。易见 ν_f 与 $D_+(f)$ 到 $D_+(fg)$ 的限制（对于另一个 $g' \in S'_+$ 和 $g = \varphi(g')$）是相容的，有见于 (**I**, 1.6.5)，这就定义了同态

$$\nu \ : \ \Phi^*\widetilde{M}' \ \longrightarrow \ (M' \otimes_{S'} S)^{\sim}|_{G(\varphi)} \ 。$$

为了证明第二个陈言，只需说明对任意 $f' \in S'_1$，ν_f 都是一个同构，因为此时 $G(\varphi)$ 就是诸 $D_+(\varphi(f'))$ 的并集。首先定义一个 $\mathbb{Z}$ 线性映射 $M'_m \times S_n \to M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)}$，即把 (x', s) 对应到元素 $(x'/f'^m) \otimes (s/f^n)$（当 $m < 0$ 时，我们约定 x'/f'^m 就是 $f'^{-m}x'/1$）。参照 (2.5.13) 的证明方法可知，上述映射给出了一个双重模同态

$$\eta_f \ : \ M' \otimes_{S'} S \ \longrightarrow \ M'_{(f')} \otimes_{S_{(f')}} S_{(f)} \ 。$$

进而，若对 $r > 0$，我们有 $f^r \sum_i (x'_i \otimes s_i) = 0$，也可以写成 $\sum_i (f'^r x'_i \otimes s_i) = 0$，则根据 (**0**, 1.5.4)，我们得到 $\sum_i (f'^r x_i / f'^{m_i + r}) \otimes (s_i / f^{n_i}) = 0$，也就是说 $\eta_f \big(\sum_i x_i \otimes y_i \big) = 0$，这就表明 η_f 可以分解为 $M' \otimes_{S'} S \to (M' \otimes_{S'} S)_f \xrightarrow{\eta'_f} M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)}$；最后，容易验证 η'_f 和 ν_f 是互逆的同构。

特别的，由 (2.1.2.1) 知，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有一个典范同态

(2.8.8.2) $$\Phi^*(\mathscr{O}_{X'}(n)) \ \xrightarrow{\sim} \ \mathscr{O}_X(n)|_{G(\varphi)} \ 。$$

(2.8.9) 设 A, A' 是两个环，$\psi : A' \to A$ 是一个环同态，则它定义了一个态射 $\Psi : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A'$。设 S' 是一个正分次 A' 代数，并且令 $S = S' \otimes_{A'} A$，诸 $S'_n \otimes_{A'} A$ 显然定义了 S 上的一个分次结构，使它成为一个分次 A 代数；映射 $\varphi : s' \mapsto s' \otimes 1$ 是

分次环同态，并使图表 (2.8.5.1) 交换。由于此时 S_+ 是由 $\varphi(S'_+)$ 所生成的 A 模，故有 $G(\varphi) = \operatorname{Proj} S = X$；于是若令 $X' = \operatorname{Proj} S'$, $Y = \operatorname{Spec} A$, $Y' = \operatorname{Spec} A'$，则我们得到一个交换图表

(2.8.9.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[\Psi]{} & Y' \end{array} \quad 。$$

现在设 M' 是一个分次 S' 模，并且令 $M = M' \otimes_{A'} A = M' \otimes_{S'} S$。在这些条件下：

命题 (2.8.10) — 图表 (2.8.9.1) 把分离概形 X 等同于纤维积 $X' \times_{Y'} Y$；进而，典范同态 $\nu : \Phi^* \widetilde{M'} \to \widetilde{M}$ (2.8.8) 是一个同构。

为了证明第一个陈言，只需证明对于 S'_+ 中的任意齐次元 f'，Φ 和 p 在 $D_+(f)$（其中 $f = \varphi(f')$）上的限制都可以把这个概形等同于纤维积 $D_+(f') \times_{Y'} Y$ (**I**, 3.2.6.2)；换句话说，只需 (**I**, 3.2.2) 证明 $S_{(f)}$ 可以典范等同于 $S'_{(f')} \otimes_{A'} A$，但这是显然的，因为存在着一个保持次数的典范同构 $S_f \xrightarrow{\sim} S'_{f'} \otimes_{A'} A$ (**0**, 1.5.4)。第二个陈言则缘自下面的事实：$M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)}$ 可以（根据上面所述）等同于 $M'_{(f')} \otimes_{A'} A$，后者又可以等同于 $M_{(f)}$，因为 M_f 到 $M'_{f'} \otimes_{A'} A$ 有一个保持次数的典范等同。

推论 (2.8.11) — 对任意整数 $n \in \mathbb{Z}$，$\widetilde{M}(n)$ 都可以等同于 $\Phi^*(\widetilde{M'}(n)) = \widetilde{M'}(n) \otimes_{Y'} \mathscr{O}_Y$；特别的，$\mathscr{O}_X(n) = \Phi^*(\mathscr{O}_{X'}(n)) = \mathscr{O}_{X'}(n) \otimes_{Y'} \mathscr{O}_Y$。

这缘自 (2.8.10) 和 (2.5.15)。

(2.8.12) 在 (2.8.9) 的前提条件下，对于 $f' \in S'_d$ $(d > 0)$ 和 $f = \varphi(f')$，图表

(2.8.12.1)
$$\begin{array}{ccc} M'_{(f')} & \xrightarrow{\sim} & M'^{(d)}/(f'-1)M'^{(d)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(f)} & \xrightarrow{\sim} & M^{(d)}/(f'-1)M^{(d)} \end{array}$$

（参考 (2.2.5)）是交换的。

(2.8.13) 沿用 (2.8.9) 中的记号和前提条件，并设 $\mathscr{F}'$ 是一个 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层；若令 $\mathscr{F} = \Phi^* \mathscr{F}'$，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $\mathscr{F}(n) = \Phi^*(\mathscr{F}'(n))$，这是依据 (2.8.11) 和 (**0**, 4.3.3)。因而 (**0**, 3.7.1) 我们有一个典范同态

$$\Gamma(\rho) \ : \ \Gamma(X', \mathscr{F}'(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}(n)) \quad 。$$

这就给出了一个分次模的典范双重同态

$$\Gamma_*(\mathscr{F}') \longrightarrow \Gamma_*(\mathscr{F}) \ 。$$

假设理想 S_+ 是由 S_1 所生成的，并设 $\mathscr{F}' = \widetilde{M'}$，从而 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 $M = M' \otimes_{A'} A$。若 f' 是 S'_+ 中的一个齐次元，并且 $f = \varphi(f')$，则由于 $M_{(f)} = M'_{(f')} \otimes_{A'} A$，从而图表

$$\begin{tikzcd}
M'_0 \arrow[r] \arrow[d] & M'_{(f')} = \Gamma(D_+(f'), \widetilde{M'}) \arrow[d] \\
M_0 \arrow[r] & M_{(f)} = \Gamma(D_+(f), \widetilde{M})
\end{tikzcd}$$

是交换的；由此以及同态 α 的定义 (2.6.2) 立知，图表

(2.8.13.1)
$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "\alpha_{M'}"] \arrow[d] & \Gamma(\widetilde{M'}) \arrow[d] \\
M \arrow[r, "\alpha_M"'] & \Gamma(\widetilde{M})
\end{tikzcd}$$

是交换的。同样的，图表

(2.8.13.2)
$$\begin{tikzcd}
(\Gamma_*(\mathscr{F}'))^\sim \arrow[r, "\beta_{\mathscr{F}'}"] \arrow[d] & \mathscr{F}' \arrow[d] \\
(\Gamma_*(\mathscr{F}))^\sim \arrow[r, "\beta_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

是交换的 (右边的竖直箭头是典范 Φ 态射

$$\mathscr{F}' \longrightarrow \Phi^*\mathscr{F}' = \mathscr{F} \ ) 。$$

(2.8.14) 仍然沿用 (2.8.9) 中的记号和前提条件，设 N' 是另一个分次 S' 模，并设 $N = N' \otimes_{A'} A$。则易见典范双重同态 $M' \to M$, $N' \to N$ 可以给出一个双重同态 $M' \otimes_{S'} N' \to M \otimes_S N$（相对于典范环同态 $S' \to S$），从而也给出一个 0 次的 S 同态 $(M' \otimes_{S'} N') \otimes_{A'} A \to M \otimes_S N$，它对应 (2.8.10) 着一个 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(2.8.14.1)
$$\Phi^*((M' \otimes_{S'} N')^\sim) \longrightarrow (M \otimes_S N)^\sim \ 。$$

进而，易见图表

(2.8.14.2)
$$\begin{tikzcd}
\Phi^*(\widetilde{M'}\otimes_{\mathscr{O}_{X'}}\widetilde{N'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Phi^*(\lambda)"'] & \widetilde{M'}\otimes_{\mathscr{O}_{X'}}\widetilde{N'} = (\Phi^*\widetilde{M'})\otimes_{\mathscr{O}_{X'}}(\Phi^*\widetilde{N'}) \arrow[d, "\lambda"] \\
\Phi^*((M'\otimes_{S'}N')^{\sim}) \arrow[r] & (M\otimes_S N)^{\sim}
\end{tikzcd}$$

是交换的，其中第一行是典范同构 (**0**, 4.3.3)。若理想 S'_+ 是由 S'_1 所生成的，则易见 S_+ 是由 S_1 生成的，此时 (2.8.14.2) 中的两个竖直箭头也都是同构 (2.5.13)；从而 (2.8.14.1) 也是如此。

我们还有一个典范双重同态 $\mathrm{Hom}_{S'}(M',N')\to\mathrm{Hom}_S(M,N)$，即把一个 k 次的同态 u' 对应到同态 $u'\otimes 1$，后者也是 k 次的；由此可以导出一个 0 次的 S 同态

$$(\mathrm{Hom}_{S'}(M',N'))\otimes_{A'}A\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(M,N)$$

和一个 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(2.8.14.3) $$\Phi^*((\mathrm{Hom}_{S'}(M',N'))^{\sim})\longrightarrow(\mathrm{Hom}_S(M,N))^{\sim}\quad。$$

进而，图表

$$\begin{tikzcd}
\Phi^*((\mathrm{Hom}_{S'}(M',N'))^{\sim}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^*(\mu)"'] & (\mathrm{Hom}_S(M,N))^{\sim} \arrow[d, "\mu"] \\
\Phi^*\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X'}}(\widetilde{M'},\widetilde{N'}) \arrow[r] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M},\widetilde{N})
\end{tikzcd}$$

是交换的 (第二行是典范同态 (**0**, 4.4.6))。

(2.8.15) 记号和前提条件与 (2.8.1) 相同，则由 (2.4.7) 知，把 S_0 和 S'_0 都换成 $\mathbb{Z}$ 并把 φ_0 换成恒同不会改变态射 Φ （在只差同构的意义下），把 S 和 S' 分别换成 $S^{(d)}$ 和 $S'^{(d)}$ $(d>0)$ 并把 φ 换成 φ 在 $S^{(d)}$ 上的限制 $\varphi^{(d)}$ 也是一样的。

2.9 概形 $\mathrm{Proj}\,S$ 的闭子概形

(2.9.1) 设 $\varphi:S\to S'$ 是一个分次环同态，所谓 φ 是 (TN) 满 (相应的，(TN) 单，(TN) 一一) 的，是指可以找到一个整数 n，使得当 $k\geqslant n$ 时，$\varphi_k:S_k\to S'_k$ 都是满 (相应的，单，一一) 的。于是由 (2.8.15) 知，对于 Φ 的考察可以归结到 φ 是满 (相应的，单，一一) 的这个情形。如果 φ 是 (TN) 一一的，则我们也称 φ 是一个 (TN) 同构。

命题 (2.9.2) — 设 S 是一个正分次环，并设 $X = \operatorname{Proj} S$。

(i) 若 $\varphi : S \to S'$ 是分次环的一个 (TN) 满同态，则对应的态射 Φ (2.8.1) 是定义在整个 $\operatorname{Proj} S'$ 上的，并且是一个从 $\operatorname{Proj} S'$ 到 X 的闭浸入。若 $\mathfrak{J}$ 是 φ 的核，则 Φ 在 X 中的附随闭子概形是由 $\mathscr{O}_X$ 的拟凝聚理想层 $\widetilde{\mathfrak{J}}$ 所定义的。

(ii) 进而假设理想 S_+ 是由有限个次数为 1 的齐次元所生成的。设 X' 是 X 的一个闭子概形，由 $\mathscr{O}_X$ 的某个拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$ 所定义。再设 $\mathfrak{J}$ 是 S 的这样一个分次理想，它等于 $\Gamma_*(\mathscr{J})$ 在典范同态 $\alpha : S \to \Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ 下的逆像 (2.6.2)，并且令 $S' = S/\mathfrak{J}$。则 X' 就是分次环的典范同态 $S \to S'$ 所对应的闭浸入 $\operatorname{Proj} S' \to X$ 的附随闭子概形。

(i) 可以假设 φ 是满的 (2.9.1)。根据前提条件，$\varphi(S_+)$ 可以生成 S'_+，故有 $G(\varphi) = \operatorname{Proj} S'$。另一方面，第二个陈言可以在 X 上局部地进行验证；设 f 是 S_+ 中的一个齐次元，并且令 $f' = \varphi(f)$。由于 φ 是分次环的满同态，故易见 $\varphi_{(f')} : S_{(f)} \to S'_{(f')}$ 是满的，并且它的核就是 $\mathfrak{J}_{(f)}$，这就完成了 (i) 的证明 (**I**, 4.2.3)。

(ii) 依照 (i) 所述，问题归结为证明由典范含入 $j : \mathfrak{J} \to S$ 所导出的同态 $\widetilde{j} : \widetilde{\mathfrak{J}} \to \mathscr{O}_X$ 是 $\widetilde{\mathfrak{J}}$ 到 $\mathscr{J}$ 上的一个同构，这缘自 (2.7.11)。

注意到 $\mathfrak{J}$ 是 S 中满足 $\widetilde{j}(\widetilde{\mathfrak{J}'}) = \mathscr{J}$ 的那些分次理想 $\mathfrak{J}'$ 中的最大元，因为由定义 (2.6.2) 易见，这个关系式蕴涵 $\alpha(\mathfrak{J}') \subset \Gamma_*(\mathscr{J})$。

推论 (2.9.3) — 假设 (2.9.2, (i)) 的前提条件得到满足，进而假设理想 S_+ 是由 S_1 所生成的；则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\Phi^*((S(n))^{\sim})$ 都典范同构于 $(S'(n))^{\sim}$，从而对任意 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，$\Phi^*(\mathscr{F}(n))$ 都典范同构于 $\Phi^*\mathscr{F}(n)$。

有见于 (2.5.10.2)，这是 (2.8.8) 的一个特殊情形。

推论 (2.9.4) — 假设 (2.9.2, (ii)) 的前提条件得到满足。则为了使 X 的闭子概形 X' 是整的，必须且只需分次理想 $\mathfrak{J}$ 在 S 中是素的。

由于 X' 同构于 $\operatorname{Proj}(S/\mathfrak{J})$，从而条件的充分性是依据 (2.4.4)。为了证明它也是必要的，考虑正合序列 $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{J}$，它给出了一个正合序列

$$0 \longrightarrow \Gamma_*(\mathscr{J}) \longrightarrow \Gamma_*(\mathscr{O}_X) \longrightarrow \Gamma_*(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}) \ 。$$

只需证明若 $f \in S_m$，$g \in S_n$ 使得 $\alpha_{m+n}(fg)$ 在 $\Gamma_*(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$ 中的像等于 0，则 $\alpha_m(f)$ 和 $\alpha_n(g)$ 的像之一等于 0。然则，根据定义，这两个像分别是整概形 X' 上的可逆 $(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$ 模层 $\mathscr{L} = (\mathscr{O}_X/\mathscr{J})(m)$ 和 $\mathscr{L}' = (\mathscr{O}_X/\mathscr{J})(n)$ 的截面；前提条件表明，这两个截面的乘积在 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$ 中是 0 ((2.9.3) 和 (2.5.14.1))，从而依照 (**I**, 7.4.4)，它们中的一个等于 0。

推论 (2.9.5) — 设 A 是一个环，M 是一个 A 模，S 是一个由 1 次齐次元的集合 S_1 所生成的分次 A 代数，$u : M \to S_1$ 是一个 A 模的满同态，$\overline{u} : \mathbf{S}(M) \to S$ 是

由 u 延拓而成的那个从对称代数 $\mathbf{S}(M)$ 到 S 的（A 代数）同态。则 $\overline{u}$ 所对应的态射是 $\operatorname{Proj} S$ 到 $\operatorname{Proj}\mathbf{S}(M)$ 的一个闭浸入。

事实上，根据前提条件，$\bar{u}$ 是满的，从而只需应用 (2.9.2)。

§3. 分次代数层的齐次谱

3.1 拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的齐次谱

(3.1.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$\mathscr{M}$ 是一个分次 $\mathscr{S}$ 模层。若 $\mathscr{S}$ 是拟凝聚的，则它的每一个齐次分量 $\mathscr{S}_n$ 都是拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，因为它们是 $\mathscr{S}$ 到自身的某个同态的像 (**I**, 1.3.8 和 1.3.9)；同样的，若 $\mathscr{M}$ 作为 $\mathscr{O}_Y$ 模层是拟凝聚的，则它的每一个齐次分量 $\mathscr{M}_n$ 也是如此，反之亦然。若 d 是一个 >0 的整数，则我们用 $\mathscr{S}^{(d)}$ 来标记诸 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{S}_{nd}$ $(n\in\mathbb{Z})$ 的直和，若 $\mathscr{S}$ 是拟凝聚的，则 $\mathscr{S}^{(d)}$ 也是如此 (**I**, 1.3.9)；对任意整数 k $(0\leqslant k\leqslant d-1)$，我们用 $\mathscr{M}^{(d,k)}$（当 $k=0$ 时简记为 $\mathscr{M}^{(d)}$）来标记诸 $\mathscr{M}_{nd+k}$ $(n\in\mathbb{Z})$ 的直和，它是一个分次 $\mathscr{S}^{(d)}$ 模层，并且如果 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{M}$ 都是拟凝聚的，则它也是拟凝聚的 (**I**, 9.6.1)。我们用 $\mathscr{M}(n)$ 来标记下面这个 $\mathscr{S}$ 模层：对任意 $k\in\mathbb{Z}$，均有 $(\mathscr{M}(n))_k=\mathscr{M}_{n+k}$；若 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{M}$ 都是拟凝聚的，则 $\mathscr{M}(n)$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层 (**I**, 9.6.1)。

所谓 $\mathscr{M}$ 是一个*有限型*（相应的，*有限呈示*）的分次 $\mathscr{S}$ 模层，是指对任意 $y\in Y$，均可找到 y 的一个开邻域 U 和一组有限个整数 n_i（相应的，一组有限个整数 m_i 和 n_j）以及一个 0 次的满同态 $\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathscr{S}(n_i)|_U)\to\mathscr{M}|_U$（相应的，一个 0 次同态 $\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathscr{S}(m_i)|_U)\to\bigoplus_{j=1}^{s}(\mathscr{S}(n_j)|_U)$，使得 $\mathscr{M}|_U$ 同构于该同态的余核）。

设 U 是 Y 的一个仿射开集，$A=\Gamma(U,\mathscr{O}_Y)$ 是它的环；根据前提条件，分次 $(\mathscr{O}_Y|_U)$ 代数层 $\mathscr{S}|_U$ 同构于 $\widetilde{S}$，其中 $S=\Gamma(U,\mathscr{S})$ 是一个分次 A 代数 (**I**, 1.4.3)；令 $X_U=\operatorname{Proj}\Gamma(U,\mathscr{S})$。设 $U'\subset U$ 是 Y 的另一个仿射开集，A' 是它的环，$j:U'\to U$ 是典范含入，对应于限制同态 $A\to A'$；我们有 $\mathscr{S}|_{U'}=j^*(\mathscr{S}|_U)$，从而 $S'=\Gamma(U',\mathscr{S})$ 可以典范等同于 $S\otimes_A A'$ (**I**, 1.6.4)。由此可知 (2.8.10)，$X_{U'}$ 可以典范等同于 $X_U\times_U U'$，从而也等同于 $f_U^{-1}(U')$，这里 f_U 是指结构态射 $X_U\to U$ (**I**, 4.4.1)。我们用 $\sigma_{U',U}$ 来标记上述典范同构 $f_U^{-1}(U')\xrightarrow{\sim}X_{U'}$，并且用 $\rho_{U',U}$ 来标记开浸入 $X_{U'}\to X_U$，即 $\sigma_{U',U}^{-1}$ 与典范含入 $f_U^{-1}(U')\to X_U$ 的合成。易见若 $U''\subset U'$ 是 Y 的第三个仿射开集，则有 $\rho_{U'',U}=\rho_{U'',U'}\circ\rho_{U',U}$。

命题 (3.1.2) — *设 Y 是一个概形。则对任意拟凝聚正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$，在 Y 上均有一个具有下述性质的概形 X：若 f 是结构态射 $X\to Y$，则对于 Y 的任意仿射开*

集 U，均有一个从开子概形 $f^{-1}(U)$ 到 $X_U = \operatorname{Proj}\Gamma(U,\mathscr{S})$ 的同构 η_U，并且对于 Y 的一个包含在 U 中的仿射开集 V，图表

(3.1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow[\eta_V]{\sim} & X_V \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{V,U}} \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow[\eta_U]{\sim} & X_U \end{array}$$

总是交换的。这样的 Y 概形在只差一个 Y 同构的意义下是唯一的。

对于 Y 的两个仿射开集 $U,\ V$，设 $X_{U,V}$ 是 X_U 的开子概形 $f_U^{-1}(U\cap V)$，我们现在要定义一个 Y 同构 $\theta_{U,V} : X_{V,U} \xrightarrow{\sim} X_{U,V}$。为此，考虑一个仿射开集 $W \subset U\cap V$ ：取同构的合成

$$f_U^{-1}(W) \xrightarrow{\sigma_{W,U}} X_W \xrightarrow{\sigma_{W,V}^{-1}} f_V^{-1}(W)$$

我们得到一个同构 τ_W，并且易见若 $W' \subset W$ 是另一个仿射开集，则 $\tau_{W'}$ 就是 τ_W 在 $f_U^{-1}(W')$ 上的限制；从而诸 τ_W 都是某个 Y 同构 $\theta_{V,U}$ 的限制。进而，若 U, V, W 是 Y 的三个仿射开集，$\theta'_{U,V}$，$\theta'_{V,W}$ 和 $\theta'_{U,W}$ 分别是 $\theta_{U,V}$，$\theta_{V,W}$，$\theta_{U,W}$ 在 $U\cap V\cap W$ 到 X_V，X_W，X_W 中的逆像上的限制，则由上面的定义知，我们有 $\theta'_{U,V}\circ\theta'_{V,W} = \theta'_{U,W}$。从而由 (**I**, 2.3.1) 就可以推出 X 的存在性以及上述性质；只差一个 Y 同构下的唯一性是显然的，有见于 (3.1.2.1)。

(3.1.3) 我们把 (3.1.2) 中所定义的这个概形 X 称为拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 的齐次谱，并且记之为 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$。易见 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 在 Y 上是分离的 ((2.4.2) 和 (**I**, 5.5.5))；若 $\mathscr{S}$ 是有限型 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 (**I**, 9.6.2)，则 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 在 Y 上是有限型的 ((2.7.1, (ii)) 和 (**I**, 6.3.1))。

若 f 是结构态射 $X\to Y$，则易见对于 Y 的任意开子概形 U，$f^{-1}(U)$ 都可以等同于齐次谱 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}|_U$。

命题 (3.1.4) — 设 $f\in\Gamma(Y,\mathscr{S}_d)$ $(d>0)$。则 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 有一个开集 X_f 具有下面的性质：对于 Y 的任意仿射开集 U，在 $\varphi^{-1}(U)$ 中 $X_f\cap\varphi^{-1}(U) = D_+(f|_U) \subset \varphi^{-1}(U)$ 都等同于 $X_U = \operatorname{Proj}\Gamma(U,\mathscr{S})$（$\varphi$ 是指结构态射 $X\to Y$）。进而，开子概形 X_f 在 Y 上是仿射的，并且典范同构于 $\operatorname{Spec}(\mathscr{S}^{(d)}/(f-1)\mathscr{S}^{(d)})$ (1.3.1)。

我们有 $f|_U\in\Gamma(U,\mathscr{S}_d) = (\Gamma(U,\mathscr{S}))_d$。若 U, U' 是 Y 的两个仿射开集，满足 $U'\subset U$，则 $f|_{U'}$ 是 $f|_U$ 在限制同态

$$\Gamma(U,\mathscr{S}) \longrightarrow \Gamma(U',\mathscr{S})$$

下的像，从而 $D_+(f|_{U'})$ 等于（在 (3.1.1) 的记号下）$X_{U'}$ 的开子概形 $\rho_{U',U}^{-1}(D_+(f|_U))$ (2.8.1)； 故得第一个陈言。 进而， X_U 的开子概形 $D_+(f|_U)$ 可以典范等同于

$\operatorname{Spec}\Gamma(U,\mathscr{S})_{f|_U}$，并且这个等同与限制同态是相容的 (2.8.1)，从而第二个陈言缘自 (2.2.5) 和图表 (2.8.2.1) 的交换性。

我们也称 X_f（作为底空间 X 的开集）是使 f 不归零的点 $x\in X$ 的集合。

推论 (3.1.5) — 若 $f\in\Gamma(Y,\mathscr{S}_d)$, $g\in\Gamma(Y,\mathscr{S}_e)$，则有

(3.1.5.1) $$X_{fg} \;=\; X_f\cap X_g \quad。$$

事实上，只需考虑它们与集合 $\varphi^{-1}(U)$ 的交集，其中 U 是 Y 的一个仿射开集，再利用公式 (2.3.3.2) 即可。

推论 (3.1.6) — 设 (f_α) 是 $\mathscr{S}$ 在 Y 上的一族整体截面，并且 $f_\alpha\in\Gamma(Y,\mathscr{S}_{d_\alpha})$；若 $\mathscr{S}$ 中由这族元素所生成的理想层 (**0**, 5.1.1) 包含了所有次数充分大的那些 $\mathscr{S}_n$，则底空间 X 是这些 X_{f_α} 的并集。

事实上，对于 Y 的任意仿射开集 U，$\varphi^{-1}(U)$ 都是诸 $X_{f_\alpha}\cap\varphi^{-1}(U)$ 的并集 (2.3.14)。

推论 (3.1.7) — 设 $\mathscr{A}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层；令

$$\mathscr{S} \;=\; \mathscr{A}[T] \;=\; \mathscr{A}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T]\,,$$

其中 T 是未定元（把 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}[T]$ 都看作是 Y 上的常值层）。则 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 可以典范等同于 $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$。特别的，$\operatorname{Proj}\mathscr{O}_Y[T]$ 可以等同于 Y。

把 (3.1.6) 应用到在 Y 的每一点处都等于 T 的那个唯一的截面 $f\in\Gamma(Y,\mathscr{S})$ 上，我们看到 $X_f=X$。进而，此时我们有 $d=1$，并且 $\mathscr{S}^{(d)}/(f-1)\mathscr{S}^{(d)}=\mathscr{S}/(f-1)\mathscr{S}$ 典范同构于 $\mathscr{A}$，故得结论 (1.2.2)。

设 $g\in\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)$；若取 $\mathscr{S}=\mathscr{O}_Y[T]$，则我们有 $g\in\Gamma(Y,\mathscr{S}_0)$；设

$$h \;=\; gT \;\in\; \Gamma(Y,\mathscr{S}_1) \quad。$$

若 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$，则 (3.1.7) 中所定义的典范等同把 X_h 等同于 Y 的开集 Y_g（在 (**0**, 5.5.2) 的意义下）：事实上，可以限于考虑 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的这个情形，于是（有见于 (2.2.5)）问题归结为下面的事实：分式环 A_g 可以典范等同于 $A[T]/(gT-1)A[T]$ (**0**, 1.2.3)。

命题 (3.1.8) — 设 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层。

(i) 对任意 $d>0$，均有一个从 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 到 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}^{(d)}$ 的典范 Y 同构。

(ii) 设 $\mathscr{S}'$ 是这样一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，它是 $\mathscr{O}_Y$ 和 $\mathscr{S}_n$ $(n\geqslant 0)$ 的直和；则 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 与 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 是典范 Y 同构的。

(iii) 设 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**0**, 5.4.1)，并设 $\mathscr{S}_{(\mathscr{L})}$ 是这样一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，它是诸 $\mathscr{S}_d\otimes\mathscr{L}^{\otimes d}$ 的直和；则 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 与 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}_{(\mathscr{L})}$ 是典范 Y 同构的。

在任何一种情形下，我们只需在 Y 的局部上定义出相应的同构即可，因为它们与 (从一个开集到更小的开集的) 限制运算的相容性是显然的。从而可以假设 Y 是仿射的，此时 (i) 缘自 (2.4.7, (i))，(ii) 缘自 (2.4.8)。对于 (iii)，如果进而假设 $\mathscr{L}$ 同构于 $\mathscr{O}_Y$ (这是允许的，因为问题在 Y 上是局部性的)，则 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 与 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}_{(\mathscr{L})}$ 的同构是显然的；为了定义一个典范同构，我们设 $Y=\operatorname{Spec}A$，$\mathscr{S}=\widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，设 L 是一个自由 A 模，满足 $\mathscr{L}=\widetilde{L}$，并设 c 是 L 的一个生成元；则对任意 $n>0$，$x_n\mapsto x_n\otimes c^{\otimes n}$ 都是 S_n 到 $S_n\otimes L^{\otimes n}$ 上的一个 A 同构，并且这些 A 同构定义了分次代数的一个 A 同构 $\varphi_c: S\to S_{(L)}=\bigoplus\limits_{n\geqslant 0}S_n\otimes L^{\otimes n}$。现在设 $f\in S_+$ 是一个 d 次齐次元，则对任意 $x\in S_{nd}$ 和任意可逆元 $\varepsilon\in A$，均有 $(x\otimes c^{nd})/(f\otimes c^d)^n=(x\otimes(\varepsilon c)^{nd})/(f\otimes(\varepsilon c)^d)^n$，这就表明由 φ_c 所导出的同构 $S_{(f)}\to(S_{(L)})_{(f\otimes c^d)}$ 其实不依赖于 L 的生成元 c 的选择，从而完成了证明。

(3.1.9) 还记得 (**0**, 4.1.3 和 **I**, 1.3.14) 为了使拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，必须且只需存在 Y 的一个仿射开覆盖 (U_α)，使得每个 $\Gamma(U_\alpha,\mathscr{S}_0)$ 上的分次代数 $\Gamma(U_\alpha,\mathscr{S})$ 都是由 1 次齐次元的集合 $\Gamma(U_\alpha,\mathscr{S}_1)$ 所生成的。于是对于 Y 的任意开集 V，$\mathscr{S}|_V$ 都是由 $(\mathscr{O}_Y|_V)$ 模层 $\mathscr{S}_1|_V$ 所生成的。

命题 (3.1.10) — 假设可以找到 Y 的一个有限仿射开覆盖 (U_i)，使得每个分次代数 $\Gamma(U_i,\mathscr{S})$ 在 $\Gamma(U_i,\mathscr{O}_Y)$ 上都是有限型的。则可以找到一个整数 $d>0$，使得 $\mathscr{S}^{(d)}$ 是由 $\mathscr{S}_d$ 所生成的，并且 $\mathscr{S}_d$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_Y$ 模层。

事实上，由 (2.1.6, (v)) 知，对每一个 i，都可以找到一个整数 m_i，使得当 $n>0$ 时，均有 $\Gamma(U_i,\mathscr{S}_{nm_i})=(\Gamma(U_i,\mathscr{S}_{m_i}))^n$；现在只要取 d 是诸 m_i 的一个公倍数即可，有见于 (2.1.6, (i))。

推论 (3.1.11) — 在 (3.1.10) 的前提条件下，$\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 总可以 Y 同构于这样一个齐次谱 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$，其中 $\mathscr{S}'$ 是一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，是由 $\mathscr{S}'_1$ 所生成的，并且 $\mathscr{S}'_1$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_Y$ 模层。

事实上，只需取 $\mathscr{S}'=\mathscr{S}^{(d)}$，其中 d 是性质 (3.1.10) 所确定的整数，再利用 (3.1.8, (i)) 即可。

(3.1.12) 若 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，则我们知道 (**I**, 5.1.1) 它的诣零根 $\mathscr{N}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层；我们把 $\mathscr{N}_+=\mathscr{N}\cap\mathscr{S}_+$ 称为 $\mathscr{S}_+$ 的诣零根；它是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}_0$ 模层，因为可以立刻归结到 Y 是仿射概形的情形，此时命题缘自 (2.1.10)。于是对任意 $y\in Y$，$(\mathscr{N}_+)_y$ 都是 $(\mathscr{S}_+)_y=(\mathscr{S}_y)_+$ 的诣零根 (**I**, 5.1.1)。所谓分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 是本质既约的，是指 $\mathscr{N}_+=0$，这也等价于说，对所有 $y\in Y$，

分次 $\mathscr{O}_y$ 代数 $\mathscr{S}_y$ 都是本质既约的。对任意分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$，$\mathscr{S}/\mathscr{N}_+$ 都是本质既约的。

所谓 $\mathscr{S}$ 是整的，是指对任意 $y\in Y$，$\mathscr{S}_y$ 都是整环，并且 $(\mathscr{S}_y)_+=(\mathscr{S}_+)_y\neq 0$。

命题 (3.1.13) — 设 $\mathscr{S}$ 是一个正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层。若 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$，则 Y 概形 X_{red} 可以典范同构于 $\operatorname{Proj}(\mathscr{S}/\mathscr{N}_+)$；特别的，若 $\mathscr{S}$ 是本质既约的，则 X 是既约的。

$X'=\operatorname{Proj}(\mathscr{S}/\mathscr{N}_+)$ 是既约概形的事实可由 (2.4.4, (i)) 立得，因为该性质是局部性的；进而，对任意仿射开集 $U\subset Y$，$\varphi'^{-1}(U)$ 都等于 $(\varphi^{-1}(U))_{\mathrm{red}}$（$\varphi$ 和 φ' 分别是结构态射 $X\to Y$ 和 $X'\to Y$）；易见典范 U 态射 $\varphi'^{-1}(U)\to\varphi^{-1}(U)$ 与限制运算是相容的，从而定义了一个闭浸入 $X'\to X$，并且它是底空间上的同胚；故得结论 (**I**, 5.1.2)。

命题 (3.1.14) — 设 Y 是一个整概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，并且 $\mathscr{S}_0=\mathscr{O}_Y$。

(i) 若 $\mathscr{S}$ 是整的 (3.1.12)，则 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 是整的，并且结构态射 $\varphi:X\to Y$ 是一个笼罩。

(ii) 进而假设 $\mathscr{S}$ 是本质既约的。于是反过来若 X 是整的，并且 φ 是一个笼罩，则 $\mathscr{S}$ 是整的。

(i) 若 (U_α) 是 Y 的一个拓扑基，由一些非空仿射开集所组成，则只需对 Y 是某个 U_α 并且 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}|_{U_\alpha}$ 的情形进行证明：事实上，这样一来，一方面底空间 $\varphi^{-1}(U_\alpha)$ 都是 X 的不可约开集（从而非空），并且对每一对指标 α,β 均有 $\varphi^{-1}(U_\alpha)\cap\varphi^{-1}(U_\beta)\neq\varnothing$（因为 $U_\alpha\cap U_\beta$ 包含某个 U_γ），从而 X 是不可约的 (**0**, 2.1.4)；另一方面，X 是既约的，因为这是一个局部性质，从而 X 是整的，并且 $\varphi(X)$ 在 Y 中稠密。

从而我们可以假设 $Y=\operatorname{Spec}A$，其中 A 是一个整环 (**I**, 5.1.4)，并且 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数；前提条件说，对任意 $y\in Y$，$\widetilde{S}_y=S_y$ 都是一个整的分次环，并且满足 $(S_y)_+\neq 0$。只需证明 S 是一个整环，因为此时 $S_+\neq 0$，从而可以使用 (2.4.4，(ii))。然则，设 f,g 是 S 中的两个非零元素，并假设 $fg=0$；则对任意 $y\in Y$，在 S_y 中均有 $(f/1)(g/1)=0$；从而根据前提条件，$f/1=0$ 或 $g/1=0$。比如假设在 S_y 中 $f/1=0$；这意味着存在 $a\in A$ 使得 $a\notin\mathfrak{j}_y$ 且 $af=0$；于是对任意 $z\in Y$，在整环 S_z 中均有 $(a/1)(f/1)=0$，且由于 $a/1\neq 0$（因为 A 是整的），故知 $f/1=0$，这表明 $f=0$。

(ii) 问题在 Y 上是局部性的，故仍可以假设 $Y=\operatorname{Spec}A$，其中 A 是整环，并且 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$。根据前提条件，对任意 $y\in Y$，$(S_y)_+$ 都不包含非零的幂零元，而且 $(S_0)_y=A_y$ 也是如此，这是根据前提条件；从而对任意 $y\in Y$，S_y 都是既约的，故知 S 自己也是既约的 (**I**, 5.1.1)。另一方面，X 是整的这个条件表明 S 是本

质整的 (2.4.4, (ii))，从而归结为证明 S_+ 在 $A = S_0$ 中的零化子 $\mathfrak{J}$ 等于 0 (2.1.11)。假如这件事不对，则可以找到 $\mathfrak{J}$ 中的一个元素 $h \neq 0$，使得 $(S_h)_+ = 0$，从而 (3.1.1) $\varphi^{-1}(D(h)) = \varnothing$，于是 $\varphi(X)$ 在 Y 中不能是稠密的，这与前提条件矛盾（$D(h) \neq \varnothing$，因为 h 不是幂零元）。

3.2 分次 $\mathscr{S}$ 模层在 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 上的附随层

(3.2.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$\mathscr{M}$ 是一个分次 $\mathscr{S}$ 模层，并且是拟凝聚的（在 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ 上或者环积空间 $(Y, \mathscr{S})$ 上，两者是等价的 (**I**, 9.6.1)）。在 (3.1.1) 的记号下，我们用 $\widetilde{\mathscr{M}_U}$ 来标记拟凝聚 $\mathscr{O}_{X_U}$ 模层 $(\Gamma(U, \mathscr{M}))^{\sim}$；对于 $U' \subset U$，$\Gamma(U', \mathscr{M})$ 可以典范等同于 $\Gamma(U, \mathscr{M}) \otimes_A A'$ (**I**, 1.6.4)；从而我们有 $\widetilde{\mathscr{M}_{U'}} = \rho^*_{U',U}\widetilde{\mathscr{M}_U}$ (2.8.11)。

命题 (3.2.2) — 在 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 上有唯一一个满足下述条件的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\widetilde{\mathscr{M}}$：对于 Y 的任意仿射开集 U，均有 $\eta_U^*((\Gamma(U, \mathscr{M}))^{\sim}) = \widetilde{\mathscr{M}}|_{f^{-1}(U)}$（$\eta_U$ 是指同构 $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj}\Gamma(U, \mathscr{S})$，其中 f 是结构态射 $X \to Y$）。

由于 $\rho_{U',U}$ 可以等同于含入态射 $f^{-1}(U') \to f^{-1}(U)$ (3.1.2.1)，从而命题可由关系式 $\widetilde{\mathscr{M}_{U'}} = \rho^*_{U',U}\widetilde{\mathscr{M}_U}$ 以及层的黏合原理 (**0**, 3.3.1) 立得。

我们把 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 称为拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$ 的附随 $\mathscr{O}_X$ 模层。

命题 (3.2.3) — 设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层，并设 $f \in \Gamma(Y, \mathscr{S}_d)$ $(d > 0)$。若 ξ_f 是 X_f 到 Y 概形 $Z_f = \operatorname{Spec}(\mathscr{S}^{(d)}/(f-1)\mathscr{S}^{(d)})$ 上的典范同构 (3.1.4)，则 $(\xi_f)_*(\widetilde{\mathscr{M}}|_{X_f})$ 就是 $\mathscr{O}_{Z_f}$ 模层 $(\mathscr{M}^{(d)}/(f-1)\mathscr{M}^{(d)})^{\sim}$ (1.4.3)。

问题在 Y 上是局部性的，有见于图表 (2.8.12.1) 的交换性，问题可以立即归结到 (2.2.5)。

命题 (3.2.4) — $\mathscr{O}_X$ 模层 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个协变加性正合函子，由拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层的范畴映到拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层的范畴，并且与归纳极限和直和可交换。

问题在 Y 上是局部性的，故可归结为 (**I**, 1.3.11 和 1.3.9) 以及 (2.5.4)。

特别的，若 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 子模层，则 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 可以典范等同于 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 的一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 子模层；更特别的，对于 $\mathscr{S}$ 的任意拟凝聚分次理想层 $\mathscr{J}$，$\widetilde{\mathscr{J}}$ 都是 $\mathscr{O}_X$ 的一个拟凝聚理想层。

若 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层，$\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个拟凝聚的理想层，则 $\mathscr{I}\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 子模层，并且我们有

(3.2.4.1) $$(\mathscr{I}\mathscr{M})^{\sim} = \mathscr{I}.\widetilde{\mathscr{M}}$$

（右边一项的定义参考 (**0**, 4.3.5)）。事实上，只需对下面的情形验证这个公式即

可：$Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，$\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，$\mathscr{M} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个分次 S 模，并且 $\mathscr{I} = \widetilde{\mathfrak{I}}$，其中 $\mathfrak{I}$ 是 A 的一个理想。此时对于 S_+ 的任意齐次元 f，(3.2.4.1) 的左边在 $D_+(f) = \operatorname{Spec} S_{(f)}$ 上的限制都是 $(\mathfrak{I}M)_{(f)} = \mathfrak{I}.M_{(f)}$ 的附随层，并且右边的限制也是如此，参考 (**I**, 1.3.13 和 1.6.9)。

命题 (3.2.5) — 设 $f \in \Gamma(Y, \mathscr{S}_d)$ $(d > 0)$。则在开集 X_f 上，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$(\mathscr{O}_X|_{X_f})$ 模层 $(\mathscr{S}(nd))^{\sim}|_{X_f}$ 都典范同构于 $\mathscr{O}_X|_{X_f}$。特别的，若 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的 (3.1.9)，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathscr{O}_X$ 模层 $(\mathscr{S}(n))^{\sim}$ 都是可逆的。

事实上，有见于 (3.1.4)，对于 Y 的任意仿射开集 U，我们在 (2.5.7) 中都定义了一个从 $(\mathscr{S}(nd))^{\sim}|_{(X_f \cap \varphi^{-1}(U))}$ 到 $\mathscr{O}_X|_{(X_f \cap \varphi^{-1}(U))}$ 上的典范同构（φ 是结构态射 $X \to Y$）；易见这些同构与 U 到它的仿射开子集 $U' \subset U$ 上的限制是相容的，故得第一个陈言。为了证明第二个，只需注意到若 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，则可以找到 Y 的一个仿射开覆盖 (U_α)，使得诸 $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{S})$ 都是由 $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{S})_1 = \Gamma(U_\alpha, \mathscr{S}_1)$ 所生成的；由于可逆性是一个局部性质，从而问题归结为 (2.5.9) 中的结果。

对任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们令

(3.2.5.1) $$\mathscr{O}_X(n) = (\mathscr{S}(n))^{\sim} \quad ,$$

并且对任意 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，我们令

(3.2.5.1) $$\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n) \quad 。$$

由定义易见，对于 Y 的任意开集 U，均有

$$((\mathscr{S}|_U)(n))^{\sim} = \mathscr{O}_X(n)|_{f^{-1}(U)} \quad ,$$

其中，f 是结构态射 $X \to Y$。

命题 (3.2.6) — 设 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 是两个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层，则有一个函子性的（关于 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$）典范同态

(3.2.6.1) $$\lambda : \widetilde{\mathscr{M}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{\mathscr{N}} \longrightarrow (\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{N})^{\sim}$$

和一个函子性的（关于 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$）典范同态

(3.2.6.2) $$\mu : (\mathscr{H}om_{\mathscr{S}}(\mathscr{M}, \mathscr{N}))^{\sim} \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{N}}) \quad 。$$

进而，若 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的 (3.1.9)，则 λ 是一个同构，如果再假设 $\mathscr{M}$ 是有限呈示的 (3.1.1)，则 μ 是一个同构。

对于 Y 是仿射概形的情形，同构 λ 和 μ 已经出现在 (2.5.11.2) 和 (2.5.12.2) 中；由于这些定义是局部性的，并且有见于 (2.8.14)，从而很容易把它们搬到一般情形上。

推论 (3.2.7) — 若 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，则对任意整数 m,n，均有

(3.2.7.1) $$\mathscr{O}_X(m)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(n) \ = \ \mathscr{O}_X(m+n) \ ,$$

(3.2.7.2) $$\mathscr{O}_X(n) \ = \ (\mathscr{O}_X(1))^{\otimes n} \ ,$$

只差一个典范同构。

推论 (3.2.8) — 假设 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的。则对任意分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$ 和任意 $n\in\mathbb{Z}$，均有

(3.2.8.1) $$(\mathscr{M}(n))^{\sim} \ = \ \widetilde{\mathscr{M}}(n) \ ,$$

只差一个典范同构。

这是缘自 Y 是仿射概形时的相应结果 (2.5.14 和 2.5.15) 以及 (2.8.11)。

注解 (3.2.9) — (i) 若 $\mathscr{S}=\mathscr{A}[T]$，其中 $\mathscr{A}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 (3.1.7)，则易见所有的 $\mathscr{O}_X$ 可逆层 $\mathscr{O}_X(n)$ 都典范同构于 $\mathscr{O}_X$ 。

进而，设 $\mathscr{N}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{A}$ 模层，并且令 $\mathscr{M}=\mathscr{N}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{A}[T]$ 。则由 (3.2.3) 和 (3.1.7) 知，在 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{A}[T]$ 与 $X'=\operatorname{Spec}\mathscr{A}$ 的典范等同下，$\mathscr{O}_X$ 模层 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 可以等同于 $\mathscr{N}$ 的附随 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\widetilde{\mathscr{N}}$（在 (1.4.3) 的意义下）。

(ii) 设 $\mathscr{S}$ 是一个任意的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$\mathscr{S}'$ 是这样一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层：$\mathscr{S}'_0=\mathscr{O}_Y$，$\mathscr{S}'_n=\mathscr{S}_n$ $(n>0)$；则对任意 $n\in\mathbb{Z}$，$X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 到 $X'=\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 上的典范同构都把 $\mathscr{O}_X(n)$ 等同于 $\mathscr{O}_{X'}(n)$ ：这是缘自仿射的情形下的相应结果 (2.5.16) 以及下面的事实：在 Y 的仿射开集上的这些等同限制运算是可交换的。同样的，设 $X^{(d)}=\operatorname{Proj}\mathscr{S}^{(d)}$；则对任意 $n\in\mathbb{Z}$，X 到 $X^{(d)}$ 的典范同构 (3.1.8, (i)) 都把 $\mathscr{O}_X(nd)$ 等同于 $\mathscr{O}_{X^{(d)}}(n)$。

命题 (3.2.10) — 设 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层，g 是典范同构 $X_{(\mathscr{L})}=\operatorname{Proj}\mathscr{S}_{(\mathscr{L})}\to X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ (3.1.8, (iii))。则对任意整数 $n\in\mathbb{Z}$，$g_*(\mathscr{O}_{X_{(\mathscr{L})}}(n))$ 都典范同构于 $\mathscr{O}_X(n)\otimes_Y\mathscr{L}^{\otimes n}$。

首先假设 Y 是仿射的，环是 A，并且 $\mathscr{L}=\widetilde{L}$，其中 L 是一个单苇的自由 A 模。在 (3.1.8, (iii)) 的证明中的记号下，对于 $f\in S_d$，我们可以定义一个从 $(S(n))_{(f)}\otimes_A L^{\otimes n}$ 到 $(S_{(L)}(n))_{(f\otimes c^d)}$ 上的同构，即把 $(x/f^k)\otimes c^n$ $(x\in S_{kd+n})$ 对应到元素 $(x\otimes c^{n+kd})/(f\otimes c^d)^k$；易见这个同构不依赖于 L 的生成元 c 的选择；进而，对每一个 $f\in S_+$ 定义出的这些同构与限制运算 $D_+(f)\to D_+(fg)$ 是相容的。最后，在一般情形下，由定义 (3.1.1) 易见，对于 Y 的每个仿射开集 U 定义出的这些同构与 U 到另一个仿射开集 $U'\subset U$ 的限制也是相容的。

3.3 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 上的一个层的附随分次 $\mathscr{S}$ 模层

在这一小节中，我们总假设分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的 (3.1.9)。还记得按照 (3.1.8, (i)) 所述，只要有限性条件 (3.1.10) 得到满足，上述限制不是很要紧的。

(3.3.1) 设 p 是结构态射 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S} \to Y$ 。对任意 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$ ，我们令

(3.3.1.1)
$$\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}) \ = \ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} p_*(\mathscr{F}(n)) \ 。$$

特别的

(3.3.1.2)
$$\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X) \ = \ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} p_*(\mathscr{O}_X(n)) \ 。$$

我们知道 ($\mathbf{0}$, 4.2.2)，对于两个 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ ，我们有一个典范同态

$$p_*\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} p_*\mathscr{G} \ \longrightarrow \ p_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}) \ 。$$

从而从而由 (3.2.7.1) 可以推出， $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X)$ 上带有一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的结构，并且 (3.2.5.2) 也在 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ 上定义了一个分次 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X)$ 模层的结构。

依照 (3.2.5) 以及函子 p_* 的左正合性 ($\mathbf{0}$, 4.2.1)，$\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ 是一个协变加性函子，对于 $\mathscr{F}$ 是左正合的，由 $\mathscr{O}_X$ 模层范畴映到分次 $\mathscr{O}_Y$ 模层范畴 (其中的态射是指 0 次同态)。特别的，若 $\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的一个理想层，则 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{J})$ 可以等同于 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X)$ 的一个分次理想层。

(3.3.2) 设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层。则对于 Y 的任意仿射开集 U ，我们在 (2.6.2) 中都定义了一个 Abel 群同态

$$\alpha_{0,U} \ : \ \Gamma(U,\mathscr{M}_0) \ \longrightarrow \ \Gamma(p^{-1}(U),\widetilde{\mathscr{M}}) \ 。$$

易见这些同态与限制运算是可交换的 (2.8.13.1)，从而定义了 (没有用到 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 生成的这个条件) 一个 Abel 群层的同态

(3.3.2.1)
$$\alpha_0 \ : \ \mathscr{M}_0 \ \longrightarrow \ p_*\widetilde{\mathscr{M}}$$

把这个结果应用到每一个 $\mathscr{M}_n = (\mathscr{M}(n))_0$ 上，并且有见于 (3.2.8.1)，这就对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都定义了一个 Abel 群层同态

(3.3.2.2)
$$\alpha_n \ : \ \mathscr{M}_n \ \longrightarrow \ p_*(\widetilde{\mathscr{M}(n)}) \ ,$$

从而得到分次 Abel 群层之间的一个函子性的 (0 次) 同态

(3.3.2.3)
$$\alpha \ : \ \mathscr{M} \ \longrightarrow \ \mathbf{\Gamma}_*(\widetilde{\mathscr{M}})$$

（也记作 $\alpha_{\mathscr{M}}$ ）。

特别的，取 $\mathscr{M}=\mathscr{S}$ ，则可以验证 $\alpha:\mathscr{S}\to\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X)$ 是一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层同态，并且 (3.3.2.3) 是一个分次模层的双重同态（相对于上述分次代数层同态）。

再注意到每一个 α_n 都对应 (**0**, 4.4.3) 着一个 $\mathscr{O}_X$ 模层的典范同态

(3.3.2.4) $$\alpha_N^\sharp \;:\; p^*\mathscr{M}_n \;\longrightarrow\; \widetilde{\mathscr{M}}(n) \;。$$

容易验证，这个同态就是与下面这个分次 $\mathscr{O}_Y$ 模层的典范（0 次）同态函子性地对应 (3.2.4) 着的同态

(3.3.2.5) $$\mathscr{M}_n\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathscr{S} \;\longrightarrow\; \mathscr{M}(n)$$

右边一项的分次结构是由 $\mathscr{M}$ 上的分次结构自然导出的。事实上，可以限于考虑 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射概形，$\mathscr{M}=\widetilde{M}$ 且 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$ 的情形，分次 A 代数 S 是由 S_1 所生成的，从而若 f 跑遍 S_1 ，则诸 $D_+(f)$ 构成 X 的一个覆盖。从 (2.6.2) 中的诸定义可以看出（有见于 (**I**, 1.6.7)），同态 (3.3.2.4) 在 $D_+(f)$ 上的限制对应 (**I**, 1.3.8) 着 $S_{(f)}$ 模的同态 $M_n\otimes_A S_{(f)}\to(M(n))_{(f)}$ ，它把 $x\otimes 1$ $(x\in M_n)$ 对应到 $x/1$ ；这就证明了我们的陈言。

命题 (3.3.3) — 对任意截面 $f\in\Gamma(Y,\mathscr{S}_d)$ $(d>0)$，X_f 都等于 X 中使 $\alpha_d(f)$（看作是 $\mathscr{O}_X(d)$ 的截面）不归零 (**0**, 5.5.2) 的那些点所组成的集合。

（ $\alpha_d(f)$ 是 $p_*(\mathscr{O}_X(d))$ 在 Y 上的一个截面，而根据定义，一个这样的截面也是 $\mathscr{O}_X(d)$ 在 X 上的一个截面 (**0**, 4.2.1)）。X_f 的定义可以归结到 Y 是仿射概形的情形，这已经在 (2.6.3) 中考察过了。

(3.3.4) 以下我们再假设（除了开头的条件之外）对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，诸 $p_*(\mathscr{F}(n))$ 在 Y 上都是拟凝聚的，从而 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}p_*(\mathscr{F}(n))$ 也是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**I**, 1.4.1 和 1.3.9)；特别的，若 X 在 Y 上是有限型的，则这个条件总可以得到满足 (**I**, 9.2.2)。由此可知，$(\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}))^\sim$ 是有定义的，并且是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层。对于 Y 的任意仿射开集 U ，均有 ((**I**, 1.3.9) 和 (2.5.4))

$$\begin{aligned}\Big(\Gamma\Big(U,\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}p_*\big(\mathscr{F}(n)\big)\Big)\Big)^\sim \;&=\; \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\big(\Gamma(U,p_*(\mathscr{F}(n)))\big)^\sim \;=\; \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\big(\Gamma(p^{-1}(U),\mathscr{F}(n))\big)^\sim\\ &=\;\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma\big(p^{-1}(U),\mathscr{F}(n)\big)\Big)^\sim \;=\; \big(\Gamma_*(\mathscr{F}|_{p^{-1}(U)})\big)^\sim \;,\end{aligned}$$

从而 (2.6.4) 我们有一个典范同态

$$\beta_U \;:\; \Big(\Gamma\Big(U,\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}p_*\big(\mathscr{F}(n)\big)\Big)\Big)^\sim \;\longrightarrow\; \mathscr{F}|_{p^{-1}(U)} \;。$$

进而，(2.8.13.2) 的交换性表明，这些同态与 Y 上的限制运算是可交换的；从而可以导出拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层之间的一个函子性的典范同态

$$\textbf{(3.3.4.1)} \qquad \beta\ :\ (\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}))^{\sim}\ \longrightarrow\ \mathscr{F}$$

（也记作 $\beta_{\mathscr{F}}$ ）。

命题 (3.3.5) — 设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层，$\mathscr{F}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层；则合成同态

$$\textbf{(3.3.5.1)} \qquad \widetilde{\mathscr{M}}\ \xrightarrow{\widetilde{\alpha}}\ (\mathbf{\Gamma}_*(\widetilde{\mathscr{M}}))^{\sim}\ \xrightarrow{\beta}\ \widetilde{\mathscr{M}}\ ,$$

$$\textbf{(3.3.5.2)} \qquad \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})\ \xrightarrow{\alpha}\ \mathbf{\Gamma}_*((\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}))^{\sim})\ \xrightarrow{\mathbf{\Gamma}_*(\beta)}\ \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$$

都是恒同同构。

问题在 Y 上是局部性的，于是归结为 (2.6.5)。

3.4 有限性条件

命题 (3.4.1) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成 (3.1.9)；进而假设 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的。则 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 在 Y 上是有限型的。

事实上，问题在 Y 上是局部性的，故可假设 Y 是仿射的，环为 A；此时我们有 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 $S = \Gamma(Y, \mathscr{S})$，并且根据前提条件，$S$ 是一个由 $S_1 = \Gamma(Y, \mathscr{S}_1)$ 所生成的 A 代数，进而可以假设 S_1 是一个有限型 A 模 (**I**, 1.3.9 和 1.3.12)。从而 S 是一个有限型分次 A 代数，于是问题归结为 (2.7.1, (ii))。

(3.4.2) 设 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层；对于一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$，考虑下面两个有限性条件：

(TF) 存在一个整数 n，使得 $\mathscr{S}$ 模层 $\bigoplus_{k\geqslant n}\mathscr{M}_k$ 是有限型的。

(TN) 存在一个整数 n，使得当 $k \geqslant n$ 时，总有 $\mathscr{M}_k = 0$。

若 $\mathscr{M}$ 满足 **(TN)** 条件，则有 $\widetilde{\mathscr{M}} = 0$，因为问题在 Y 上是局部性的 (2.7.2)。

设 $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ 是两个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层；所谓一个 0 次同态 $u\ :\ \mathscr{M}\ \to\ \mathscr{N}$ 是 **(TN)** 单 (相应的，**(TN)** 满，**(TN)** 一一) 的，是指存在一个整数 n，使得当 $k\ \geqslant n$ 时，$u_k : \mathscr{M}_n \to \mathscr{N}_n$ 都是单 (相应的，满，一一) 的；于是 $\widetilde{u} : \widetilde{\mathscr{M}} \to \widetilde{\mathscr{N}}$ 是单 (相应的，满，一一) 的，这是依据 (2.7.2)，因为问题在 Y 上是局部性的，且可以使用 (**I**, 1.3.9)；如果 u 是 **(TN)** 一一的，则我们也称 u 是一个 **(TN)** 同构。

命题 (3.4.3) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，并且 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的。设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层。

(i) 若 $\mathscr{M}$ 满足 **(TF)** 条件，则 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 是有限型的。

(ii) 假设 $\mathscr{M}$ 满足 **(TF)** 条件；则为了使 $\widetilde{\mathscr{M}}=0$，必须且只需 $\mathscr{M}$ 满足 **(TN)** 条件。

问题在 Y 上是局部性的，故可以归结为下面的情形：Y 是仿射的，环为 A，$\mathscr{S}=\widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，并且理想 S_+ 是有限型的，$\mathscr{M}=\widetilde{M}$，其中 M 是一个分次 S 模；此时命题缘自 (2.7.3)。

定理 (3.4.4) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，并且 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的；设 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$。则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，典范同态 β (3.3.4) 都是一个同构。

首先注意到 β 是有定义的，这是依据 (3.4.1)。为了证明 β 是同构，我们可以归结到下面的情形：Y 是仿射的，环为 A，$\mathscr{S}=\widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，由 S_1 所生成，并且 S_1 是有限型 A 模。此时只需利用 (2.7.5) 即可。

推论 (3.4.5) — 在 (3.4.4) 的前提条件下，任何拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$ 都同构于一个形如 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 的 $\mathscr{O}_X$ 模层，其中 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层。进而若 $\mathscr{F}$ 是有限型的，并且假设 Y 是拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，则可以取 $\mathscr{M}$ 也是有限型的。①

第一个陈言可由 (3.4.4) 立得，只要取 $\mathscr{M}=\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ 即可。为了证明第二个陈言，只需证明 $\mathscr{M}$ 是它的一族有限型分次 $\mathscr{S}$ 子模层 $\mathscr{N}_\lambda$ 的归纳极限：事实上，由此可以推出 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 就是诸 $\widetilde{\mathscr{N}_\lambda}$ 的归纳极限 (3.2.4)，从而 $\mathscr{F}$ 是诸 $\beta\widetilde{\mathscr{N}_\lambda}$ 的归纳极限；由于 X 是拟紧的 ((3.4.1) 和 (**I**, 6.3.1))，并且 $\mathscr{F}$ 是有限型的，从而 $\mathscr{F}$ 必定等于某一个 $\beta\widetilde{\mathscr{N}_\lambda}$ (**0**, 5.2.3)。

为了定义这一族 $\mathscr{N}_\lambda$ 使得 $\mathscr{M}$ 是它们的归纳极限，只需对每一个 $n\in\mathbb{Z}$ 分别考虑拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{M}_n$ 即可，根据 Y 上的前提条件，$\mathscr{M}_n$ 是它的有限型 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{M}_n^{(\mu_n)}$ 的归纳极限 (**I**, 9.4.9)；易见 $\mathscr{P}_{\mu_\lambda}=\mathscr{S}.\mathscr{M}_n^{(\mu_n)}$ 是一个有限型分次 $\mathscr{S}$ 模层，并且若取 $\mathscr{N}_\lambda$ 是形如 $\mathscr{P}_{\mu_\lambda}$ 的一些 $\mathscr{S}$ 模层的有限和，则容易验证这就满足我们的要求。

推论 (3.4.6) — 假设 (3.4.4) 的前提条件得到满足，进而假设 Y 的底空间是拟紧的；设 $\mathscr{F}$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层。则可以找到 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时典范同态 $\sigma: p^*p_*(\mathscr{F}(n))\to\mathscr{F}(n)$ (**0**, 4.4.3) 都是满的。

事实上，对任意 $y\in Y$，设 U 是 y 在 Y 中的一个仿射开邻域。则可以找到一个整数 $n_0(U)$，使得当 $n\geqslant n_0(U)$ 时，$\mathscr{F}(n)|_{p^{-1}(U)}$ 都可由它的有限个整体截面所生成的 (2.7.9)；然而这些截面都是 $p^*p_*(\mathscr{F}(n))$ 在 $p^{-1}(U)$ 上的截面的典范像 (**0**, 3.7.1 和 4.4.3)，从而 $\mathscr{F}(n)|_{p^{-1}(U)}$ 就等于 $(p^*p_*(\mathscr{F}(n)))|_{p^{-1}(U)}$ 的典范像。最后，由于 Y 是拟紧

①译注：在第 IV 章的 (1.7.11) 中，此命题将得到改进。

的，故知有限个仿射开集 U_i 就可以覆盖 Y，取 n_0 是诸 $n_0(U_i)$ 中的最大者，这就完成了证明。

注解 (3.4.7) — 若 $p=(\psi,\theta): X\to Y$ 是一个环积空间态射，$\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模层，则典范同态 $\sigma: p^*p_*\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 是满的这件事可以更具体地表达成下面的形式 (**0**, 4.4.1)：对任意 $x\in X$ 和 $\mathscr{F}$ 在 x 的一个开邻域 V 上的任意截面 s，均可找到 $p(x)$ 在 Y 中的一个开邻域 U 和 $\mathscr{F}$ 在 $p^{-1}(U)$ 上的有限个截面 t_i $(1\leqslant i\leqslant m)$，以及 x 的一个邻域 $W\subset V\cap p^{-1}(U)$ 和 $\mathscr{O}_X$ 在 W 上的一组截面 a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$，使得

$$s|_W \;=\; \sum_i a_i.(t_i|_W) \;。$$

如果 Y 是一个仿射概形，并且 $p_*\mathscr{F}$ 是拟凝聚的，则上述条件等价于 $\mathscr{F}$ 可由整体截面生成 (**0**, 5.1.1)：事实上，若 $Y=\operatorname{Spec}A$，则可以假设 $U=D(f)$ $(f\in A)$；于是可以找到一个整数 $n>0$ 和 $\mathscr{F}$ 的一组整体截面 s_i，使得 t_i 是 s_ig^n 在 $p^{-1}(U)$ 上的限制，其中 $g=\theta(f)$（把 (**I**, 1.4.1) 应用到 $p_*\mathscr{F}$ 上即可）；由于 g 在 $p^{-1}(U)$ 上是可逆的，从而我们有

$$s|_W \;=\; \sum_i b_i.(s_i|_W) \;，$$

其中 $b_i=a_i(g|_W)^{-n}$，故得我们的陈言。如果 Y 是仿射的，则推论 (3.4.6) 再一次给出了 (2.7.9)。

由此可知，如果 Y 是一个任意的概形，$\mathscr{F}$ 是拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，且 $p_*\mathscr{F}$ 是拟凝聚的，则以下三个条件是等价的：

a) 典范同态 $\sigma: p^*p_*\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 是满的。

b) 存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{G}$ 和一个满同态 $p^*\mathscr{G}\to\mathscr{F}$。

c) 对于 Y 的任意仿射开集 U，$\mathscr{F}|_{p^{-1}(U)}$ 都是由它的整体截面所生成的。

事实上，前面已经证明了 a) 和 c) 的等价性。另一方面，易见 a) 蕴涵 b)，因为根据前提条件 $p_*\mathscr{F}$ 是拟凝聚的。反过来，任何同态 $u: p^*\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ 都可以分解为 $p^*\mathscr{G}\to p^*p_*\mathscr{F}\xrightarrow{\sigma}\mathscr{F}$ (**0**, 3.5.4.4)，从而若 u 是满的，则 σ 也是如此，这就证明了 b) 蕴涵 a)。

推论 (3.4.8) — *假设 (3.4.4) 的前提条件得到满足，进而假设 Y 是拟紧分离概形或者具有 Noether 底空间的概形。设 $\mathscr{F}$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层；则可以找到一个整数 n_0，使得对任意 $n\geqslant n_0$，$\mathscr{F}$ 都同构于一个形如 $(p^*\mathscr{G})(-n)$ 的 $\mathscr{O}_X$ 模层的商模层，其中 $\mathscr{G}$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层（依赖于 n）。*[①]

由于结构态射 $X\to Y$ 是分离且有限型的，故知 $p_*(\mathscr{F}(n))$ 是拟凝聚的 (**I**, 9.2.2, b))，从而依照 Y 上的前提条件，$p_*(\mathscr{F}(n))$ 是它的有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层的归纳极限 (**I**, 9.4.9)。于是由 (3.4.6), (**0**, 4.3.2) 和 (**0**, 5.2.3) 可以推出，$\mathscr{F}(n)$ 是一个形如 $p^*\mathscr{G}$

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.11) 中，此命题将得到改进。

的 $\mathscr{O}_X$ 模层的典范像，其中 $\mathscr{G}$ 是 $p_*(\mathscr{F}(n))$ 的一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层；于是由 (3.2.5.2) 和 (3.2.7.1) 就可以推出结论。

3.5 函子行为

(3.5.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ 是两个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 模层；令 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$, $X' = \operatorname{Proj}\mathscr{S}'$，并设 p, p' 是 X 和 X' 到 Y 的结构态射。设 $\varphi : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层同态。对于 Y 的任意仿射开集 U，令 $S_U = \Gamma(U, \mathscr{S})$, $S'_U = \Gamma(U, \mathscr{S}')$；则同态 φ 定义了一个分次 A_U 代数同态 $\varphi_U : S'_U \to S_U$，这里 $A_U = \Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$。它对应着一个从 $p^{-1}(U)$ 的开集 $G(\varphi_U)$ 到 $p'^{-1}(U)$ 的态射 $\Phi_U : G(\varphi_U) \to p'^{-1}(U)$ (2.8.1)。进而，若 $V \subset U$ 是一个仿射开集，则图表

(3.5.1.1)
$$\begin{tikzcd} S'_U \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & S_U \arrow[d] \\ S'_V \arrow[r, "\varphi_V"'] & S_V \end{tikzcd}$$

是交换的，并且从 (2.8.1) 中的定义容易验证

$$G(\varphi_V) = G(\varphi_U) \cap p^{-1}(V) ,$$

并且 Φ_V 就是 Φ_U 在 $G(\varphi_V)$ 上的限制。于是可以定义出 X 的一个开集 $G(\varphi)$，使得对任意仿射开集 $U \subset Y$，均有 $G(\varphi) \cap p^{-1}(U) = G(\varphi_U)$，同时也定义了一个仿射 Y 态射 $\Phi : G(\varphi) \to X'$，称为 φ 的附随态射，我们记之为 $\operatorname{Proj}(\varphi)$。如果对任意 $y \in Y$，均可找到 y 的一个仿射开邻域 U，使得 $\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ 模 $\Gamma(U, \mathscr{S}_+)$ 可由 $\varphi(\Gamma(U, \mathscr{S}'_+))$ 所生成，则有 $G(\varphi_U) = p^{-1}(U)$，从而 $G(\varphi) = X$。

命题 (3.5.2) — (i) *若 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层，则有一个从 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $(\mathscr{M}_{[\varphi]})^{\sim}$ 到 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\Phi_*(\widetilde{\mathscr{M}}|_{G(\varphi)})$ 上的函子性典范同构。*

(ii) *若 $\mathscr{M}'$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}'$ 模层，则有一个从 $(\mathscr{O}_X|_{G(\varphi)})$ 模层 $\Phi^*\widetilde{\mathscr{M}'}$ 到 $\mathscr{O}_X|_{G(\varphi)}$ 模层 $(\mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{S}'} \mathscr{S})^{\sim}|_{G(\varphi)}$ 上的函子性典范同态 ν。若 $\mathscr{S}'$ 可由 $\mathscr{S}'_1$ 所生成，则 ν 是一个同构。*

事实上，如果 Y 是仿射的，则这些同态是有定义的 (2.8.7 和 2.8.8)，为了扩展到一般情形，只需验证这些仿射开集上的同态与限制运算是相容的，这可由图表 (3.5.1.1) 的交换性立得。

特别的，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有一个典范同态

(3.5.2.1)
$$\Phi^*(\mathscr{O}_{X'}(n)) \longrightarrow \mathscr{O}_X(n)|_{G(\varphi)} 。$$

命题 (3.5.3) — 设 Y, Y' 是两个概形，$\psi : Y' \to Y$ 是一个态射，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，并且令 $\mathscr{S}' = \psi^*\mathscr{S}$。则 Y' 概形 $X' = \operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 可以典范等同于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S} \times_Y Y'$。进而，若 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层，则 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $(\psi^*\mathscr{M})^\sim$ 可以等同于 $\widetilde{\mathscr{M}} \otimes_Y \mathscr{O}_{Y'}$。

首先注意到 $\psi^*\mathscr{S}$ 和 $\psi^*\mathscr{M}$ 以及它们的齐次分量都是拟凝聚的 $\mathscr{O}_{Y'}$ 模层 (**0**, 5.1.4)。设 U 是 Y 的一个仿射开集，$U' \subset \psi^{-1}(U)$ 是 Y' 的一个仿射开集，A, A' 分别是 U 和 U' 的环；则我们有 $\mathscr{S}|_U = \widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，并且 $\mathscr{S}'|_{U'}$ 可以等同于 $(S \otimes_A A')^\sim$ (**I**, 1.6.5)；于是第一个陈言缘自 (2.8.10) 和 (**I**, 3.2.6.2)，因为很容易验证由上述等同所定义的投影 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}' \to \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 与 U 和 U' 上的限制运算是相容的，从而定义了一个态射 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}' \to \operatorname{Proj}\mathscr{S}$。现在设

$$q \ : \ \operatorname{Proj}\mathscr{S} \longrightarrow Y \ , \quad q' \ : \ \operatorname{Proj}\mathscr{S}' \longrightarrow Y'$$

是结构态射；则 $q'^{-1}(U')$ 可以等同于 $q^{-1}(U) \otimes_U U'$，并且依照 (2.8.10) 和 (**I**, 1.6.5)，层 $(\psi^*\mathscr{M})^\sim|_{q'^{-1}(U')}$ 和 $(\widetilde{\mathscr{M}} \otimes_Y \mathscr{O}_{Y'})|_{q'^{-1}(U')}$ 都可以典范等同于 $(M \otimes_A A')^\sim$，其中 $M = \Gamma(U, \mathscr{M})$；故得第二个陈言，因为很容易验证上述等同与限制运算是相容的。

推论 (3.5.4) — 在 (3.5.3) 的记号下，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathscr{O}_{X'}(n)$ 都典范等同于 $\mathscr{O}_X(n) \otimes_Y \mathscr{O}_{Y'}$ (其中 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$)。

事实上，在 (3.5.3) 的记号下，显然有 $\psi^*(\mathscr{S}(n)) = \mathscr{S}'(n)$。

(3.5.5) 沿用上面的记号，我们以 Ψ 来标记典范投影 $X' \to X$，并且令 $\mathscr{M}' = \psi^*\mathscr{M}$；进而假设 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，并且 X 在 Y 上是有限型的；由此可知 $\mathscr{S}'$ 是由 $\mathscr{S}'_1$ 所生成的 (可以把问题归结到 Y 和 Y' 都是仿射概形的情形)，并且 X' 在 Y' 上是有限型的 (**I**, 6.3.4)。设 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模层，且令 $\mathscr{M}' = \Psi^*\mathscr{F}$；则由 (3.5.4) 和 (**I**, 6.3.4) 知，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $\mathscr{F}'(n) = \Psi^*(\mathscr{F}(n))$。进而可以定义一个典范 ψ 同态 $\theta_n : q_*(\mathscr{F}(n)) \to q'_*(\mathscr{F}'(n))$ 如下：由于图表

$$\begin{tikzcd}
X & X' \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[d, "q'"] \\
Y \arrow[from=u, "q"'] & Y' \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

是交换的，故只需定义一个同态 $q_*(\mathscr{F}(n)) \to \psi_* q'_* \Psi^*(\mathscr{F}(n)) = q_* \Psi_* \Psi^*(\mathscr{F}(n))$，为此可以取同态 $\theta_n = q_*(\rho_n)$，其中 ρ_n 是典范同态 $\mathscr{F}(n) \to \Psi_*\Psi^*(\mathscr{F}(n))$ (**0**, 4.4.3)。易见对于 Y 的任意仿射开集 U 和 Y' 的任意仿射开集 U'，只要 $U' \subset \psi^{-1}(U)$，同态 θ_n 都给出了截面之间的典范同态 (**0**, 3.7.2) $\Gamma(q^{-1}(U), \mathscr{F}(n)) \to \Gamma(q'^{-1}(U'), \mathscr{F}'(n))$。于是

图表 (2.8.13.2) 的交换性表明，若 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚的，则图表

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{F}' \arrow[d, "\beta_{\mathscr{F}'}"] \\
(\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}))^{\sim} \arrow[r, "\widetilde{\theta}"'] & (\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}'))^{\sim}
\end{tikzcd}$$

是交换的 (第一行的箭头是典范 Ψ 态射 $\mathscr{F} \to \Psi^*\mathscr{F}$)。

同样的，图表 (2.8.13.1) 的交换性表明，图表

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Gamma}_*(\widetilde{\mathscr{M}}) \arrow[r, "\theta"] & \mathbf{\Gamma}_*(\widetilde{\mathscr{M}'}) \\
\mathscr{M} \arrow[r, "\rho"'] \arrow[u, "\alpha_{\mathscr{M}}"] & \mathscr{M}' \arrow[u, "\alpha_{\mathscr{M}'}"']
\end{tikzcd}$$

是交换的 (第二行的箭头是典范 ψ 态射 $\mathscr{F} \to \psi^*\mathscr{F}$)。

(3.5.6) 现在考虑下面的情形：Y, Y' 是两个概形，$g : Y' \to Y$ 是一个态射，$\mathscr{S}$ (相应的，$\mathscr{S}'$) 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ (相应的，$\mathscr{O}_{Y'}$) 代数层，并且 $u : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ 是一个分次代数层的 g 态射，也就是说，一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层同态 $\mathscr{S} \to g_*(\mathscr{S}')$；这也相当于给出了一个分次 $\mathscr{O}_{Y'}$ 代数层的同态 $u^\sharp : g^*\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$。于是由 $u^\sharp$ 可以典范地导出一个 Y' 态射 $w = \operatorname{Proj}(u^\sharp) : G(u^\sharp) \to \operatorname{Proj}(g^*\mathscr{S})$，其中 $G(u^\sharp)$ 是 $X' = \operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 的一个开集 (3.5.1)。另一方面，$X'' = \operatorname{Proj}(g^*\mathscr{S})$ 可以典范等同于 $X \times_Y Y'$，这里我们令 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ (3.5.3)；把 $\operatorname{Proj}(u^\sharp)$ 与第一个投影 $p : X \times_Y Y' \to X$ 合成，则可以得到一个态射 $\upsilon : G(u^\sharp) \to X$，记之为 $\operatorname{Proj}(u)$，它使得图表

$$\begin{tikzcd}
G(u^\sharp) \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

是交换的。

进而，对任意拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{M}$，均有一个典范 v 态射

$$\text{(3.5.6.1)} \qquad v : \widetilde{\mathscr{M}} \longrightarrow ((g^*\mathscr{M}) \otimes_{g^*\mathscr{S}} \mathscr{S}')^{\sim}|_{G(u^\sharp)}$$

(译注：请小心区分拉丁字母 v 和希腊字母 $\upsilon = \text{upsilon}$)。

事实上，$v^\sharp$ 是下面这个合成同态

$$v^*\widetilde{\mathscr{M}} = w^*p^*\widetilde{\mathscr{M}} \longrightarrow w^*((g^*\mathscr{M})^{\sim}) \longrightarrow ((g^*\mathscr{M}) \otimes_{g^*\mathscr{S}} \mathscr{S}')^{\sim}|_{G(u^\sharp)} ,$$

其中第一个箭头来自于同构 (3.5.3)，第二个箭头则是同态 (3.5.2, (i))；如果 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，则由 (3.5.2) 知，$v^\sharp$ 是一个同构。

作为 (3.5.6.1) 的一个特殊情形，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有一个典范 v 态射

(3.5.6.2) $$v \ : \ \mathscr{O}_X(n) \longrightarrow \mathscr{O}_{X'}(n)|_{G(u^\sharp)} \ 。$$

3.6 概形 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 的闭子概形

(3.6.1) 设 Y 是一个概形，$\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ 是拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层之间的一个 0 次同态。所谓 φ 是 **(TN)** 满 (相应的，**(TN)** 单，**(TN)** 一一) 的，是指可以找到 n，使得当 $k \geqslant n$ 时 $\varphi_k : \mathscr{S}_k \to \mathscr{S}'_k$ 总是满 (相应的，单，一一) 的。在这种情况下，对于态射 $\Phi : \operatorname{Proj}\mathscr{S}' \to \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 的考察可以归结到 φ 是满 (相应的，单，一一) 的这个情形。这件事的证明与 (2.9.1) 相同 (后者相当于 Y 是仿射概形这个情形)，并使用 (3.1.8)。如果 φ 是 **(TN)** 一一的，则我们也称 φ 是一个 **(TN)** 同构。

命题 (3.6.2) — *设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，并设 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 。*

(i) 若 $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ 是分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的一个 **(TN)** *满同态，则对应的态射 $\Phi = \operatorname{Proj}(\varphi)$ (3.5.1) 在整个 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 上都有定义，并且是一个从 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 到 X 的闭浸入。若 $\mathscr{J}$ 是 φ 的核，则 Φ 在 X 中的附随闭子概形是由 $\mathscr{O}_X$ 的拟凝聚理想层 $\widetilde{\mathscr{J}}$ 所定义的。*

*(ii) 进而假设 $\mathscr{S}_0 = \mathscr{O}_Y$，$\mathscr{S}$ 可由 $\mathscr{S}_1$ 生成，并且 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的。设 X' 是 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 的一个闭子概形，由 $\mathscr{O}_X$ 的一个拟凝聚理想层 $\mathscr{I}$ 所定义。设 $\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{S}$ 的这样一个拟凝聚分次理想层，它是 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{I})$ 在典范同态 $\alpha : \mathscr{S} \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X)$ (3.3.2) 下的逆像，并且令 $\mathscr{S}' = \mathscr{S}/\mathscr{J}$ 。则 X' 就是分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的典范同态 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ 所对应的闭浸入 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}' \to X$ 的附随子概形 (**I**, 4.2.1)。*

(i) 可以假设 φ 是满的 (3.6.1)。则对于 Y 的任意仿射开集 U，$\Gamma(U, \mathscr{S}) \to \Gamma(U, \mathscr{S}')$ 都是满的 (**I**, 1.3.9)，从而 (3.5.1) 我们有 $G(\varphi) = X$ 。问题立即归结为证明 Y 是仿射概形的情形，此时可由 (2.9.2, (i)) 推出。

(ii) 归结为证明由典范含入 $\mathscr{J} \to \mathscr{S}$ 所导出的同态 $\widetilde{\mathscr{J}} \to \mathscr{O}_X$ 是 $\widetilde{\mathscr{J}}$ 到 $\mathscr{I}$ 上的一个同构；由于问题在 Y 上是局部性的，故可假设 Y 是仿射的，环为 A，这就意味着 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，并且 S_1 在 A 上是有限型的。此时只需应用 (2.9.2, (ii))。

推论 (3.6.3) — *在 (3.6.2, (i)) 的条件下，进而假设 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\Phi^*(\mathscr{O}_X(n))$ 都可以典范等同于 $\mathscr{O}_{X'}(n)$ 。*

这个典范同构在 Y 是仿射概形的情形已经出现在 (2.9.3) 中；在一般情形下，只需验证这些定义在 Y 的仿射开集上的同构与限制运算是相容的，而这是容易的。

推论 (3.6.4) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，$\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，u 是一个 $\mathscr{O}_Y$ 满同态 $\mathscr{M}\to\mathscr{S}_1$，$\overline{u}:\mathscr{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{M})\to\mathscr{S}$ 是由 u 延拓而成的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层同态 (1.7.4)。则与 $\overline{u}$ 相对应的态射是一个从 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 到 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{M})$ 的闭浸入。

事实上，根据前提条件，$\overline{u}$ 是满的，从而可以使用 (3.6.2, (i))。

3.7 概形到齐次谱的态射

(3.7.1) 设 $q:X\to Y$ 是一个概形态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层；于是 $q^*\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层。考虑拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{S}'=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$，假设给了一个分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层的同态

$$\psi\ :\ q^*\mathscr{S}\ \longrightarrow\ \mathscr{S}'\ =\ \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}\quad ,$$

这也相当于给了一个分次代数层的 q 态射

$$\psi^\flat\ :\ \mathscr{S}\ \longrightarrow\ q_*\mathscr{S}'\quad 。$$

我们知道 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 可以典范等同于 X (3.1.7 和 3.1.8, (iii))；由 ψ 可以典范地导出一个从 X 的开集 $G(\psi)$ 到 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 的 Y 态射

(3.7.1.1) $$r_{\mathscr{L},\psi}\ :\ G(\psi)\ \longrightarrow\ \operatorname{Proj}\mathscr{S}\ =\ P\ ,$$

我们称之为 $\mathscr{L}$ 与 ψ 的附随态射；根据 (3.5.6)，这个态射也可以通过取第一个投影 $\pi:\operatorname{Proj}(q^*\mathscr{S})=P\times_Y X\to P$ 与 Y 态射

$$\tau\ =\ \operatorname{Proj}\psi\ :\ G(\psi)\ \longrightarrow\ \operatorname{Proj}(q^*\mathscr{S})$$

的合成而得到。

(3.7.2) 如果 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，则 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$，其中 S 是一个正分次 A 代数，我们现在要给出 $r=r_{\mathscr{L},\psi}$ 的一个更具体的描述。首先假设 $X=\operatorname{Spec}B$ 也是仿射的，则有 $\mathscr{L}=\widetilde{L}$，其中 L 是一个 1 秩的自由 B 模。此时我们有 $q^*\mathscr{S}=(S\otimes_A B)^\sim$ (**I**, 1.6.5)；若 c 是 L 的一个生成元，则 $\psi_n:q^*\mathscr{S}_n\to\mathscr{L}^{\otimes n}$ 对应于一个从 $S_n\otimes_A B$ 到 $L^{\otimes n}$ 的同态 $w_n:s\otimes b\mapsto bv_n(s)c^{\otimes n}$，其中 $v_n:S_n\to B$ 是一个 A 模同态，这些 v_n 合起来构成一个代数同态 $S\to B$。设 $f\in S_d$ $(d>0)$，并且令 $g=v_d(f)$；依照 (2.8.10) 以及 $D_+(f)$ 与 $\operatorname{Spec}S_{(f)}$ 的等同 (2.3.6)，我们有 $\pi^{-1}(D_+(f))=D_+(f\otimes 1)$；另一方面，公式 (2.8.1.1) 表明 (有见于 X 和 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 的典范等同)

$$\tau^{-1}(D_+(f\otimes 1))\ =\ D(g)\ \ ,$$

故得

(3.7.2.1) $$r^{-1}(D_+(f)) \ = \ D(g) \ 。$$

进而，态射 $\tau = \operatorname{Proj}\psi$ 在 $D(g)$ 上的限制对应于这样一个同态：它把 $(s\otimes 1)/(f\otimes 1)^n$（其中 $s\in S_{nd}$）映到 $v_{nd}(s)/g^n$ (2.8.1)，并且投影 π 在 $D_+(f\otimes 1)$ 上的限制对应于同态 $s/f^n\mapsto (s\otimes 1)/(f\otimes 1)^n$；由此可知，$r$ 在 $D(g)$ 上的限制对应于下面这个 A 代数同态 $\omega : S_{(f)}\to B_g$：对任意 $s\in S_{nd}$ $(n>0)$，均有 $\omega(s/f^n)=v_{nd}(s)/g^n$。对于 X 是任意概形的情形（仍假设 Y 是仿射的），有见于 (2.8.1)，我们得到：

命题 (3.7.3) — 若 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，并且 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，则对任意 $f\in S_d=\Gamma(Y,\mathscr{S}_d)$，均有

(3.7.3.1) $$r^{-1}_{\mathscr{L},\psi}(D_+(f)) \ = \ X_{\psi^\flat(f)}$$

（其中 $\psi^\flat(f)\in\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes d})$），并且态射 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 的限制 $X_{\psi^\flat(f)}\to D_+(f)=\operatorname{Spec}S_{(f)}$ 对应于 (**I**, 2.2.4) 下面的代数同态

(3.7.3.2) $$\psi^\flat_{(f)} \ : \ S_{(f)} \ \longrightarrow \ \Gamma(X_{\psi^\flat(f)}) \ ,$$

即对任意 $s\in S_{nd}=\Gamma(Y,\mathscr{S}_{nd})$，均有

(3.7.3.3) $$\psi^\flat_{(f)}(s/f^n) \ = \ \Big(\psi^\flat(s)\Big|_{X_{\psi^\flat(f)}}\Big)\Big(\psi^\flat(f)\Big|_{X_{\psi^\flat(f)}}\Big)^{-n} \ 。$$

如果 $G(\psi)=X$，则我们称 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的。为了达到这一点，必须且只需对任意仿射开集 $U\subset Y$，均有 $G(\psi)\cap q^{-1}(U)=q^{-1}(U)$；换句话说，问题在 Y 上是局部性的。若 Y 是仿射的，则 $G(\psi)$ 是诸 $r^{-1}(D_+(f))$ 的并集，其中 f 跑遍 S_+ 中的齐次元 (2.8.1)；从而依照 (3.7.3.1)，诸 $X_{\psi^\flat(f)}$ 必须要构成 X 的一个覆盖，换句话说：

推论 (3.7.4) — 在 (3.7.3) 的前提条件下，为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的，必须且只需对任意 $x\in X$，均可找到一个整数 $n>0$ 和 $\mathscr{S}_n$ 在 Y 上的一个整体截面 s，使得 $t=\psi^\flat(s)=\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n})$ 在 x 处不归零，亦即 $t(x)\neq 0$。

注意到只要 ψ 是 **(TN)** 满的，这个条件就是成立的。

同样的，$r_{\mathscr{L},\psi}$ 是不是一个笼罩的问题在 Y 上也是局部性的，我们有：

推论 (3.7.5) — 在 (3.7.3) 的前提条件下，为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是一个笼罩，必须且只需对任意整数 $n>0$ 和任意截面 $s\in S_n$，只要 $\psi^\flat(s)\in\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n})$ 是局部幂零的，s 本身就是幂零的。

事实上，只需说明当 $D_+(s)$ 不空时 $r^{-1}_{\mathscr{L},\psi}(D_+(s))$ 也不是空的，从而这个推论缘自 (3.7.3.1) 和 (2.3.7)。

命题 (3.7.6) — 设 $q:X\to Y$ 是一个态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ 是两个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$u:\mathscr{S}'\to\mathscr{S}$ 是一个分次代数层同态，$\psi:q^*\mathscr{S}\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是一个分次代数层同态，$\psi'=\psi\circ q^*(u)$ 是合成同态。于是若 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 是处处有定义的，则 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 也是如此；若 u 是 **(TN)** 满的，并且 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 是一个笼罩，则 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 也是一个笼罩；反过来，若 u 是 **(TN)** 单的，并且 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是一个笼罩，则 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 也是一个笼罩。

事实上，我们有 $G(\psi')\subset G(\psi)$ (2.8.4)，故得第一个陈言；若 u 是 **(TN)** 满的，则 $\mathrm{Proj}(u):\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}\to\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}'$ 处处有定义，并且是一个闭浸入；由于 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 就是 $\mathrm{Proj}(u)$ 与 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 在 $G(\psi')$ 上的限制的合成，故知若 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 是一个笼罩，则 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 也是如此。最后，若 u 是 **(TN)** 单的，则我们知道 $\mathrm{Proj}(u)$ 是一个从 $G(u)$ 到 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}'$ 的笼罩 (2.8.3)；由于 $G(\psi')$ 就是 $G(u)$ 在 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 下的逆像，故我们看到，若 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是一个笼罩，则 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 也是如此。

命题 (3.7.7) — 设 Y 是一个拟紧概形，$q:X\to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，并且是拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的一个滤相归纳系 $(\mathscr{S}^\lambda)$ 的归纳极限。设 $\varphi_\lambda:\mathscr{S}^\lambda\to\mathscr{S}$ 是典范同态，$\psi:q^*\mathscr{S}\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是一个分次代数层同态，并且令 $\psi_\lambda=\psi\circ q^*(\varphi_\lambda)$。则为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的，必须且只需存在一个 λ 使得 $r_{\mathscr{L},\psi_\lambda}$ 是处处有定义的；此时对任意 $\mu\geqslant\lambda$，$r_{\mathscr{L},\psi_\mu}$ 都是处处有定义的。

依照 (3.7.6)，条件是充分的。反过来，假设 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的；问题可以归结到 Y 是仿射概形的情形，因为若对任意仿射开集 $U\subset Y$，都存在一个 $\lambda(U)$ 使得 $r_{\mathscr{L},\psi_{\lambda(U)}}$ 在 $q^{-1}(U)$ 上的限制是处处有定义的，则 (由于 Y 是拟紧的) 可以用有限个仿射开集 U_i 覆盖 Y，并且取 $\lambda\geqslant$ 每一个 $\lambda(U_i)$ 即可，这是依据 (3.7.6)。若 Y 是仿射的，则前提条件表明，对任意 $x\in X$，均可找到某个 $\mathscr{S}_n$ 的一个截面 $s^{(x)}$，使得 $t^{(x)}=\psi^\flat(s^{(x)})$ 不归零，亦即 $t^{(x)}(x)\neq 0$ (把 $t^{(x)}$ 看作是 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 的一个整体截面)，这就意味着对于 x 的某个邻域 $V(x)$ 中的任意 z，都有 $t^{(x)}(z)\neq 0$。我们用有限个 $V(x_i)$ 把 X 覆盖，并设 $s^{(i)}$ 是 $\mathscr{S}$ 的相应截面；则可以找到一个 λ，使得所有的 $s^{(i)}$ 都具有 $\varphi_\lambda({s'}^{(i)}_\lambda)$ 的形状，其中 ${s'}^{(i)}_\lambda\in S^\lambda$；从而由 (2.7.4) 知，$r_{\mathscr{L},\psi_\lambda}$ 是处处有定义的。最后一个陈言可由 (3.7.6) 立得。

推论 (3.7.8) — 在 (3.7.7) 的前提条件下，若所有 $r_{\mathscr{L},\psi_\lambda}$ 都是笼罩，则 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 也是如此；如果诸 φ_λ 都是单的，则逆命题也成立。

第二个陈言是 (3.7.6) 的一个特殊情形；另一方面，为了证明 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是笼罩，可以限于考虑 Y 是仿射概形的情形；若 $s\in S$ 使得 $\psi^\flat(s)$ 是局部幂零的，则由于 $s=\varphi_\lambda(s_\lambda)$ (对某个 λ)，故由前提条件和 (3.7.5) 可以推出 s_λ 是幂零的，从而 s 也是幂零

的，再使用 (3.7.5) 的判别法。

注解 (3.7.9) — (i) 在 (3.7.1) 的记号下，有见于 (3.2.10)，对任意 $n\in\mathbb{Z}$，我们都有一个典范同态

(3.7.9.1) $$\theta\ :\ r^*_{\mathscr{L},\psi}(\mathscr{O}_P(n))\ \longrightarrow\ \mathscr{L}^{\otimes n}\ ,$$

它的一般定义出现在 (3.5.6.2) 中。易见在 (3.7.3) 的条件下，该同态在 $X_{\psi^\flat(f)}$ 上的限制具体写出来就是：它把 s/f^k ($s\in S_{n+kd}$) 映到元素 $(\psi^\flat(s)|_{X_{\psi^\flat(f)}})(\psi^\flat(f)|_{X_{\psi^\flat(f)}})^{-k}$。

(ii) 设 $\mathscr{F}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，并假设 q 是拟紧且分离的，从而对任意 $n\geqslant 0$，$q_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ 都是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**I**, 9.2.2)。设 $\mathscr{M}'=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$，它是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}'$ 模层，考虑它的像 $\mathscr{M}=q_*\mathscr{M}'=\bigoplus_{n\geqslant 0}q_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$（这是一个拟凝聚 $\mathscr{S}$ 模层，藉由同态 $\psi^\flat$）。下面我们要证明，存在一个典范的 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(3.7.9.2) $$\xi\ :\ r^*_{\mathscr{L},\psi}\widetilde{\mathscr{M}}\ \longrightarrow\ \mathscr{F}|_{G(\psi)}\ 。$$

事实上，我们已经定义了 (3.5.6.1) 一个典范同态

(3.7.9.3) $$r^*_{\mathscr{L},\psi}\widetilde{\mathscr{M}}\ \longrightarrow\ \big((q^*\mathscr{M})\otimes_{q^*\mathscr{S}}\mathscr{S}'\big)^{\sim}\big|_{G(\psi)}\ ,$$

这里把右边一项看作是 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 上的一个拟凝聚层。另一方面，对任意拟凝聚分次 $\mathscr{S}'$ 模层 $\mathscr{M}'$，我们都有一个典范同态

(3.7.9.4) $$(q^*q_*\mathscr{M}')\otimes_{q^*\mathscr{S}}\mathscr{S}'\ \longrightarrow\ \mathscr{M}'\ ,$$

即对于 X 的任意开集 U 和 $q^*q_*\mathscr{M}'_h$ 在 U 上的任意截面 t' 以及 $\mathscr{S}'_k$ 在 U 上的任意截面 b'，它把 $t'\otimes b'$ 都映到 $\mathscr{M}'_{h+k}$ 的截面 $b'\sigma(t')$ 上，其中 $\sigma(t')$ 是 $\mathscr{M}'_h$ 在 U 上的那个典范对应于 t' (**0**, 4.4.3) 的截面。由此可以得到一个典范同态

(3.7.9.5) $$\big((q^*q_*\mathscr{M}')\otimes_{q^*\mathscr{S}}\mathscr{S}'\big)^{\sim}\big|_{G(\psi)}\ \longrightarrow\ \widetilde{\mathscr{M}'}|_{G(\psi)}\ 。$$

最后，由于 $\widetilde{\mathscr{M}'}$ 可以典范等同于 $\mathscr{F}$ (3.2.9, (i))，从而就得到了我们所需要的典范同态。

在 (3.7.3) 的前提条件下，上述同态在 $X_{\psi^\flat(f)}$ 上的限制具体写出来就是：给了 $\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes nd}$ 在 X 上的一个截面 t_{nd}，若 t'_{nd} 是指把 t_{nd} 看作是 $q_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ 在 Y 上的截面，则该同态把元素 t'_{nd}/f^n 对应到 $\mathscr{F}$ 在 $X_{\psi^\flat(f)}$ 上的截面 $(t_{nd}|_{X_{\psi^\flat(f)}})(\psi^\flat(f)|_{X_{\psi^\flat(f)}})^{-n}$。

3.8 浸入齐次谱的判别法

(3.8.1) 在 (3.7.1) 的记号下，易见 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是不是一个浸入 (相应的，一个开浸入，一个闭浸入) 的问题在 Y 上是局部性的。

命题 (3.8.2) — 在 (3.7.3) 的前提条件下，为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，必须且只需存在一族截面 $s_\alpha \in S_{n_\alpha}$ $(n_\alpha > 0)$，使得诸 $f_\alpha = \psi^\flat(s_\alpha)$ 满足下面的条件:

(i) 诸 X_{f_α} 构成 X 的一个覆盖。

(ii) 诸 X_{f_α} 都是仿射开集。

(iii) 对任意 α 和任意 $t \in \Gamma(X_{f_\alpha}, \mathscr{O}_X)$，均可找到一个整数 $m > 0$ 和一个 $s \in S_{mn_\alpha}$，使得 $t = (\psi^\flat(s)|_{X_{f_\alpha}})(f_\alpha|_{X_{f_\alpha}})^{-m}$。

为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个开浸入，必须且只需存在一族截面 (s_α) 满足 (i), (ii), (iii) 并且:

(iv) 对任意 $n > 0$ 和任意 $s \in S_{nn_\alpha}$，只要 $\psi^\flat(s)_{X_{f_\alpha}} = 0$，必可找到一个整数 $k > 0$，使得 $s_\alpha^k s = 0$。

为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个闭浸入，必须且只需存在一族截面 (s_α) 满足 (i), (ii), (iii) 并且:

(v) 诸 $D_+(s_\alpha)$ 构成 $P = \operatorname{Proj} S$ 的一个覆盖。

事实上，为了使 r 是一个浸入 (相应的，闭浸入)，必须且只需存在 $r(G(\psi))$ (相应的，P) 的一个由 $D_+(s_\alpha)$ 所组成的覆盖，使得 r 在每个 $V_\alpha = r^{-1}(D_+(s_\alpha))$ 上的限制都是 V_α 到 $D_+(s_\alpha)$ 的一个闭浸入 (**I**, 4.2.4)。条件 (i) 表示说 r 是处处有定义的，并且诸 $D_+(s_\alpha)$ 构成 $r(X)$ 的一个覆盖，这是根据 (3.7.3.1)；由于 $D_+(s_\alpha)$ 是仿射的，故知条件 (ii) 和 (iii) 表示说 r 在 X_{f_α} 上的限制是一个映到 $D_+(s_\alpha)$ 中的闭浸入 (**I**, 4.2.3)；最后，由于条件 (iii) 和 (iv) 表示说 $\psi^\flat_{(s_\alpha)}$ 是一一的 (在 (3.7.3.2) 的记号下)，故知 (ii), (iii) 和 (iv) 表示说 r 在诸 X_{f_α} 上的限制都是映到 $D_+(s_\alpha)$ 上的同构，从而 (i), (ii), (iii) 和 (iv) 表示说 r 是一个开浸入。

推论 (3.8.3) — 在 (3.7.6) 的前提条件下，若 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，则 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 也是如此。进而假设 u 是 **(TN)** 满的，于是若 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 是一个开 (相应的，闭) 浸入，则 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 也是如此。

事实上，根据 (3.8.2)，可以找到一族 $s'_\alpha \in S'_{n_\alpha}$ 使得 $f_\alpha = \psi'^\flat(s'_\alpha)$ 满足条件 (i), (ii), (iii)。然则，若令 $s_\alpha = u(s'_\alpha)$，则也有 $f_\alpha = \psi^\flat(s_\alpha)$，并且若 $t = (\psi'^\flat(s')|_{X_{f_\alpha}})(f_\alpha|_{X_{f_\alpha}})^{-m}$，则也有 $t = (\psi^\flat(s)|_{X_{f_\alpha}})(f_\alpha|_{X_{f_\alpha}})^{-m}$ (这里我们令 $s = u(s')$)，故得第一个陈言。第二个陈言可由 $\operatorname{Proj}(u)$ 是闭浸入的事实立得。

命题 (3.8.4) — 假设 (3.7.7) 的前提条件得到满足，进而假设 $q : X \to Y$ 是有限型态射。则为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，必须且只需存在一个 λ 使得 $r_{\mathscr{L},\psi_\lambda}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，此时对任意 $\mu \geqslant \lambda$，$r_{\mathscr{L},\psi_\mu}$ 都是处处有定义的并且是一个浸入。

有见于 (3.8.3)，只需证明若 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，则至少有一

个 λ 使得 $r_{\mathscr{L},\psi_\lambda}$ 也是如此。使用 (3.7.7) 的方法，并利用 Y 的拟紧性，可以把问题归结到 Y 是仿射概形的情形。由于 X 是拟紧的，故而 (3.8.2) 表明，可以找到 S 中的一族有限个元素 (s_i)，其中 $s_i \in S_{n_i}$，并且具有性质 (i), (ii), (iii)。态射 $X_{f_i} \to Y$（其中 $f_i = \psi^\flat(s_i)$）是有限型的：事实上，它是仿射概形间的一个态射，从而是拟紧的 (**I**, 6.6.1)，并且它又是局部有限型的，因为 q 是有限型的 (**I**, 6.3.2)，于是由 (**I**, 6.6.3) 就可以推出结论。因而 X_{f_i} 的环 B_i 是一个有限型 A 代数 (**I**, 6.3.3)；设 (t_{ij}) 是这个代数的一族生成元。则根据前提条件，存在一组元素 $s'_{ij} \in S_{m_{ij}n_i}$，使得

$$t_{ij} \;=\; \left(\psi^\flat(s'_{ij})\big|_{X_{f_i}}\right)\left(\psi^\flat(s_i)\big|_{X_{f_i}}\right)^{-m_{ij}} \quad 。$$

再根据前提条件，存在一个 λ 和两组元素 $s_{i\lambda} \in S^\lambda_{n_i}$，$s'_{ij\lambda} \in S_{m_{ij}n_i}$，使得它们在 φ_λ 下的像分别是 s_i 和 s'_{ij}；易见 $r_{\mathscr{L},\psi_\lambda}$ 就满足 (3.8.2) 中的条件 (i), (ii), (iii)。

命题 (3.8.5) — *设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 Noether 底空间的概形，$q : X \to Y$ 是*有限型*态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$\psi : q^*\mathscr{S} \to \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}$ 是分次代数层的一个同态。则为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，必须且只需存在一个整数 $n > 0$ 和 $\mathscr{S}_n$ 的一个*有限型*拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}$，使得：*

a) 同态 $\psi_n \circ q^*(j_n) : q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}^{\otimes n}$（其中 $j_n : \mathscr{E} \to \mathscr{S}$ 是典范含入）是满的；

b) 若我们用 $\mathscr{S}'$ 来标记 $\mathscr{E}$ 在 $\mathscr{S}$ 中所生成的（分次）$\mathscr{O}_Y$ 子代数层，并且用 ψ' 来标记同态 $\psi \circ q^*(j')$（j' 是 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}$ 的含入），则 $r_{\mathscr{L},\psi'}$ 是处处有定义的并且是一个浸入。

如果这些条件成立，则 $\mathscr{S}_n$ 的任何包含 $\mathscr{E}$ 的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}'$ 都具有同样的性质，并且对任意 $k > 0$，$\bigotimes^k \mathscr{E}$ 在 $\mathscr{S}_{kn}$ 中的像也是如此。[①]

有见于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 和 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}^{(d)}$ 之间的典范同构 (3.1.8)，条件的充分性和最后两个陈言是 (3.8.3) 的特殊情形。

设 (U_i) 是 Y 的一个有限仿射开覆盖，并且令 $A_i = \mathrm{A}(U_i)$。由于 $q^{-1}(U_i)$ 是拟紧的，故由 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是一个处处有定义的浸入和 (3.8.2) 可以推出：存在 $S^{(i)} = \Gamma(U_i, \mathscr{S})$ 中的一族有限个元素 (s_{ij})（其中 $s_{ij} \in S^{(i)}_{n_{ij}}$），它们具有性质 (i), (ii), (iii)。使用 (3.8.4) 的证明方法可以看出，态射 $X_{f_{ij}} \to U_i$（其中 $f_{ij} = \psi^\flat(s_{ij})$）是有限型的，因而 $X_{f_{ij}}$ 的环 B_{ij} 是一个有限型 A_i 代数，具有一组形如 $(\psi^\flat(t_{ijk})|_{X_{f_{ij}}})(f_{ij}|_{X_{f_{ij}}})^{-m_{ijk}}$ 的生成元，其中 $t_{ijk} \in S^{(i)}_{m_{ijk}n_{ij}}$。设 n 是这些 $m_{ijk}n_{ij}$ 的一个公倍数；对每一组 (i,j,k)，把 s_{ij} 换成 s^ρ_{ij}，其中 ρ 是满足 $\rho m_{ijk}n_{ij} = n$ 的整数，并把 t_{ijk} 换成 $s^{\rho-m_{ijk}}_{ij}t_{ijk}$，则可以假设对每个 i，诸 s_{ij} 和 t_{ijk} 都属于 $S^{(i)}_n$，并且 $m_{ijk} = 1$。设 E_i 是这些元素在 $S^{(i)}$ 中所生成的 A_i 子模（固定 i）。则可以找到 $\mathscr{S}_n$ 的一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}_i$，使

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.12) 中，此命题将得到改进。

得 $\mathscr{E}_i|_{U_i} = (E_i)^{\sim}$ (**I**, 9.4.7)。易见这些 $\mathscr{E}_i$ 在 $\mathscr{S}_n$ 中的和 $\mathscr{E}$ 就满足我们的要求 (因为每个截面 f_{ij} 都满足条件：对任意 $x \in X_{t_{ij}}$，均可找到 x 的一个仿射开邻域 $V \subset X_{t_{ij}}$，使得 $f|_V$ 是 $\Gamma(V, \mathscr{L}^{\otimes n})$ 的一个基底)。

§4. 射影丛。丰沛层

4.1 射影丛的定义

定义 (4.1.1) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{E}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，$\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E})$ 是 $\mathscr{E}$ 的对称 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 (1.7.4)，它是拟凝聚的 (1.7.7)。所谓 $\mathscr{E}$ **在** Y **上定义的射影丛** (fibré projectif)，是指 Y 概形 $P = \operatorname{Proj} \mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E})$，记作 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$。我们把 $\mathscr{O}_P$ 模层 $\mathscr{O}_P(1)$ 称为 P 的基本层 (faisceau fondamental)。

如果 Y 是仿射的，环为 A，则有 $\mathscr{E} = \widetilde{E}$，其中 E 是一个 A 模，此时也用记号 $\mathbf{P}(E)$ 来代替 $\mathbf{P}(\widetilde{E})$。

如果取 $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y^n$，则 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 也被记为 $\mathbf{P}_Y^{n-1}$；进而若 Y 是仿射的，环为 A，则 $\mathbf{P}_Y^{n-1}$ 也被记为 $\mathbf{P}_A^{n-1}$。由于 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y)$ 可以典范等同于 $\mathscr{O}_Y[T]$ (1.7.4)，故知 $\mathbf{P}_Y^0$ 可以典范等同于 Y (3.1.7)；例子 (2.4.3) 与 $\mathbf{P}_K^1$ 无异。

(4.1.2) 设 $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ 是两个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层；$u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_Y$ 同态；则它典范地对应着一个分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的同态 $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}) \to \mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F})$ (1.7.4)。若 u 是满的，则 $\mathbf{S}(u)$ 也是如此，从而 (3.6.2, (i)) $\operatorname{Proj} \mathbf{S}(u)$ 是闭浸入 $\mathbf{P}(\mathscr{F}) \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$，我们记之为 $\mathbf{P}(u)$。于是可以说 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 是 $\mathscr{E}$ 的反变函子，前提是只考虑拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层之间的满同态。

仍然假设 u 是满的，并且令 $P = \mathbf{P}(\mathscr{E}),\ Q = \mathbf{P}(\mathscr{F}),\ j = \mathbf{P}(u)$，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有

(4.1.2.1) $$j^*(\mathscr{O}_P(n)) \ = \ \mathscr{O}_Q(n) \ ,$$

只差一个同构，这是缘自 (3.6.3)。

(4.1.3) 现在设 $\psi : Y' \to Y$ 是一个态射，并设 $\mathscr{E}' = \psi^* \mathscr{E}$；则我们有 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_{Y'}}(\mathscr{E}') = \psi^* \mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E})$ (1.7.5)；从而 (3.5.3) 有

(4.1.3.1) $$\mathbf{P}(\psi^* \mathscr{E}) \ = \ \mathbf{P}(\mathscr{E}) \times_Y Y' \ ,$$

只差一个典范同构；进而，易见对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有

$$\psi^*((\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}))(n)) \ = \ (\mathbf{S}_{\mathscr{O}_{Y'}}(\mathscr{E}'))(n) \ ,$$

从而若令 $P=\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ P'=\mathbf{P}(\mathscr{E}')$，则对任意 $n\in\mathbb{Z}$，均有 (3.5.4)

(4.1.3.2)
$$\mathscr{O}_{P'}(n)\ =\ \mathscr{O}_P(n)\otimes_Y\mathscr{O}_{Y'}\ \ ,$$

只差一个同构。

命题 (4.1.4) — 设 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层。则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$，均有一个典范 Y 同构 $i_{\mathscr{L}}:\mathbf{P}(\mathscr{E})\xrightarrow{\sim}\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})$；进而，若令 $P=\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ Q=\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})$，则对任意 $n\in\mathbb{Z}$，$i^*_{\mathscr{L}}(\mathscr{O}_Q(n))$ 都典范同构于 $\mathscr{O}_P(n)\otimes_Y\mathscr{L}^{\otimes n}$。

首先注意到若 A 是一个环，E 是一个 A 模，L 是一个单苇自由 A 模，则可以典范地定义一个 A 同态

$$\mathbf{S}_n(E\otimes L)\ \longrightarrow\ \mathbf{S}_n(E)\otimes L^{\otimes n}\ \ ,$$

即把 $(x_1\otimes y_1)\dots(x_n\otimes y_n)$ 对应到元素

$$(x_1x_2\dots x_n)\otimes(y_1\otimes y_2\otimes\dots y_n)$$

（其中 $x_i\in E,\ y_i\in L\ (1\leqslant i\leqslant n)$）；易见这个同态其实就是一个同构（归结到 $L=A$ 的情形）。由此可以得到一个典范的分次 A 代数同构 $\mathbf{S}_A(E\otimes L)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathbf{S}_n(E)\otimes L^{\otimes n}$。回归到 (4.1.4) 中的条件，则这个注解表明，我们可以定义一个典范的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层同构

(4.1.4.1)
$$\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathscr{L})\ \xrightarrow{\sim}\ \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathbf{S}_n(\mathscr{E})\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathscr{L}^{\otimes n}\ \ ,$$

即首先定义出一个预层的同构，同时利用 (1.7.4), (**I**, 1.3.9) 和 (**I**, 1.3.12)。命题于是缘自 (3.1.8, (iii)) 和 (3.2.10)。

(4.1.5) 在 (4.1.1) 的前提条件下，令 $P=\mathbf{P}(\mathscr{E})$，并且用 p 来标记结构态射 $P\to Y$。则根据定义，$\mathscr{E}\ =\ (\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}))_1$，故我们有一个典范同态 $\alpha_1\ :\ \mathscr{E}\ \to\ p_*(\mathscr{O}_P(1))$ (3.3.2.2)，从而还有一个典范同态 (**0**, 4.4.3)

(4.1.5.1)
$$\alpha_1^\sharp\ :\ p^*\mathscr{E}\ \longrightarrow\ \mathscr{O}_P(1)\ \ 。$$

命题 (4.1.6) — 典范同态 (4.1.5.1) 是满的。

事实上，我们在 (3.3.2) 中看到，$\alpha_1^\sharp$ 函子性地对应着典范同态 $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E})\to(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}))(1)$；根据定义，$\mathscr{E}$ 可以生成 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E})$，从而这个同态是满的，于是由 (3.2.4) 就可以推出结论。

4.2 概形到射影丛的态射

(4.2.1) 沿用 (4.1.5) 中的记号，设 X 是一个 Y 概形，$q: X \to Y$ 是结构态射，并设 $r: X \to P$ 是一个 Y 态射，从而有交换图表

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "p"'] & X \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "q"] \\ Y & \end{tikzcd}$$
。

由于函子 r^* 是右正合的 ($\mathbf{0}$, 4.3.1)，故由 (4.1.5.1) 中的满同态 (4.1.6) 可以导出一个满同态

$$r^*(\alpha_1^\sharp) \;:\; r^*p^*\mathscr{E} \;\longrightarrow\; r^*(\mathscr{O}_P(1)) \;。$$

然而 $r^*p^*\mathscr{E} = q^*\mathscr{E}$，并且 $r^*(\mathscr{O}_P(1))$ 可以局部同构于 $r^*\mathscr{O}_P = \mathscr{O}_X$，换句话说，它是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}_r$，于是由 r 出发可以定义一个典范 $\mathscr{O}_X$ 满同态

(4.2.1.1)
$$\varphi_r \;:\; q^*\mathscr{E} \;\longrightarrow\; \mathscr{L}_r \;。$$

如果 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，并且 $\mathscr{E} = \widetilde{E}$，则这个同态具体写出来就是：给了 $f \in E$，首先由 (2.6.3) 可以得出

(4.2.1.2)
$$r^{-1}(D_+(f)) \;=\; X_{\varphi_r^\flat(f)} \;。$$

另一方面，设 V 是 X 的一个包含在 $r^{-1}(D_+(f))$ 中的仿射开集，并设 B 是它的环，这是一个 A 代数；令 $S = \mathbf{S}_A(E)$；r 在 V 上的限制对应着一个 A 同态 $\omega : S_{(f)} \to B$，我们有 $q^*\mathscr{E}|_V = (E \otimes_A B)^\sim$ 和 $\mathscr{L}_r|_V = \widetilde{L_r}$，其中 $L_r = (S(1))_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} B_{[\omega]}$ ($\mathbf{I}$, 1.6.5)。φ_r 在 $q^*\mathscr{E}|_V$ 上的限制对应着这样一个 B 同态 $u: E \otimes_A B \to L_r$：它把 $x \otimes 1$ 映到 $(x/1) \otimes f = (f/1) \otimes \omega(x/f)$。$\varphi_r$ 可以典范延拓成一个 $\mathscr{O}_X$ 代数层同态

$$\psi_r \;:\; q^*\mathbf{S}(\mathscr{E}) \;=\; \mathbf{S}(q^*\mathscr{E}) \;\longrightarrow\; \mathbf{S}(\mathscr{L}_r) \;=\; \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}_r^{\otimes n}$$

并且它在 $(q^*\mathbf{S}(\mathscr{E}))|_V$ 上限制对应着这样一个同态 $\mathbf{S}_n(E \otimes_A B) = \mathbf{S}_n(E) \otimes_A B \to L_r^{\otimes n}$：它把 $s \otimes 1$ 映到 $(f/1)^{\otimes n} \otimes \omega(s/f^n)$。

(4.2.2) 反过来，假设给了一个态射 $q: X \to Y$，一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层和一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$；则一个同态 $\varphi: q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$ 典范地对应着一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层的同态

$$\psi \;:\; \mathbf{S}(q^*\mathscr{E}) \;=\; q^*\mathbf{S}(\mathscr{E}) \;\longrightarrow\; \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n} \;,$$

从而对应着 (3.7.1) 一个 Y 态射 $r_{\mathscr{L},\psi}: G(\psi) \to \operatorname{Proj}\mathbf{S}(\mathscr{E}) = \mathbf{P}(\mathscr{E})$，我们记之为 $r_{\mathscr{L},\varphi}$。若 φ 是满的，则 ψ 也是如此，从而 (3.7.4) $r_{\mathscr{L},\varphi}$ 是处处有定义的。进而，在 (4.2.1) 和 (4.2.2) 的记号下：

命题 (4.2.3) — *给了一个态射 $q: X \to Y$ 和一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$，映射 $r \mapsto (\mathscr{L}_r, \varphi_r)$ 和 $(\mathscr{L}, \varphi) \to r_{\mathscr{L},\varphi}$ 在 Y 态射 $r: X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的集合与二元组 $(\mathscr{L}, \varphi)$ 的等价类集合之间建立了一个一一对应，其中二元组 $(\mathscr{L}, \varphi)$ 是由一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 和一个满同态 $\varphi: q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$ 所组成的，并且 $(\mathscr{L}, \varphi)$ 与 $(\mathscr{L}', \varphi')$ 等价是指存在一个 $\mathscr{O}_X$ 同构 $\tau: \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ 使得 $\varphi' = \tau\varphi$。*

首先由一个 Y 态射 $r: X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ 出发可以作出 $\mathscr{L}_r$ 和 φ_r (4.2.1)，然后作出 $r' = r_{\mathscr{L}_r,\varphi_r}$；由 (4.2.1) 和 (3.7.2) 立知，态射 r 和 r' 是相同的（只要在定义 (3.7.2) 的同态 v_n 时取元素 $(f/1) \otimes 1$ 作为 $\mathscr{L}_r$ 的生成元）。反过来，由一个二元组 $(\mathscr{L}, \varphi)$ 出发可以作出 $r'' = r_{\mathscr{L},\varphi}$，然后作出 $\mathscr{L}_{r''}$ 和 $\varphi_{r''}$；下面我们证明，存在一个典范同构 $\tau: \mathscr{L}_{r''} \to \mathscr{L}$ 使得 $\varphi = \tau \circ \varphi_{r''}$；为了定义这个同构，可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A$ 和 $X = \operatorname{Spec} B$ 都是仿射概形的情形，此时我们（使用 (4.2.1) 和 (3.7.2) 的记号）把元素 $v_1(x)c \in L$ $(x \in E)$ 对应到 $L_{r''}$ 的元素 $(x/1) \otimes 1$。易见 τ 不依赖于 L 的生成元 c 的选择；由于根据前提条件 v_1 是满的，故而为了证明 τ 是同构，只需证明若在 $(S(1))_{(f)}$ 中有 $x/1 = 0$，则在 B_g 中有 $v_1(x)/1 = 0$；然而前一个关系式表明，对于某个适当的 n，在 $\mathbf{S}_{n+1}(E)$ 中有 $f^n x = 0$，由此可以推出在 B 中有 $v_{n+1}(f^n x) = g^n v_1(x) = 0$，故得结论。最后，易见若两个二元组 $(\mathscr{L}, \varphi)$ 和 $(\mathscr{L}', \varphi')$ 是等价的，则有 $r_{\mathscr{L},\varphi} = r_{\mathscr{L}',\varphi'}$。

特别的，对于 $X = Y$：

定理 (4.2.4) — *在 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的 Y 截面集合与 $\mathscr{E}$ 的那些使 $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ 成为可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{F}$ 的集合之间有一个典范的一一对应。*

注意到这个性质对应着“射影空间”的古典定义，即把射影空间定义为一个向量空间的全体超平面的集合（古典情形相当于 $Y = \operatorname{Spec} K$，其中 K 是一个域，并且 $\mathscr{E} = \widetilde{E}$，其中 E 是一个有限维 K 向量空间；此时 (4.2.4) 中的 $\mathscr{F}$ 就对应着 E 的超平面，另一方面，$\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的 Y 截面恰好就是 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的 K 有理点 (**I**, 3.4.5)）。

注解 (4.2.5) — 由于 X 到 P 的 Y 态射可以典范地一一对应于它们的图像态射，亦即 $P \otimes_Y X$ 的 X 截面 (**I**, 3.3.14)，故我们看到，反过来也可以由 (4.2.4) 推出 (4.2.3)。我们用 $\operatorname{Hyp}_Y(X, \mathscr{E})$ 来标记 $\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{O}_X = q^*\mathscr{E}$ 中使 $(q^*\mathscr{E})/\mathscr{F}$ 成为可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层的那些拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 子模层 $\mathscr{F}$ 的集合。若 $g: X' \to X$ 是一个 Y 态射，则由 g^* 的右正合性可知，我们有 $g^*((q^*\mathscr{E})/\mathscr{F}) = g^*(q^*\mathscr{E})/g^*\mathscr{F}$，从而后者是可逆的，因而 $\operatorname{Hyp}_Y(X, \mathscr{E})$ 是 Y 概形范畴上的一个反变函子。于是可以把定理 (4.2.4) 的结论解释为，在函子 $\operatorname{Hom}_Y(X, \mathbf{P}(\mathscr{E}))$ 与函子 $\operatorname{Hyp}_Y(X, \mathscr{E})$ *之间可以定义一个典范同构，此两者都是 Y 概形范畴上的*反变函子（关于 X）。这也赋予了射影丛 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 一个用普适性质来描述的方法：即对

任意态射 $q: X \to Y$ 和 $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$ 的任意一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 商模层 $\mathscr{L}$，均有唯一一个 Y 态射 $r: X \to P$，使得 $\mathscr{L} = r^*(\mathscr{O}_P(1))$。这比 §2 和 §3 中的构造更加接近几何直观。

使用同样的方法还可以定义 “Grassmann” 概形。以后再讨论。

推论 (4.2.6) — 假设任何可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层都是平凡的 (**I**, 2.4.8)。设 V 是群 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_Y)$，把它看作是环 $A = \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ 上的模，并设 V^* 是由全体满同态所组成的 V 的子集。则 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的 Y 截面的集合可以典范等同于 V^*/A^*，其中 A^* 是指 A 的单位群。

特别的：

1° 推论 (4.2.6) 可以应用到 Y 是局部概形的情形 (**I**, 2.4.8)。设 Y 是一个任意的概形，y 是 Y 的一点，$Y' = \mathrm{Spec}\,\boldsymbol{k}(y)$；则依照 (4.1.3.1)，$\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的纤维 $p^{-1}(y)$ 可以等同于 $\mathbf{P}(\mathscr{E}^y)$，这里把 $\mathscr{E}^y = \mathscr{E}_y \otimes_{\mathscr{O}_y} \boldsymbol{k}(y) = \mathscr{E}_y/\mathfrak{m}_y\mathscr{E}_y$ 看作是 $\boldsymbol{k}(y)$ 上的向量空间。一般的，若 K 是 $\boldsymbol{k}(y)$ 的一个扩张，则 $p^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} K$ 可以等同于 $\mathbf{P}(\mathscr{E}^y \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} K)$。从而推论 (4.2.6) 表明，$\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的取值在 $\boldsymbol{k}(y)$ 的扩张 K 中的点的集合 (**I**, 3.4.5)，也称 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 在点 y 上的 K 有理纤维，可以等同于 K 向量空间 $\mathscr{E}^y \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} K$ 的对偶所附随的射影空间。

2° 假设 Y 是仿射的，环为 A，进而假设任何可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层都是平凡的；于是若令 $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y^n$；则在 (4.2.6) 中，$V$ 可以等同于 A^n (**I**, 1.3.8)，V^* 可以等同于 A 中的这样一些元素组 $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 所组成的集合，其中 $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 可以生成理想 A；两个这样的元素组定义出 $\mathbf{P}_Y^{n-1} = \mathbf{P}_A^{n-1}$ 的同一个 Y 截面 (换句话说，定义出 $\mathbf{P}_A^{n-1}$ 的同一个 A 值点) 的充分必要条件是其中一个元素组是另一个元素组乘以 A 的某个可逆元而得到的。

这个性质解释了把 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 称为 “射影丛” 的理由。注意到我们在这里定义的 “射影空间” 实际上是古典定义的对偶；这是因为我们需要对任意的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 都定义出 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$，而不是仅限于局部自由的情形。

注解 (4.2.7) — 我们将在第 V 章看到，若 Y 是局部 Noether 且连通的，并且 $\mathscr{E}$ 是局部自由的，再令 $P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$，则任何可逆 $\mathscr{O}_P$ 模层 $\mathscr{L}$ 都同构于一个形如 $\mathscr{L}' \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_P(m)$ 的 $\mathscr{O}_P$ 模层，这里 $\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层，确定到只差一个同构，并且 m 是一个唯一确定的整数。换一种说法就是，$\mathrm{H}^1(P, \mathscr{O}_P^*)$ 同构于 $\mathbb{Z} \times \mathrm{H}^1(Y, \mathscr{O}_Y^*)$ (**0**, 5.4.7)。我们也会看到 (**III**, 2.1.13，且有见于 (**0**, 5.4.10))，若 $m < 0$，则 $p_*(\mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$，若 $m \geqslant 0$，则 $p_*(\mathscr{L}^{\otimes m})$ 同构于 $\mathscr{L}' \otimes_{\mathscr{O}_Y} (\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}))_m$。从而若 $\mathscr{F}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，则任何 Y 态射 $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to \mathbf{P}(\mathscr{F})$ 都可以由一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{L}'$，一个整数 $m \geqslant 0$ 和一个 $\mathscr{O}_Y$ 同态 $\psi: \mathscr{F} \to \mathscr{L}' \otimes_{\mathscr{O}_Y} (\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E}))_m$ 所唯一确定，且使得 ψ 所对应的同态 $\psi^\sharp$ 是一个 $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{F})}$ 模层的满同态。我们还会看到，若上述 Y 态射是一个同构，则 $m = 1$ 并且 $\mathscr{F}$ 同构于 $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{L}'$ ((4.1.4) 的逆命题)。这就使我们能够把 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的自同构芽层

写成群层 $\mathscr{A}ut(\mathscr{E})$（局部同构于 $\mathbf{GL}(n,\mathscr{E})$，其中 n 是 $\mathscr{E}$ 的秩）除以 $\mathscr{O}_Y^*$ 后的商层。

(4.2.8) 保持 (4.2.1) 的记号，设 $u: X' \to X$ 是一个态射；若 Y 态射 $r: X \to P$ 对应着同态 $\varphi: q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$，则 Y 态射 $r \circ u$ 对应着 $u^*(\varphi): u^*q^*\mathscr{E} \to u^*\mathscr{L}$，这可由定义立得。

(4.2.9) 设 $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ 是两个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，$v: \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 是一个满同态，$j = \mathbf{P}(v)$ 是对应的闭浸入 $\mathbf{P}(\mathscr{F}) \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ (4.1.2)。于是若 Y 态射 $r: X \to \mathbf{P}(\mathscr{F})$ 对应着同态 $\varphi: q^*\mathscr{F} \to \mathscr{L}$，则 Y 态射 $j \circ r$ 对应着 $q^*\mathscr{E} \xrightarrow{q^*(v)} q^*\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{L}$；这也是缘自 (4.2.1) 中的定义。

(4.2.10) 设 $\psi: Y' \to Y$ 是一个态射，并且令 $\mathscr{E}' = \psi^*\mathscr{E}$。于是若 Y 态射 $r: X \to P$ 对应着同态 $\varphi: q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$，则 Y' 态射

$$r_{(Y')} \ : \ X_{(Y')} \longrightarrow P' \ = \ \mathbf{P}(\mathscr{E}')$$

对应着 $\varphi_{(Y')}: q^*_{(Y')}(\mathscr{E}') = q^*(\mathscr{E}) \otimes_Y \mathscr{O}_{Y'} \to \mathscr{L} \otimes_Y \mathscr{O}_{Y'}$。事实上，依照 (4.1.3.1)，我们有交换图表

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[d] & P' = P_{(Y')} \arrow[l, "p_{(Y')}"'] \arrow[d, "u"] & X_{(Y')} \arrow[l, "r_{(Y')}"'] \arrow[d, "v"] \\
Y & P \arrow[l, "p"] & X \arrow[l, "r"]
\end{tikzcd}$$
。

根据 (4.1.3.2)，我们有

$$(r_{(Y')})^*(\mathscr{O}_{P'}(1)) \ = \ (r_{(Y')})^*u^*(\mathscr{O}_P(1)) \ = \ v^*r^*(\mathscr{O}_P(1)) \ = \ v^*\mathscr{L} \ = \ \mathscr{L} \otimes_Y \mathscr{O}_{Y'} \ \ ;$$

另一方面，$u^*(\alpha_1^\sharp)$ 与典范同态 $\alpha_1^\sharp: (p_{(Y')})^*(\mathscr{E}') \to \mathscr{O}_{P'}(1)$ 无异；这只要把映到 P 和 P' 中的典范同态 $\alpha_1^\sharp$ 具体写出来就可以看出，与 (4.1.6) 同理。故得我们的陈言。

4.3 Segre 态射

(4.3.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{E}, \mathscr{F}$ 是两个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层；令 $P_1 = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, $P_2 = \mathbf{P}(\mathscr{F})$，并且用 $p_1: P_1 \to Y$, $p_2: P_2 \to Y$ 来标记结构态射。设 $Q = P_1 \times_Y P_2$，并设 $q_1: Q \to P_1$, $q_2: Q \to P_2$ 是典范投影；则 $\mathscr{O}_Q$ 模层 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{P_1}(1) \otimes_Y \mathscr{O}_{P_2}(1) = q_1^*(\mathscr{O}_{P_1}(1)) \otimes_{\mathscr{O}_Q} q_2^*(\mathscr{O}_{P_2}(1))$ 是可逆的，因为它是两个可逆 $\mathscr{O}_Q$ 模层的张量积 (**0**, 5.4.4)。另一方面，若 $r = p_1 \circ q_1 = p_2 \circ q_2$ 是结构态射 $Q \to Y$，则有 $r^*(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{F}) = q_1^*(p_1^*\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_Q} q_2^*(p_2^*\mathscr{F})$ (**0**, 4.3.3)；从而典范满同态 (4.1.5.1)：$p_1^*\mathscr{E} \to \mathscr{O}_{P_1}(1)$, $p_2^*\mathscr{F} \to \mathscr{O}_{P_2}(1)$ 给出一个典范同态（通过张量积运算）

(4.3.1.1) $$s \ : \ r^*(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{L} \ \ ,$$

它显然是满的；从而由此又可以导出 (4.2.2) 一个典范态射

(4.3.1.2) $$\zeta\ :\ \mathbf{P}(\mathscr{E})\times_Y\mathbf{P}(\mathscr{F})\ \longrightarrow\ \mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathscr{F})\ ,$$

称为 *Segre* 态射。

如果 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，则态射 ζ 可以具体写出来，设 $\mathscr{E}=\widetilde{E},\ \mathscr{F}=\widetilde{F}$，其中 E 和 F 是两个 A 模，故有 $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathscr{F}=(E\otimes_A F)^{\sim}$ (**I**, 1.3.12)；令 $R=\mathbf{S}_A(E),\ S=\mathbf{S}_A(F),\ T=\mathbf{S}_A(E\otimes_A F)$；设 $f\in E,\ g\in F$，考虑 Q 的仿射开集

$$D_+(f)\times_Y D_+(g)\ =\ \operatorname{Spec}B\ ,$$

其中 $B=R_{(f)}\otimes_A S_{(g)}$；$\mathscr{L}$ 在这个仿射开集上的限制就是 $\widetilde{L}$，其中

$$L\ =\ (R(1))_{(f)}\otimes_A(S(1))_{(g)}\ ,$$

并且 $c=(f/1)\otimes(g/1)$ 是自由 B 模 L 的一个生成元 (2.5.7)。同态 (4.3.1.1) 对应着 $(E\otimes_A F)\otimes_A B$ 到 L 的同态

$$(x\otimes y)\otimes b\ \longmapsto\ b((x/1)\otimes(y/1))\ 。$$

从而在 (3.7.2) 的记号下，我们有 $v_1(x\otimes y)=(x/f)\otimes(y/g)$；$\zeta$ 在 $D_+(f)\times_Y D_+(g)$ 上的限制是一个从该仿射概形到 $D_+(f\otimes g)$ 的态射，对应于这样一个环同态 $\omega:T_{(f\otimes g)}\to R_{(f)}\otimes_A S_{(g)}$，即对于 $x\in E,\ y\in F$，

(4.3.1.3) $$\omega((x\otimes y)/(f\otimes g))\ =\ (x/f)\otimes(y/g)\ 。$$

(4.3.2) 由 (4.2.3) 知，我们有一个典范同构

(4.3.2.1) $$\tau\ :\ \zeta^*(\mathscr{O}_P(1))\ \xrightarrow{\sim}\ \mathscr{O}_{P_1}(1)\otimes_Y\mathscr{O}_{P_2}(1)\ ,$$

其中我们令 $P=\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\mathscr{F})$。下面证明，对任意 $x\in\Gamma(Y,\mathscr{E})$ 和 $y\in\Gamma(Y,\mathscr{F})$，均有

(4.3.2.2) $$\tau(\alpha_1(x\otimes y))\ =\ \alpha_1(x)\otimes\alpha_1(y)\ 。$$

事实上，问题可以归结到 Y 是仿射概形的情形，此时在 (4.3.1) 和 (2.6.2) 的记号下，在 $(T(1))_{(f\otimes g)}$ 中我们有 $\alpha_1^{f\otimes g}(x\otimes y)=(x\otimes y)/1$，在 $(R(1))_{(f)}$ 中我们有 $\alpha_1^f(x)=x/1$，并且在 $(S(1))_{(g)}$ 中我们有 $\alpha_1^g(y)=y/1$。于是由 (4.2.3) 中所给出的 τ 的定义以及 (4.3.1) 中对于 v_1 的计算立可证明 (4.3.2.2)。由此可以导出公式 (在 (3.1.4) 的记号下)

(4.3.2.3) $$\zeta^{-1}(P_{x\otimes y})\ =\ (P_1)_x\times_Y(P_2)_y\ 。$$

事实上，有见于 (3.3.3)，公式 (4.3.2.3) 可以归结为 (借助 (**I**, 3.2.7 和 3.2.3) 把问题归结到仿射情形) 下面的引理：

引理 (4.3.2.4) — *设 B, B' 是两个 A 代数，并设 $Y=\operatorname{Spec}A$, $Z=\operatorname{Spec}B$, $Z'=\operatorname{Spec}B'$；则对任意 $t\in B$, $t'\in B'$，均有 $D(t\otimes t')=D(t)\times_Y D(t')$。*

事实上，若 $p:Z\times_Y Z'\to Z$ 和 $p':Z\times_Y Z'\to Z'$ 是典范投影，则由 (**I**, 3.2.7) 知，我们有 $p^{-1}(D(t)) = D(t\otimes 1)$ 和 $p'^{-1}(D(t')) = D(1\otimes t')$； 于是由 (**I**, 3.2.7) 和 (**I**, 1.1.9.1) 就可以推出结论，因为 $(t\otimes 1)(1\otimes t')=t\otimes t'$。

命题 (4.3.3) — *Segre 态射是闭浸入。*

事实上，问题在 Y 上是局部性的，故可归结到 Y 是仿射概形的情形。此时在 (4.3.1) 和 (4.3.2) 的记号下，诸 $D_+(f\otimes g)$ 构成 P 的一个拓扑基，因为当 f 跑遍 E 且 g 跑遍 F 时，这些 $f\otimes g$ 可以生成 T。另一方面，依照 (4.3.2.3)，我们有 $\zeta^{-1}(D_+(f\otimes g))=D_+(f)\times_Y D_+(g)$。从而只需 (**I**, 4.2.4) 证明 ζ 在 $D_+(f)\times_Y D_+(g)$ 上的限制是一个映到 $D_+(f\otimes g)$ 中的闭浸入。然则，在相同的记号下，公式 (4.3.1.3) 表明 ω 是满的，这就完成了证明。

(4.3.4) 如果我们只考虑拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层之间的满同态，则 Segre 态射对于 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 是函子性的。事实上，若 $\mathscr{E}\to\mathscr{E}'$ 是一个 $\mathscr{O}_Y$ 满同态，则只需证明图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{P}(\mathscr{E}')\times\mathbf{P}(\mathscr{F}) & \xrightarrow{j\times 1} & \mathbf{P}(\mathscr{E})\times\mathbf{P}(\mathscr{F})\\ {\scriptstyle\zeta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\zeta}\\ \mathbf{P}(\mathscr{E}'\otimes\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F})\end{array}$$

是交换的，其中 j 是指典范闭浸入 $\mathbf{P}(\mathscr{E}')\to\mathbf{P}(\mathscr{E})$。令 $P_1'=\mathbf{P}(\mathscr{E}')$ 并沿用 (4.3.1) 中的记号；则 $j\times 1$ 是一个闭浸入 (**I**, 4.3.1)，并且依照 (4.1.2.1) 和 (**I**, 9.1.5)，我们有

$$(j\times 1)^*(\mathscr{O}_{P_1}(1)\otimes\mathscr{O}_{P_2}(1)) \;=\; j^*(\mathscr{O}_{P_1}(1))\otimes\mathscr{O}_{P_2}(1)) \;=\; \mathscr{O}_{P_1'}(1)\otimes\mathscr{O}_{P_2}(1)\;,$$

只差一个同构；从而我们的陈言缘自 (4.2.8) 和 (4.2.9)。

(4.3.5) 在 (4.3.1) 的记号下，设 $\psi:Y'\to Y$ 是一个态射，并且令 $\mathscr{E}'=\psi^*\mathscr{E}$, $\mathscr{F}'=\psi^*\mathscr{F}$；则 Segre 态射 $\mathbf{P}(\mathscr{E}')\times\mathbf{P}(\mathscr{F}')\to\mathbf{P}(\mathscr{E}'\otimes\mathscr{F}')$ 可以等同于 $\zeta_{(Y')}$。事实上，沿用 (4.3.1) 的记号，并且令 $P_1'=\mathbf{P}(\mathscr{E}')$, $P_2'=\mathbf{P}(\mathscr{F}')$；我们知道 (4.1.3.1) P_i' 可以等同于 $(P_i)_{(Y')}$ $(i=1,2)$，从而结构态射 $P_1'\times P_2'\to Y'$ 可以等同于 $r_{(Y')}$。另一方面，$\mathscr{E}'\otimes\mathscr{F}'$ 可以等同于 $\psi^*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F})$，从而 $\mathbf{P}(\mathscr{E}'\otimes\mathscr{F}')$ 可以等同于 $(\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}))_{(Y')}$ (4.1.3.1)。最后，依照 (4.1.3.1) 和 (**I**, 9.1.11)，$\mathscr{O}_{P_1'}(1)\otimes_{Y'}\mathscr{O}_{P_2'}(1)=\mathscr{L}'$ 可以等同于 $\mathscr{L}\otimes_Y\mathscr{O}_{Y'}$。于是典范同态 $(r_{(Y')})^*(\mathscr{E}'\otimes\mathscr{F}')\to\mathscr{L}'$ 可以等同于 $s_{(Y')}$，从而我们的陈言缘自 (4.2.10)。

注解 (4.3.6) — $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 与 $\mathbf{P}(\mathscr{F})$ 的和概形也可以典范同构于 $\mathbf{P}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ 的一个闭

子概形。事实上，满同态 $\mathscr{E}\oplus\mathscr{F}\to\mathscr{E}$, $\mathscr{E}\oplus\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 分别对应着闭浸入 $\mathbf{P}(\mathscr{E})\to\mathbf{P}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$, $\mathbf{P}(\mathscr{F})\to\mathbf{P}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$；这就归结为证明 $\mathbf{P}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ 的这两个子概形的底空间没有交点。问题在 Y 上是局部性的，于是可以采用 (4.3.1) 中的记号；现在 $\mathbf{S}_n(E)$ 和 $\mathbf{S}_n(F)$ 都等同于 $\mathbf{S}_n(E\oplus F)$ 的子模，并且它们的交集只有 0；若 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 的一个分次素理想，并且对任意 $n\geqslant 0$，均满足 $\mathfrak{p}\cap\mathbf{S}_n(E)\neq\mathbf{S}_n(E)$，则它对应着 $\mathbf{S}(E\oplus F)$ 中的这样一个分次素理想，该素理想与 $\mathbf{S}_n(E)$ 的交集是 $\mathfrak{p}\cap\mathbf{S}_n(E)$ 并且包含 $\mathbf{S}_+(F)$，这是明显的；从而 $\operatorname{Proj}\mathbf{S}(E)$ 和 $\operatorname{Proj}\mathbf{S}(F)$ 中的两个点在 $\operatorname{Proj}\mathbf{S}(E\oplus F)$ 中不可能有相同的像。

4.4 到射影丛的浸入。极丰沛层

命题 (4.4.1) — 设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，$q: X\to Y$ 是一个**有限型**态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

(i) 设 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$\psi: q^*\mathscr{S}\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是分次代数层的一个同态。则为了使 $r_{\mathscr{L},\psi}$ 是处处有定义的并且是一个浸入，必须且只需存在一个整数 $n\geqslant 0$ 和 $\mathscr{S}_n$ 的一个**有限型**拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}$，使得同态 $\psi':\psi_n\circ q^*(j): q^*\mathscr{E}\to\mathscr{L}^{\otimes n}=\mathscr{L}'$ 是满的（j 是指含入 $\mathscr{E}\to\mathscr{S}_n$），并且态射 $r_{\mathscr{L}',\psi'}: X\to\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 是一个浸入。

(ii) 设 $\mathscr{F}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，$\varphi: q^*\mathscr{F}\to\mathscr{L}$ 是一个满同态。则为了使态射 $r_{\mathscr{L},\varphi}: X\to\mathbf{P}(\mathscr{F})$ 是一个浸入，必须且只需存在 $\mathscr{F}$ 的一个**有限型**拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}$，使得同态 $\varphi'=\varphi\circ q(j): q^*\mathscr{E}\to\mathscr{L}$ 是满的（其中 j 是典范含入），并且 $r_{\mathscr{L},\varphi'}: X\to\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 是一个浸入。[①]

(i) 根据 (3.8.5)，$r_{\mathscr{L},\psi}$ 处处有定义并且是浸入这件事情等价于存在 $n\geqslant 0$ 和 $\mathscr{E}$ 使得同态 $q^*\mathscr{E}\to\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是满的并且 $r_{\mathscr{L},\psi'}: X\to\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 是一个处处有定义的浸入，其中 $\mathscr{S}'$ 是 $\mathscr{E}$ 在 $\mathscr{S}$ 中所生成的子代数层。另一方面，我们有一个典范满同态 $\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathscr{S}'$，它对应着一个闭浸入 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'\to\mathbf{P}(\mathscr{E})$ (3.6.2)；故得结论。

(ii) 由于 $\mathscr{F}$ 是它的有限型拟凝聚子模层 $\mathscr{E}_\lambda$ 的归纳极限 (**I**, 9.4.9)，故知 $\mathbf{S}(\mathscr{F})$ 也是诸 $\mathbf{S}(\mathscr{E}_\lambda)$ 的归纳极限；于是由 (3.8.4) 就可以推出结论，只需注意到在 (3.8.4) 的证明中，可以取所有的 n_i 都等于 1 即可：事实上（假设 Y 是仿射的），若 $r=r_{\mathscr{L},\varphi}$ 是一个浸入，则 $r(X)$ 是 $\mathbf{P}(\mathscr{F})$ 的一个拟紧子空间，从而可以用有限个形如 $D_+(f)$ $(f\in F)$ 的开集把它覆盖起来，并使得 $D_+(f)\cap r(X)$ 都是闭的。

定义 (4.4.2) — 设 Y 是一个概形，$q: X\to Y$ 是一个态射。所谓一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 相对于 q 是**极丰沛**的 (très ample)（或称相对于 Y 是极丰沛的，或简称极丰沛的，只要不会造成误解。译注：以下将简称 L 是 q 极丰沛的，或 Y 极丰沛的），是指存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个 Y 浸入 $i: X\to P=\mathbf{P}(\mathscr{E})$，使得 $\mathscr{L}\xrightarrow{\sim} i^*(\mathscr{O}_P(1))$。

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.13) 中，此命题将得到改进。

这也相当于 (4.2.3) 说存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个满同态 $\varphi : q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$，使得 $r_{\mathscr{L},\varphi} : X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ 是一个浸入。

注意到由 Y 极丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层的存在性可以推出 q 是分离的 ((3.1.3) 和 (**I**, 5.5.1, (i) 及 (ii)))。

推论 (4.4.3) — 假设存在一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，并且存在一个 Y 浸入 $i : X \to P = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$，使得 $\mathscr{L}$ 同构于 $i^*(\mathscr{O}_P(1))$；则 $\mathscr{L}$ 是 q 极丰沛的。

事实上，若 $\mathscr{F} = \mathscr{S}_1$，则典范同态 $\mathbf{S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{S}$ 是满的，从而把它所对应的闭浸入 $\operatorname{Proj}\mathscr{S} \to \mathbf{P}(\mathscr{F})$ 与浸入 i 合成，就得到一个浸入 $j : X \to \mathbf{P}(\mathscr{F}) = P'$，并使得 $\mathscr{L}$ 同构于 $j^*(\mathscr{O}_{P'}(1))$ (3.6.3)。

命题 (4.4.4) — 设 $q : X \to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则以下诸性质是等价的:

a) $\mathscr{L}$ 是 q 极丰沛的。

b) $q_*\mathscr{L}$ 是拟凝聚的，典范同态 $\sigma : q^*q_*\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ 是满的，并且态射 $r_{\mathscr{L},\sigma} : X \to \mathbf{P}(q_*\mathscr{L})$ 是一个浸入。

由于 q 是拟紧的，故知若 q 是分离的，则 $q_*\mathscr{L}$ 是拟凝聚的 (**I**, 9.2.2)。

我们知道 (3.4.7) 若存在一个满同态 $\varphi : q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$（$\mathscr{E}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层），则 σ 是满的；进而 φ 的分解 $q^*\mathscr{E} \to q^*q_*\mathscr{L} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{L}$ 典范地对应着一个分解

$$q^*\mathbf{S}(\mathscr{E}) \longrightarrow q^*\mathbf{S}(q_*\mathscr{L}) \longrightarrow \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n} \ ,$$

从而 (3.8.3) $r_{\mathscr{L},\varphi}$ 是浸入的条件意味着 $j = r_{\mathscr{L}.\sigma}$ 也是如此；进而 (4.2.4)，令 $P' = \mathbf{P}(q_*(\mathscr{L}))$，则 $\mathscr{L}$ 同构于 $j^*(\mathscr{O}_{P'}(1))$。从而我们看到 a) 和 b) 是等价的。

推论 (4.4.5) — 假设 q 是拟紧的。则为了使 $\mathscr{L}$ 是 Y 极丰沛的，必须且只需存在 Y 的一个开覆盖 (U_α)，使得每个 $\mathscr{L}|_{q^{-1}(U_\alpha)}$ 都是 U_α 极丰沛的。

事实上，(4.4.4) 中的条件 b) 在 Y 上是局部性的。

命题 (4.4.6) — 设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，$q : X \to Y$ 是一个**有限型**态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则 (4.4.4) 中的条件 a), b) 也与下面两个条件等价:

a′) 存在一个**有限型**拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个满同态 $\varphi : q^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$，使得 $r_{\mathscr{L},\varphi}$ 是一个浸入。

b′) 存在 $q_*(\mathscr{L})$ 的一个**有限型**拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 子模层 $\mathscr{E}$，它具有 a′) 中所述的性质。[1]

[1] 译注：在第 IV 章的 (1.7.13) 中，此命题将得到改进。

易见 a′) 或 b′) 都蕴涵 a)；另一方面，依照 (4.4.1)，a) 蕴涵 a′)，同理 b) 蕴涵 b′)。

推论 (4.4.7) — 假设 Y 是一个拟紧分离概形或者 *Noether*概形。若 $\mathscr{L}$ 是 q 极丰沛的，则可以找到一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$，由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，并可找到一个**笼罩性**的 Y **开**浸入 $i: X \to P = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$，使得 $\mathscr{L}$ 同构于 $i^*(\mathscr{O}_P(1))$。[1]

事实上，(4.4.6) 的条件 b′) 是成立的；于是结构态射 $p: \mathbf{P}(\mathscr{E}) = P' \to Y$ 是分离且有限型的 (3.1.3)，从而若 Y 是拟紧分离概形 (相应的，Noether 概形)，则 P' 也是如此。设 Z 是浸入 $j = r_{\mathscr{L},\varphi}: X \to P'$ 的附随子概形的概闭包 (**I**, 9.5.11)；则易见 j 可以分解为典范含入 $Z \to P'$ 和一个笼罩性开浸入 $i: X \to Z$。然而 Z 可以等同于这样一个概形 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$，其中 $\mathscr{S}$ 是分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 除以它的某个拟凝聚分次理想层后的商代数层 (3.6.2)，从而易见 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的，并可生成 $\mathscr{S}$；进而 $\mathscr{O}_Z(1)$ 就是 $\mathscr{O}_{P'}(1)$ 在典范含入下的逆像 (3.6.3)，从而 $\mathscr{L} = i^*(\mathscr{O}_Z(1))$。

命题 (4.4.8) — 设 $q: X \to Y$ 是一个态射，$\mathscr{L}$ 是一个 q 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，并且存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}'$ 和一个满同态 $q^*\mathscr{E}' \to \mathscr{L}'$。则 $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}'$ 是 q 极丰沛的。

事实上，前提条件表明，存在一个 Y 态射 $r': X \to P' = \mathbf{P}(\mathscr{E}')$ 使得 $\mathscr{L}' = r'^*(\mathscr{O}_{P'}(1))$ (4.2.1)。根据前提条件，存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个 Y 浸入 $r: X \to P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$，使得 $\mathscr{L} = r'^*(\mathscr{O}_P(1))$。令 $Q = \mathbf{P}(\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}')$，考虑 Segre 态射 $\zeta: P \times_Y P' \to Q$ (4.3.1)。由于 r 是一个浸入，故知 $(r, r')_Y: X \to P \times_Y P'$ 也是如此 (**I**, 5.3.14)；然而 ζ 是一个浸入 (4.3.3)，从而 $r'': X \xrightarrow{(r,r')} P \times_Y P' \xrightarrow{\zeta} Q$ 也是如此。另一方面 (4.3.2.1)，$\zeta^*(\mathscr{O}_Q(1))$ 同构于 $\mathscr{O}_P(1) \otimes_Y \mathscr{O}_{P'}(1)$，从而 (**I**, 9.1.4) $r''^*(\mathscr{O}_Q(1))$ 同构于 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$，这就证明了命题。

推论 (4.4.9) — 设 $q: X \to Y$ 是一个态射。

(i) 设 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{K}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层。则为了使 $\mathscr{L}$ 是 q 极丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L} \otimes q^*\mathscr{K}$ 是如此。

(ii) 若 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 是两个 q 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$ 也是如此；特别的，对任意 $n > 0$，$\mathscr{L}^{\otimes n}$ 都是 q 极丰沛的。

(ii) 可由 (4.4.8) 立得，同时可以得到 (i) 的必要性；另一方面，若 $\mathscr{L} \otimes q^*\mathscr{K}$ 是极丰沛的，则 $(\mathscr{L} \otimes q^*\mathscr{K}) \otimes q^*(\mathscr{K}^{-1})$ 也是如此，这是根据上面所述，后面这个 $\mathscr{O}_X$ 模层就同构于 $\mathscr{L}$ (**0**, 5.4.3 和 5.4.5)。

命题 (4.4.10) — (i) 设 Y 是一个概形，则任何可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{L}$ 都是 1_Y 极丰沛的，1_Y 是 Y 上的恒同态射。

(i 改) 设 $f: X \to Y$ 是一个态射，$j: X' \to X$ 是一个浸入。若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 极丰

[1] 译注：在第 IV 章的 (1.7.13) 中，此命题将得到改进。

沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $j^*\mathscr{L}$ 是 $f\circ j$ 极丰沛的。

(ii) 设 Z 是一个拟紧概形，$f:X\to Y$ 是一个有限型态射，$g:Y\to Z$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{K}$ 是一个 g 极丰沛的 $\mathscr{O}_Y$ 模层。则可以找到一个整数 $n_0>0$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，$\mathscr{L}\otimes f^*(\mathscr{K}^{\otimes n})$ 都是 $g\circ f$ 极丰沛的。

(iii) 设 $f:X\to Y, g:Y'\to Y$ 是两个态射，并且令 $X'=X_{(Y')}$。若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $\mathscr{L}'$ 是一个 $f_{(Y')}$ 极丰沛的 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层。

(iv) 设 $f_i:X_i\to Y_i$ $(i=1,2)$ 是两个 S 态射。若 $\mathscr{L}_i$ 是一个 f_i 极丰沛的 $\mathscr{O}_{X_i}$ 模层 $(i=1,2)$，则 $\mathscr{L}_1\otimes_S\mathscr{L}_2$ 是 $f_1\times_S f_2$ 极丰沛的。

(v) 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 是两个态射。若一个 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 $g\circ f$ 极丰沛的，则 $\mathscr{L}$ 也是 f 极丰沛的。

(vi) 设 $f:X\to Y$ 是一个态射，j 是典范含入 $X_{\mathrm{red}}\to X$。若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $j^*\mathscr{L}$ 是 f_{red} 极丰沛的。

性质 (i 改) 可由定义 (4.4.2) 立得，并且易见 (vi) 可由 (i 改) 和 (v) 推出，按照 (**I**, 5.5.12) 中的方法，细节留给读者。为了证明 (v)，与 (**I**, 5.5.12) 同样，我们考虑分解 $X\xrightarrow{\Gamma_f}X\times_Z Y\xrightarrow{p_2}Y$，其中 $p_2=(g\circ f)\times 1_Y$。由前提条件和 (i), (iv) 知，$\mathscr{L}\otimes_{\mathscr{O}_Z}\mathscr{O}_Y$ 是 p_2 极丰沛的；另一方面，我们有 $\mathscr{L}=\Gamma_f^*(\mathscr{L}\otimes_{\mathscr{O}_Z}\mathscr{O}_Y)$ (**I**, 9.1.4)，并且 Γ_f 是一个浸入 (**I**, 5.3.11)；从而可以使用 (i 改)。

为了证明 (i)，可以把定义 (4.4.2) 应用到 $\mathscr{E}=\mathscr{L}$ 上，注意到此时 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 可以等同于 Y (4.1.4)。

下面证明 (iii)。存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个 Y 浸入 $i:X\to\mathbf{P}(\mathscr{E})=P$，使得 $\mathscr{L}=i^*(\mathscr{O}_P(1))$；于是若令 $\mathscr{E}'=g^*\mathscr{E}$，则 $\mathscr{E}'$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}'_Y$ 模层，且我们有 $P'=\mathbf{P}(\mathscr{E}')=P_{(Y')}$ (4.1.3.1)，$i_{(Y')}$ 是一个从 $X_{(Y')}$ 到 P' 的浸入 (**I**, 4.3.2)，并且 $\mathscr{L}'$ 同构于 $(i_{(Y')})^*(\mathscr{O}_{P'}(1))$ (4.2.10)。

现在证明 (iv)，注意到根据前提条件，存在一个 Y_i 浸入 $r_i:X_i\to P_i=\mathbf{P}(\mathscr{E}_i)$，其中 $\mathscr{E}_i$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_{Y_i}$ 模层，并且 $\mathscr{L}_i=r_i^*(\mathscr{O}_{P_i}(1))$ $(i=1,2)$；则 $r_x\times_S r_2$ 是 $X_1\otimes_S X_2$ 到 $P_1\times_S P_2$ 的一个浸入 (**I**, 4.3.1)，并且 $\mathscr{O}_{P_1}(1)\otimes_S\mathscr{O}_{P_2}(1)$ 在这个浸入下的逆像就是 $\mathscr{L}_1\otimes_S\mathscr{L}_2$。另一方面，令 $T=Y_1\times_S Y_2$，并设 p_1,p_2 分别是 T 到 Y_1,Y_2 的投影。于是若令 $P_i'=\mathbf{P}(p_1^*\mathscr{E}_i)$ $(i=1,2)$，则根据 (4.1.3.1) 我们有 $P_i'=P_i\times_{Y_i}T$，故得

$$P_1'\times_T P_2' = (P_1\times_{Y_1}T)\times_T(P_2\times_{Y_2}T) = P_1\times_{Y_1}(T\times_{Y_2}P_2) = P_1\times_{Y_1}(Y_1\times_S P_2) = P_1\times_S P_2$$

只差一个典范同构。同样的，我们有 $\mathscr{O}_{P_i'}(1)=\mathscr{O}_{P_i}(1)\otimes_{Y_i}\mathscr{O}_T$ (4.1.3.2)，并且一个类似的计算（主要基于 (**I**, 9.1.9.1 和 9.1.2)）表明，在上述等同下，$\mathscr{O}_{P_1'}(1)\otimes_T\mathscr{O}_{P_2'}(1)$ 可以等同于 $\mathscr{O}_{P_1}(1)\otimes_T\mathscr{O}_{P_2}(1)$。从而可以把 $r_1\times_S r_2$ 看作是一个从 $X_1\times_S X_2$ 到 $P_1'\times_T P_2'$ 的 T 浸入，因为 $\mathscr{O}_{P_1'}(1)\otimes_T\mathscr{O}_{P_2'}(1)$ 在该浸入下的逆像就是 $\mathscr{L}_1\otimes_S\mathscr{L}_2$。于是利用 (4.4.8) 中的方法并使用 Segre 态射就可以完成证明。

只消再证明 (ii)，可以限于考虑 Z 是一个仿射概形的情形，因为在一般情况下，Z 有一个由仿射开集所组成的有限覆盖 (U_i)；于是若命题对于 $\mathscr{K}|_{g^{-1}(U_i)}$，$\mathscr{L}|_{f^{-1}(g^{-1}(U_i))}$ 和整数 n_i 都是成立的，则只需取 n_0 是诸 n_i 中的最大者，就可以证明命题对于 $\mathscr{K}$ 和 $\mathscr{L}$ 是成立的 (4.4.5)。前提条件说明 f 和 g 都是分离态射，从而 X 和 Y 都是拟紧分离概形。

依照 (4.4.6)，存在一个浸入 $r: X \to P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$，其中 $\mathscr{E}$ 是一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，并且 $\mathscr{L} = r^*(\mathscr{O}_P(1))$。我们现在证明，存在一个相对于合成态射 $P \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$ 极丰沛的 $\mathscr{O}_P$ 模层 $\mathscr{M}$，使得对某个整数 m，$\mathscr{O}_P(1)$ 同构于 $\mathscr{M} \otimes_Y \mathscr{K}^{\otimes(-m)}$。把 (iv) 应用到态射 $h: P \to Y$ 和 1_Y 上，且依照前提条件，我们知道对于 $n \geqslant m+1$，$\mathscr{O}_P(1) \otimes_Y \mathscr{K}^{\otimes n}$ 都是 Z 极丰沛的；由于 r 是一个浸入，并且 $\mathscr{L} \otimes f^*(\mathscr{K}^{\otimes n}) = r^*(\mathscr{O}_P(1) \otimes_Y \mathscr{K}^{\otimes n})$，故由 (i 改) 就可以推出结论。为了证明关于 $\mathscr{O}_P(1)$ 的陈言，我们使用下面的引理：

引理 (4.4.10.1) — 设 Z 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，$g: Y \to Z$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{K}$ 是一个 g 极丰沛的可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层，$\mathscr{E}$ 是一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层。则可以找到一个整数 m_0，使得对任意 $m \geqslant m_0$，$\mathscr{E}$ 都同构于一个形如 $g^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}^{\otimes(-m)}$ 的 $\mathscr{O}_Y$ 模层的商模层，其中 $\mathscr{F}$ 是一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Z$ 模层（依赖于 m）。[①]

这个引理将在 (4.5.10.1) 中证明；读者可以验证，我们在 n° 4.5 中并没有用到 (4.4.10)。

先承认这个引理，则存在一个从 P 到

$$P_1 = \mathbf{P}(g^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}^{\otimes(-m)})$$

的闭浸入 j_1，使得 $\mathscr{O}_P(1)$ 同构于 $j_1^*(\mathscr{O}_{P_1}(1))$ (4.1.2)。另一方面，存在一个从 P_1 到 $P_2 = \mathbf{P}(g^*\mathscr{F})$ 上的同构，它把 $\mathscr{O}_{P_1}(1)$ 等同于 $\mathscr{O}_{P_2}(1) \otimes_Y \mathscr{K}^{\otimes(-m)}$ (4.1.4)；从而我们有一个闭浸入 $j_2: P \to P_2$，使得 $\mathscr{O}_P(1)$ 同构于 $j_2^*(\mathscr{O}_{P_2}(1)) \otimes_Y \mathscr{K}^{\otimes(-m)}$。最后，$P_2$ 可以等同于 $P_3 \otimes_Z Y$，其中 $P_3 = \mathbf{P}(\mathscr{F})$，并且 $\mathscr{O}_{P_2}(1)$ 可以等同于 $\mathscr{O}_{P_3}(1) \otimes_Z \mathscr{O}_Y$ (4.1.3)。根据定义，$\mathscr{O}_{P_2}(1)$ 是 Z 极丰沛的；由于 $\mathscr{K}$ 也是 Z 极丰沛的，故由 (iv) 可知，$\mathscr{O}_{P_2}(1) \otimes_Y \mathscr{K}$ 是 Z 极丰沛的；从而依照 (i 改)，$\mathscr{M} = j_2^*(\mathscr{O}_{P_2}(1) \otimes_Y \mathscr{K})$ 也是如此，并且 $\mathscr{O}_P(1)$ 可以同构于 $\mathscr{M} \otimes_Y \mathscr{K}^{\otimes(-m-1)}$，这就完成了证明。

命题 (4.4.11) — 设 $f: X \to Y$, $f': X' \to Y$ 是两个态射，X'' 是它们的和概形 $X \coprod X'$，$f'': X'' \to Y$ 是这样一个态射：它在 X（相应的，X'）上与 f（相应的，f'）是重合的。设 $\mathscr{L}$（相应的，$\mathscr{L}'$）是一个可逆 $\mathscr{O}_X$（相应的，$\mathscr{O}_{X'}$）模层，并设 $\mathscr{L}''$ 是这样一个 $\mathscr{O}_{X''}$ 模层：它在 X（相应的，X'）上与 $\mathscr{L}$（相应的，$\mathscr{L}'$）是重合

[①] 译注：在第 IV 章的 (1.7.13) 中，此命题将得到改进。

的。于是为了使 $\mathscr{L}''$ 是 f'' 极丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}$ 是 f 极丰沛的并且 $\mathscr{L}'$ 是 f' 极丰沛的。

问题可以立即归结到 Y 是仿射概形的情形。依照 (4.4.10, (i 改))，若 $\mathscr{L}''$ 是极丰沛的，则 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 都是如此。反过来，若 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 都是极丰沛的，则由定义 (4.4.2) 和 (4.3.6) 立知 $\mathscr{L}''$ 是极丰沛的。

4.5 丰沛层

(4.5.1) 给了一个概形 X 和一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$，对任意 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$（只要关于 $\mathscr{L}$ 不存在误解的话），我们令 $\mathscr{F}(n)=\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{L}^{\otimes n}$ $(n\in\mathbb{Z})$；另一方面，令 $S=\bigoplus_{n\geqslant 0}\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n})$（它是 $(\mathbf{0}, 5.4.6)$ 中所定义的分次环 $\Gamma_*(\mathscr{L})$ 的一个分次子环）。若我们把 X 看作是一个 $\mathbb{Z}$ 概形，并把结构态射 $X\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 记为 p，则在分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层同态 $p^*\widetilde{S}\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$ 与分次环 S 的自同态之间有一个一一对应 $(\mathbf{I}, 2.2.5)$；特别的，与 S 的恒同自同构相对应的同态 $\varepsilon: p^*\widetilde{S}\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$ 将被称为典范的。并且它所对应 (3.7.1) 的态射 $G(\varepsilon)\to\operatorname{Proj}S$ 也被称为典范的。

定理 (4.5.2) — 设 X 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，S 是分次环 $\bigoplus_{n\geqslant 0}\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n})$。则以下诸条件是等价的:

a) 当 f 跑遍 S_+ 的齐次元的集合时，诸 X_f 构成 X 的一个拓扑基。

a$'$) 当 f 跑遍 S_+ 的齐次元的集合时，诸 X_f 中的仿射开集构成 X 的一个覆盖。

b) 典范态射 $G(\varepsilon)\to\operatorname{Proj}S$ (4.5.1) 是处处有定义的，并且是一个笼罩性开浸入。

b$'$) 典范态射 $G(\varepsilon)\to\operatorname{Proj}S$ (4.5.1) 是处处有定义的，并且是从 X 的底空间到 $\operatorname{Proj}S$ 的一个子空间上的同胚。

c) 对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，若我们把 $\mathscr{F}(n)$ 中由整体截面所生成的 $\mathscr{O}_X$ 子模层记作 $\mathscr{F}_n$，则 $\mathscr{F}$ 是它的诸 $\mathscr{O}_X$ 子模层 $\mathscr{F}_n(-n)$ $(n>0)$ 的和。

c$'$) 性质 c) 对于 $\mathscr{O}_X$ 的拟凝聚理想层都是成立的。

进而，若 (f_α) 是 S_+ 中的一族齐次元，并且 X_{f_α} 都是仿射开集，则典范态射 $X\to\operatorname{Proj}S$ 在 $\bigcup_\alpha X_{f_\alpha}$ 上的限制是 $\bigcup_\alpha X_{f_\alpha}$ 到 $\bigcup_\alpha(\operatorname{Proj}S)_{f_\alpha}$ 上的一个同构。[①]

b) 蕴涵 b$'$) 是显然的，并且 b$'$) 蕴涵 a) 是依据公式 (3.7.3.1)（有见于 $\varepsilon^\flat$ 是恒同的事实）。条件 a) 蕴涵 a$'$)，因为每个 $x\in X$ 都有一个仿射开邻域 U 使得 $\mathscr{L}|_U$ 同构于 $\mathscr{O}_X|_U$；若 $f\in\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n})$ 使得 $x\in X_f\in U$，则 X_f 也是由所有满足 $(f|_U)(x')\neq 0$ 的点 $x'\in U$ 所组成的集合，从而是一个仿射开集 $(\mathbf{I}, 1.3.6)$。为了证明 a$'$) 蕴涵 b)，只需证明最后一个陈言，同时验证 (3.8.2) 中的条件 (iv) 对于 $X=\bigcup_\alpha X_{f_\alpha}$ 是成立的。后一

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.14) 中，此命题将得到改进。

事实可由 (**I**, 9.3.1, (i)) 立得。至于 (4.5.2) 的最后一个陈言，由于 X_{f_α} 是 $(\operatorname{Proj} S)_{f_\alpha}$ 在 $G(\varepsilon) \to \operatorname{Proj} S$ 下的逆像，故只需应用 (**I**, 9.3.2)。从而 a), a′), b), b′) 都是等价的。

为了证明 a′) 蕴涵 c)，注意到若 X_f 是仿射的 (其中 $f \in S_k$)，则 $\mathscr{F}|_{X_f}$ 是由它的整体截面所生成的 (**I**, 1.3.9)；另一方面 (**I**, 9.3.1, (ii))，这样一个截面 s 总具有 $(t|_{X_f}) \otimes (f|_{X_f})^{-m}$ 的形状，其中 $t \in \Gamma(X, \mathscr{F}(km))$；根据定义，$t$ 也是 $\mathscr{F}_{km}$ 的一个截面，从而 s 是 $\mathscr{F}_{km}(-km)$ 在 X_f 上的一个截面，这就证明了 c)。易见 c) 蕴涵 c′)，只消再证明 c′) 蕴涵 a)。然则，设 U 是 $x \in X$ 的一个开邻域，并设 $\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的这样一个拟凝聚理想层，它所定义的闭子概形以 $X - U$ 为底空间 (**I**, 5.2.1)。则由条件 c′) 可以推出：存在一个整数 $n > 0$ 和 $\mathscr{J}(n)$ 的一个整体截面 f，使得 $f(x) \neq 0$。于是易见 $f \in S_n$，并且 $x \in X_f \subset U$，这就证明了 a)。

若 X 是一个具有 Noether 底空间的概形，则 (4.5.2) 中的等价条件蕴涵着 X 是一个分离概形，因为依照 (4.5.2, b))，它同构于分离概形 $\operatorname{Proj} S$ 的一个子概形。

定义 (4.5.3) — *所谓一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是*丰沛*的* (ample)，*是指 X 是一个拟紧分离概形并且 $\mathscr{L}$ 满足 (4.5.2) 中的等价条件。*

由判别法 (4.5.2, a)) 易见，若 $\mathscr{L}$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层，则对于 X 的任意开集 U，$\mathscr{L}|_U$ 都是一个丰沛 $(\mathscr{O}_X|_U)$ 模层。

由 (4.5.2) 的证明过程可知，诸 X_f 中的仿射开集已经构成了 X 的一个拓扑基。进而：

推论 (4.5.4) — *设 $\mathscr{L}$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层。则对于 X 的任意有限子集 Z 和 Z 的任意邻域 U，均可找到一个整数 n 和一个 $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$，使得 X_f 是 Z 的一个包含在 U 中的仿射开邻域。*

依照 (4.5.2, b))，可以限于证明对 $\operatorname{Proj} S$ 的任意有限子集 Z' 和 Z' 的任意开邻域 U，均可找到一个齐次元 $f \in S_+$，使得 $Z' \subset (\operatorname{Proj} S)_f \subset U$ (2.4.1)。然则，根据定义，U 在 $\operatorname{Proj} S$ 中的补集 Y 是一个闭集，从而具有 $V_+(\mathfrak{J})$ 的形状，其中 $\mathfrak{J}$ 是 S 的一个不包含 S_+ 的分次理想 (2.3.2)；另一方面，根据定义，Z' 中的点是 S_+ 的一些不包含 $\mathfrak{J}$ 的分次素理想 $\mathfrak{p}_i$ (2.3.1)。从而可以找到一个元素 $f \in \mathfrak{J}$，它不属于任何一个 $\mathfrak{p}_i$ (Bourbaki,《交换代数学》, II, §1, n° 1, 命题 2)，由于诸 $\mathfrak{p}_i$ 都是分次的，故而前引中的证明方法还表明，可以假设 f 是齐次的；这个元素就满足我们的要求。

命题 (4.5.5) — *假设 X 是一个拟紧分离概形或者具有 Noether 底空间的概形。则 (4.5.2) 中的条件 a) 到 c′) 还等价于下面的条件:*

d) 对任意有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均可找到一个整数 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，$\mathscr{F}(n)$ 都可由它的整体截面所生成。

d′) 对任意有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均可找到两个整数 $n > 0$, $k > 0$，使

得 $\mathscr{F}$ 同构于 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}^{\otimes(-n)}\otimes\mathscr{O}_X^k$ 的一个商模层。

d″) 性质 d′) 对于 $\mathscr{O}_X$ 的每一个有限型拟凝聚理想层都成立。①

由于 X 是拟紧的，故知若有一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$ 使得 $\mathscr{F}(n)$（也是有限型的）可由它的整体截面所生成，则 $\mathscr{F}(n)$ 总可以由有限个整体截面所生成 (**I**, 9.4.9)，从而 d) 蕴涵 d′)。d′) 蕴涵 d″) 是显然的。由于任何拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{G}$ 都是它的有限型 $\mathscr{O}_X$ 子模层的归纳极限 (**I**, 9.4.9)，从而为了验证 (4.5.2) 中的条件 c′)，只需对 $\mathscr{O}_X$ 的有限型拟凝聚理想层进行验证即可，从而 d″) 蕴涵 c′)。只消再证明若 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，则性质 d) 成立。考虑 X 的一个由 X_{f_i} $(f_i\in S_{n_i})$ 所组成的有限覆盖，可以假设诸 X_{f_i} 都是仿射开集；由于把 f_i 升高适当的方幂不会改变 X_{f_i}，故可假设所有的 n_i 都取同一个整数值 m。根据前提条件，层 $\mathscr{F}|_{X_{f_i}}$ 是有限型的，从而可由它在 X_{f_i} 上的有限个截面 h_{ij} 所生成 (**I**, 1.3.13)；于是存在一个整数 k_0，使得对任意一组 (i,j)，$h_{ij}\otimes f_i^{\otimes k_0}$ 都可以延拓为 $\mathscr{F}(k_0m)$ 的整体截面 (**I**, 9.3.1)。从而当 $k\geqslant k_0$ 时，诸 $h_{ij}\otimes f_i^{\otimes k}$ 也都可以延拓为 $\mathscr{F}(km)$ 的整体截面，并且 $\mathscr{F}(km)$ 可由这些截面所生成。对于 $0<p<m$，$\mathscr{F}(p)$ 也是有限型的，从而存在整数 k_p，使得当 $k\geqslant k_p$ 时，$\mathscr{F}(p)(km)=\mathscr{F}(p+km)$ 都可由它的整体截面所生成。取 n_0 是一个比所有 k_pm 都大的整数，则当 $n\geqslant n_0$ 时，$\mathscr{F}(n)$ 都可由它的整体截面所生成，因为这样的 n 总可以写成 $n=km+p$ 的形式，其中 $k\geqslant k_p$, $0\leqslant p<m$。

命题 (4.5.6) — 设 X 是拟紧分离概形，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

(i) 设 n 是一个 >0 的整数。则为了使 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是丰沛的。

(ii) 设 $\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，假设对任意 $x\in X$，均可找到一个整数 $n>0$ 和 $\mathscr{L}'^{\otimes n}$ 的一个整体截面 s'，使得 $s'(x)\neq 0$。于是若 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，则 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}'$ 也是如此。

性质 (i) 是 (4.5.2) 中的条件 a) 的显然推论，因为 $X_{f^{\otimes n}}=X_f$。另一方面，若 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，则对任意 $x\in X$ 和 x 的任意邻域 U，均可找到 $m>0$ 和 $f\in\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes m})$，使得 $x\in X_f\subset U$ (4.5.2, a))；若 $f'\in\Gamma(X,\mathscr{L}'^{\otimes n})$ 满足 $f'(x)\neq 0$，则对于 $s=f^{\otimes n}\otimes f'^{\otimes m}\in\Gamma(X,(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}')^{\otimes mn})$，我们有 $s(x)\neq 0$，从而 $x\in X_s\subset X_f\subset U$，这就证明了 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}'$ 是丰沛的 (4.5.2, a))。

推论 (4.5.7) — 两个丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层的张量积也是丰沛的。

推论 (4.5.8) — 设 $\mathscr{L}$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层；则可以找到一个整数 $n_0>0$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，$\mathscr{L}^{\otimes n}\otimes\mathscr{L}'$ 都是丰沛的，并且可由它的整体截面所生成。

事实上，由 (4.5.5) 知，存在一个整数 m_0 使得当 $m\geqslant m_0$ 时，$\mathscr{L}^{\otimes m}\otimes\mathscr{L}'$ 可由它的整体截面所生成；从而根据 (4.5.6)，可以取 $n_0=m_0+1$。

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.14) 中，此命题将得到改进。

注解 (4.5.9) — 设 $P = \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ 是可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层的类群 ($\mathbf{0}$, 5.4.7)，并设 P^+ 是由丰沛层的类所组成的 P 的子集。假设 P^+ 不是空的。则由 (4.5.7) 和 (4.5.8) 知，我们有

$$P^+ + P^+ \subset P^+ \ , \qquad P^+ - P^+ = P \ ,$$

换句话说，若把 $P^+ \cup \{0\}$ 中的元素称为 P 中的正元素，则我们可以得到 P 上的一个准序结构，它与 P 上的群结构是相容的，并且甚至是 *Archimede* 的，这是依据 (4.5.8)。这就是某些文献把丰沛层称为“正层”，并且把丰沛层的逆称为“负层”的原因 (我们不采用这种叫法)。

命题 (4.5.10) — 设 Y 是一个仿射概形，$q : X \to Y$ 是一个拟紧分离态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

(i) 若 $\mathscr{L}$ 是 q 极丰沛的，则 $\mathscr{L}$ 是丰沛的。

(ii) 进而假设态射 q 是**有限型**的。则为了使 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，必须且只需它具有下面两个等价性质之一:

e) 存在 $n_0 > 0$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 都是 q 极丰沛的。

e′) 存在 $n > 0$ 使得 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是 q 极丰沛的。

第一个陈言缘自极丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层的定义 (4.4.2)：若 A 是 Y 的环，则有一个 A 模 E 和一个满同态

$$\psi \ : \ q^*\big((\mathbf{S}(E))^{\sim}\big) \longrightarrow \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}$$

使得 $i = r_{\mathscr{L},\psi}$ 是一个处处有定义的浸入 $X \to P = \mathbf{P}(\widetilde{E})$，并且我们有 $\mathscr{L} = i^*(\mathscr{O}_P(1))$；由于诸 $D_+(f)$ (f 是 $(\mathbf{S}(E))_+$ 中的齐次元) 构成 P 的一个拓扑基，并且 $i^{-1}(D_+(f)) = X_{\psi^\flat(f)}$ (3.7.3.1)，故我们看到 (4.5.2) 中的条件 a) 得到满足，从而 $\mathscr{L}$ 是丰沛的。

下面证明，若 q 是有限型的，并且 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，则 $\mathscr{L}$ 满足条件 e)。首先，由 (4.5.2) 的判别法 b) 和 (4.4.1, (i)) 知，存在一个整数 $k_0 > 0$ 使得 $\mathscr{L}^{\otimes k_0}$ 是 q 极丰沛的。另一方面，依照 (4.5.5)，存在一个整数 m_0，使得当 $m \geqslant m_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes m}$ 都是由它的整体截面所生成的。令 $n_0 = k_0 + m_0$；于是若 $n \geqslant n_0$，则我们有 $n = k_0 + m$，其中 $m \geqslant m_0$，故得 $\mathscr{L}^{\otimes n} = \mathscr{L}^{\otimes k_0} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$。由于 $\mathscr{L}^{\otimes m}$ 可由它的整体截面所生成，故由 (4.4.8) 和 (3.4.7) 知，$\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是 q 极丰沛的。最后，易见 e) 蕴涵 e′)，并且依照 (i) 和 (4.5.6, (i))，e′) 蕴涵 $\mathscr{L}$ 是丰沛的。

(4.5.10.1) 引理 (4.4.10.1) 的证明 — 令 $\mathscr{E}(n) = \mathscr{E} \otimes \mathscr{K}^{\otimes n}$；由于 g 是分离的 (4.4.2)，故知 (3.4.8) 的证明方法可以使用，问题归结为证明对充分大的 n 典范同态 $g^* g_*(\mathscr{E}(n)) \to \mathscr{E}(n)$ 都是满的。进而，由于 Z 是拟紧的，从而使用 (3.4.6) 的方法又可以把问题归结到 Z 是仿射概形的情形。然则，依照 (4.5.10, (i))，此时 $\mathscr{K}$ 是丰沛的，从而由 (4.5.5, d′)) 就可以推出结论。

推论 (4.5.11) — 设 Y 是一个仿射概形，$q: X \to Y$ 是一个有限型分离态射，$\mathscr{L}$ 是一个丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则可以找到一个整数 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{L}'$ 都是 q 极丰沛的。

事实上，可以找到 m_0，使得当 $m \geqslant m_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{L}'$ 都是由它的整体截面所生成的 (4.5.8)；另一方面，可以找到 k_0，使得当 $k \geqslant k_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes k}$ 都是 q 极丰沛的。从而当 $k \geqslant k_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes (k+m_0)} \otimes \mathscr{L}'$ 都是极丰沛的 ((4.4.8) 和 (3.4.7))。

注解 (4.5.12) — 我们不知道如果一个 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 使得 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是极丰沛的 (相对于 q)，则同样的结论对 $\mathscr{L}^{\otimes n+1}$ 是否成立。

命题 (4.5.13) — 设 X 是一个拟紧概形，Z 是 X 的一个闭子概形，由 $\mathscr{O}_X$ 的一个幂零拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$ 所定义，j 是典范含入 $Z \to X$。则为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}' = j^*\mathscr{L}$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_Z$ 模层。

条件是必要的。事实上，对于 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 的任意整体截面 f，设 f' 是它的典范像 $f \otimes 1$，它是 $\mathscr{L}'^{\otimes n} = \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$ 在空间 Z (与空间 X 是一致的) 上的截面；易见 $X_f = Z_{f'}$，从而 (4.5.2) 的判别法 a) 表明，$\mathscr{L}'$ 是丰沛的。

为了证明条件是充分的，首先注意到问题可以归结到 $\mathscr{J}^2 = 0$ 的情形，因为可以考虑概形的 (有限) 序列 $X_k = (X, \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{k+1})$，其中每一个都是后一个的闭子概形，并且由一个平方为零的理想所定义。另外 X 是一个分离概形，因为根据前提条件 X_{red} 是分离的 (4.5.3 和 **I**, 5.5.1)。于是 (4.5.2) 的判别法 a) 表明，我们只需证明

引理 (4.5.13.1) — 在 (4.5.13) 的前提条件下，进而假设 $\mathscr{J}$ 是平方为零的；给了一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$，设 g 是 $\mathscr{L}'^{\otimes n}$ 在 Z 上的一个截面，并使得 Z_g 是仿射的。则可以找到一个整数 $m > 0$，使得 $g^{\otimes m}$ 是 $\mathscr{L}^{\otimes nm}$ 的一个整体截面 f 的典范像。

我们有 $\mathscr{O}_X$ 模层的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{J}(n) \longrightarrow \mathscr{O}_X(n) = \mathscr{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathscr{O}_Z(n) \longrightarrow \mathscr{L}'^{\otimes n} \longrightarrow 0\,,$$

因为 $\mathscr{F}(n)$ 作为 $\mathscr{F}$ 的函子是正合的；故有上同调正合序列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{J}(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{L}'^{\otimes n}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{J}(n)) \text{ 。}$$

特别的，g 给出一个元素 $\partial g \in \mathrm{H}^1(X, \mathscr{J}(n))$。

由于 $\mathscr{J}^2 = 0$，故我们可以把 $\mathscr{J}$ 看作是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Z$ 模层，并且对任意 k，均有 $\mathscr{L}'^{\otimes k} \otimes_{\mathscr{O}_Z} \mathscr{J}(n) = \mathscr{J}(n+k)$；从而对任意截面 $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}'^{\otimes k})$，与 s 取张量积的运算都是一个 $\mathscr{O}_Z$ 模层同态 $\mathscr{J}(n) \to \mathscr{J}(n+k)$，因而它给出一个上同调群的同态 $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{J}(n)) \xrightarrow{s} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{J}(n+k))$。

准此，我们下面证明，对于某个充分大的 $m > 0$，我们有

(4.5.13.2) $$g^{\otimes m} \otimes \partial g \ = \ 0 \ 。$$

事实上，Z_g 是 Z 的一个仿射开集，从而我们有 $\mathrm{H}^1(Z_g, \mathscr{J}(n)) = 0$，这里我们把 $\mathscr{J}(n)$ 看作是一个 $\mathscr{O}_Z$ 模层 (**I**, 5.1.9.2)。特别的，若令 $g' = g|_{Z_g}$，并考虑它在映射 $\partial : \Gamma(Z_g, \mathscr{L}'^{\otimes n}) \to \mathrm{H}^1(Z_g, \mathscr{J}(n))$ 下的像，则有 $\partial g' = 0$。为了具体写出这个关系式，注意到在 1 维时 Abel 群层的上同调与 Čech 上同调是一致的 (G, II, 5.9)；从而为了写出 ∂g，只需考虑 X 的一个充分精细的开覆盖 (U_α)，可以假设这个覆盖是有限的，并且由仿射开集所组成，对每一个 α，取一个截面 $g_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{L}^{\otimes n})$ 使得它在 $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{L}'^{\otimes n})$ 中的典范像是 $g|_{U_\alpha}$，考虑上圈 $(g_{\alpha|\beta} - g_{\beta|\alpha})$ 的类，其中 $g_{\alpha|\beta}$ 是 g_α 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的限制 (这个上圈取值在 $\mathscr{J}(n)$ 中) 。进而可以假设 $\partial g'$ 可由覆盖 $(U_\alpha \cap Z_g)$ 和限制 $g_\alpha|_{(U_\alpha \cap Z_g)}$ 按照同样方法来计算 (必要时把 (U_α) 换成一个更精细的覆盖) ；此时关系式 $\partial g' = 0$ 意味着，对每一个 α 都可以找到一个截面 $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha \cap Z_g, \mathscr{J}(n))$，使得 $(g_{\alpha|\beta} - g_{\beta|\alpha})|_{(U_\alpha \cap U_\beta \cap Z_g)} = h_{\alpha|\beta} - h_{\beta|\alpha}$，其中 $h_{\alpha|\beta}$ 是指 h_α 在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap Z_g$ 上的限制 (G, II, 5.11)。据此，存在一个整数 $m > 0$，使得对任意 α，$g^{\otimes m} \otimes h_\alpha$ 都是某个截面 $t_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{J}(n + nm))$ 在 $U_\alpha \cap Z_g$ 上的限制 (**I**, 9.3.1)；从而对任意一对指标 α, β，均有 $g^{\otimes m} \otimes (g_{\alpha|\beta} - g_{\beta|\alpha}) = t_{\alpha|\beta} - t_{\beta|\alpha}$，这就证明了 (4.5.13.2)。

另一方面，注意到若 $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_Z(p)), t \in \Gamma(X, \mathscr{O}_Z(q))$，则在群 $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{J}(p + q))$ 中我们有

(4.5.13.3) $$\partial(s \otimes t) \ = \ (\partial s) \otimes t + s \otimes (\partial t) \ 。$$

事实上，为了计算左右两项，可以选取 X 的一个开覆盖 (U_α)，并且对每一个 α，选取一个截面 $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_X(p))$ (相应的，$t_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_X(q))$)，使得它在 $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_Z(p))$ (相应的，$\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_Z(q))$) 中的典范像就是 $s|_{U_\alpha}$ (相应的，$t|_{U_\alpha}$)；此时由关系式

$$(s_{\alpha|\beta} \otimes t_{\alpha|\beta}) - (s_{\beta|\alpha} \otimes t_{\beta|\alpha}) \ = \ (s_{\alpha|\beta} - s_{\beta|\alpha}) \otimes t_{\alpha|\beta}) + s_{\beta|\alpha} \otimes (t_{\alpha|\beta} - t_{\beta|\alpha})$$

(在同样的记号下) 就可以推出 (4.5.13.3)。从而通过对 k 进行归纳可以得到

(4.5.13.4) $$\partial(g^{\otimes k}) \ = \ (kg^{\otimes(k-1)}) \otimes (\partial g) \ ,$$

再由 (4.5.13.2) 和 (4.5.13.4) 可以推出 $\partial(g^{\otimes(m+1)}) = 0$；从而 $g^{\otimes(m+1)}$ 是 $\mathscr{L}^{\otimes m(m+1)}$ 的某个整体截面 f 的典范像，这就完成了 (4.5.13) 的证明。

推论 (4.5.14) — *设 X 是一个 Noether 分离概形，$j : X_{\mathrm{red}} \to X$ 是典范含入。则为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，必须且只需 $j^*\mathscr{L}$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red}}}$ 模层。*

这缘自 (**I**, 6.1.6)。

4.6 相对丰沛层

定义 (4.6.1) — 设 $f:X\to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。所谓 $\mathscr{L}$ 相对于 f 是丰沛的，或者相对于 Y 是丰沛的，简称 f 丰沛的，或者 Y 丰沛的（甚至可以简称为丰沛的，只要不会与 (4.5.3) 中所定义的概念产生混淆），是指可以找到 Y 的一个仿射开覆盖 (U_α)，使得对任意 α，$\mathscr{L}|_{X_\alpha}$ 都是一个丰沛 $\mathscr{O}_{X_\alpha}$ 模层，其中 $X_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)$。

f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层的存在性蕴涵着 f 必然是分离的 ((4.5.3) 和 (**I**, 5.5.5))。

命题 (4.6.2) — 设 $f:X\to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。于是若 $\mathscr{L}$ 是 f 极丰沛的，则 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的。

这是缘自极丰沛层这个概念的局部性（在 Y 上）(4.4.5) 以及定义 (4.6.1) 和判别法 (4.5.10, (i))。

命题 (4.6.3) — $f:X\to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。并设 $\mathscr{S}$ 是分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\bigoplus_{n\geqslant 0} f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$。则以下诸条件是等价的：

a) $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的。

b) $\mathscr{S}$ 是拟凝聚的，并且典范同态 $\sigma:f^*\mathscr{S}\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$ (**0**, 4.4.3) 使 Y 态射 $r_{\mathscr{L},\sigma}:G(\sigma)\to\operatorname{Proj}\mathscr{S}=P$ 成为一个处处有定义的笼罩性开浸入。

b′) 态射 f 是分离的，Y 态射 $r_{\mathscr{L},\sigma}$ 是处处有定义的，并且是 X 的底空间到 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 的一个子空间上的同胚。

进而，当这些条件成立时，对任意 $n\in\mathbb{Z}$，(3.7.9.1) 所定义的典范同态

$$r^*_{\mathscr{L},\sigma}(\mathscr{O}_P(n))\longrightarrow\mathscr{L}^{\otimes n}\tag{4.6.3.1}$$

都是一个同构。

最后，对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，若令 $\mathscr{M}=\bigoplus_{n\geqslant 0} f_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$，则 (3.7.9.2) 所定义的典范同态

$$r^*_{\mathscr{L},\sigma}\widetilde{\mathscr{M}}\longrightarrow\mathscr{F}\tag{4.6.3.2}$$

都是一个同构。

注意到 a) 蕴涵 f 是分离的，从而 $\mathscr{L}$ 是拟凝聚的 (**I**, 9.2.2, a))。由于 $r_{\mathscr{L},\sigma}$ 是一个“处处有定义的浸入”这个性质在 Y 上是局部性的，故为了证明 a) 蕴涵 b)，可以假设 Y 是仿射的并且 $\mathscr{L}$ 是丰沛的；此时这个陈言缘自 (4.5.2, b))。易见 b) 蕴涵 b′)；最后，为了证明 b′) 蕴涵 a)，只需选取 Y 的一个仿射开覆盖 (U_α)，并且对每一个层 $\mathscr{L}|_{f^{-1}(U_\alpha)}$ 使用判别法 (4.5.2, b′))。

对于最后的两个陈言，我们可以使用 $\sigma^\flat$ 是恒同这个事实，并且把同态 (3.7.9.1) 和 (3.7.9.2) 具体写出来；由此立知 (4.6.3.1) 是一个同构。至于 (4.6.3.2)，可以归结到 Y 是仿射概形的情形，从而 $\mathscr{L}$ 是丰沛的；易见同态 (4.6.3.2) 是单的，并且判别法 (4.5.2, c)) 又表明它是满的，故得结论。

推论 (4.6.4) — 设 (U_α) 是 Y 的一个开覆盖。则为了使 $\mathscr{L}$ 相对于 Y 是丰沛的，必须且只需对任意 α，$\mathscr{L}|_{f^{-1}(U_\alpha)}$ 相对于 U_α 都是丰沛的。

事实上，条件 b) 在 Y 上是局部性的。

推论 (4.6.5) — 设 $\mathscr{K}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层，则为了使 $\mathscr{L}$ 是 Y 丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}\otimes f^*\mathscr{K}$ 是如此。

这是 (4.6.4) 的一个明显的推论，只要取 U_α 使得（对每个 α）$\mathscr{K}|_{U_\alpha}$ 都同构于 $\mathscr{O}_Y|_{U_\alpha}$ 即可。

推论 (4.6.6) — 假设 Y 是仿射的；则为了使 $\mathscr{L}$ 是 Y 丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}$ 是丰沛的。

这可由定义 (4.6.1) 和判别法 (4.6.3, b)) 及 (4.5.2, b)) 立得，因为此时 $\operatorname{Proj}\mathscr{S} = \operatorname{Proj}\Gamma(Y,\mathscr{S})$，这是根据定义。

推论 (4.6.7) — 设 $f: X\to Y$ 是一个拟紧态射。假设存在一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个 Y 态射 $g: X\to P=\mathbf{P}(\mathscr{E})$，使得 g 是 X 的底空间到 P 的一个子空间上的同胚；则 $\mathscr{L}=g^*(\mathscr{O}_P(1))$ 是 Y 丰沛的。

事实上，可以假设 Y 是仿射的；此时这个推论缘自判别法 (4.5.2, a)) 和公式 (3.7.3.1) 及 (4.2.3)。

命题 (4.6.8) — 设 X 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，$f: X\to Y$ 是一个拟紧分离态射。则为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需下列等价条件之一得到满足:

c) 对任意有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均可找到一个整数 $n_0>0$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时典范同态 $\sigma: f^*f_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})\to\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$) 都是满的。

c′) 对于 $\mathscr{O}_X$ 的每个有限型拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$，均可找到一个整数 $n>0$，使得典范同态 $\sigma: f^*f_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})\to\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$) 是满的。[①]

由于 X 是拟紧的，故知 $f(X)$ 也是如此，从而可以找到 $f(X)$ 的一个由 Y 的仿射开集所组成的有限覆盖 (U_i)。设 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，为了证明条件 c)，可以把 Y 换成 U_i，并把 X 换成 $f^{-1}(U_i)$，因为如果对每一个 i 都可以得到一个整数 n_i，使得条件 c) 是成立的（对于 U_i, $f^{-1}(U_i)$ 和 $\mathscr{L}|_{f^{-1}(U_i)}$），则只需取 n_0 是诸 n_i 中的最大者，就

[①] 译注：在第 IV 章的 (1.7.15) 中，此命题将得到改进。

可以得到相对于 Y, X 和 $\mathscr{L}$ 的条件 c)。现在如果 Y 是仿射的，则有见于 (4.6.6)，条件 c) 可由 (4.5.5, d)) 推出。c) 蕴涵 c′) 是显然的。最后，为了证明 c′) 蕴涵 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，仍然可以限于考虑 Y 是仿射概形的情形：事实上，$\mathscr{O}_X|_{f^{-1}(U_i)}$ 的每个有限型拟凝聚理想层 $\mathscr{J}_i$ 都是 $\mathscr{O}_X$ 的某个有限型拟凝聚理想层的限制 (**I**, 9.4.7)，并且条件 c′) 蕴涵 $\mathscr{J}_I \otimes (\mathscr{L}^{\otimes n}|_{f^{-1}(U_i)})$ 可由它的整体截面所生成 (有见于 (**I**, 9.2.2) 和 (3.4.7))；从而只需应用判别法 (4.5.5, d″))。

命题 (4.6.9) — 设 $f : X \to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

(i) 设 n 是一个 > 0 的整数。则为了使 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是 f 丰沛的。

(ii) 设 $\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，并假设存在一个整数 $n > 0$ 使得典范同态 $\sigma : f^*f_*(\mathscr{L}'^{\otimes n}) \to \mathscr{L}'^{\otimes n}$ 是满的。于是若 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，则 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$ 也是如此。

事实上，问题显然可以归结到 Y 是仿射概形的情形，此时命题可由 (4.5.6) 立得。

推论 (4.6.10) — 两个 f 丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层的张量积也是 f 丰沛的。

命题 (4.6.11) — 设 Y 是一个拟紧概形，$f : X \to Y$ 是一个有限型态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则为了使 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需它具有下面的等价性质之一：

d) 存在 $n_0 > 0$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 都是 f 极丰沛的。

d′) 存在 $n > 0$，使得 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是 f 极丰沛的。

若 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，则可以找到 Y 的一个有限仿射开覆盖 (U_i)，使得诸 $\mathscr{L}|_{f^{-1}(U_i)}$ 都是丰沛的。由此可知 (4.5.10)，存在一个整数 n_0，使得对任意 $n \geqslant n_0$ 和任意 i，$\mathscr{L}^{\otimes n}|_{f^{-1}(U_i)}$ 相对于 $f^{-1}(U_i) \to U_i$ 都是极丰沛的，从而 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是 f 极丰沛的 (4.4.5)。反过来，由 d′) 可以推出 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是 f 丰沛的 (4.6.2)，从而 $\mathscr{L}$ 也是如此 (4.6.9, (i))。

推论 (4.6.12) — 设 Y 是一个拟紧概形，$f : X \to Y$ 是一个有限型态射，$\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ 是两个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。若 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，则可以找到 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时 $\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{L}'$ 都是 f 极丰沛的。

证明方法与 (4.6.11) 相同，使用 Y 的一个有限仿射开覆盖以及 (4.5.11)。

命题 (4.6.13) — (i) 在一个概形 Y 上，任何可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层相对于恒同态射 1_Y 都是丰沛的。

(i 改) 设 $f : X \to Y$ 是一个拟紧态射，$j : X' \to X$ 是一个拟紧态射，并且它是从 X' 的底空间到 X 的一个子空间上的同胚。若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $j^*\mathscr{L}$ 是 $f \circ j$ 丰沛的。

(ii) 设 Z 是一个拟紧概形，$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 是两个拟紧态射，$\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，$\mathscr{K}$ 是一个 g 丰沛的 $\mathscr{O}_Y$ 模层，则存在一个整数 n_0，使得当 $n \geqslant$

n_0 时 $\mathscr{L}\otimes f^*(\mathscr{K}^{\otimes n})$ 都是 $g\circ f$ 丰沛的。

(iii) 设 $f:X\to Y$ 是一个拟紧态射，$g:Y'\to Y$ 是一个态射，并且令 $X'=X_{(Y')}$。于是若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\otimes\mathscr{O}_{Y'}$ 是一个 $f_{(Y')}$ 丰沛的 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层。

(iv) 设 $f_i:X_i\to Y_i$ $(i=1,2)$ 是两个拟紧 S 态射。若 $\mathscr{L}_i$ 是一个 f_i 丰沛的 $\mathscr{O}_{X_i}$ 模层 $(i=1,2)$，则 $\mathscr{L}_1\otimes\mathscr{L}_2$ 是 $f_x\times_S f_2$ 丰沛的。

(v) 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 是两个态射，并使得 $g\circ f$ 是拟紧的。于是若一个 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 $g\circ f$ 丰沛的，并且 g 是分离的或者 X 的底空间是局部 *Noether* 的，则 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的。

(vi) 设 $f:X\to Y$ 是一个拟紧态射，j 是典范含入 $X_{\mathrm{red}}\to X$。于是若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $j^*\mathscr{L}$ 是 f_{red} 丰沛的。

首先注意到 (v) 和 (vi) 可由 (i), (i 改) 和 (iv) 导出，方法与 (4.4.10) 相同，只要把 (4.4.5) 换成 (4.6.4)；我们把细节留给读者 (* **(追加$_{\mathbf{III}}$, 18)** — 证明过程需要再明确一下，因为在 (4.4.10) 的记号下，需要先证明浸入 Γ_f 是拟紧的，才可以使用 (i 改)。依照 (4.6.4)，为了证明 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，可以限于考虑 Y 是仿射概形的情形。此外，注意到在 (v) 的每个条件下 f 都是拟紧的 (**I**, 6.6.4)。另一方面，若 g 是分离的，则 Γ_f 是一个闭浸入 (**I**, 5.4.3)，从而是拟紧的 (**I**, 6.6.4)。而若 X 是局部 Noether 的，则由于 Y 是仿射的，并且 f 是拟紧的，故知 X 的底空间是拟紧的，从而是 Noether 的，于是仍可使用 (**I**, 6.6.4) 来证明 Γ_f 是拟紧的。*)。陈言 (i) 可由 (4.4.10, (i)) 和 (4.6.2) 立得。为了证明 (i 改), (iii) 和 (iv)，我们需要下面的引理：

引理 (4.6.13.1) — (i) 设 $u:Z\to S$ 是一个态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_S$ 模层，s 是 $\mathscr{L}$ 的一个整体截面，s' 是 $u^*\mathscr{L}=\mathscr{L}'$ 的与 s 典范对应的整体截面。则我们有 $Z_{s'}=u^{-1}(S_s)$。

(ii) 设 Z,Z' 是两个 S 概形，p,p' 是 $T=Z\times_S Z'$ 的投影，$\mathscr{L}$（相应的，$\mathscr{L}'$）是一个可逆 $\mathscr{O}_Z$ 模层（相应的，$\mathscr{O}_{Z'}$ 模层），t（相应的，t'）是 $\mathscr{L}$（相应的，$\mathscr{L}'$）的一个整体截面，s（相应的，s'）是 $p^*\mathscr{L}$（相应的，$p'^*\mathscr{L}'$）的与 t（相应的，t'）相对应的整体截面。则我们有 $T_{s\otimes s'}=Z_s\times_S Z'_{t'}$。

由定义知，问题可以归结到所有概形都是仿射概形的情形。进而，在 (i) 中，可以假设 $\mathscr{L}=\mathscr{O}_S$，此时 (i) 可由 (**I**, 1.2.2.2) 立得。同样的，在 (ii) 中，可以限于考虑 $\mathscr{L}=\mathscr{O}_Z$, $\mathscr{L}'=\mathscr{O}_{Z'}$ 的情形，此时该陈言归结为引理 (4.3.2.4)。

下面证明 (i 改)。可以假设 Y 是仿射的 (4.6.4)，从而 $\mathscr{L}$ 是丰沛的 (4.6.6)；当 s 跑遍诸 $\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n})$ $(n>0)$ 的并集时，诸 X_s 构成 X 的一个拓扑基 (4.5.2, a))，从而根据前提条件，诸 $j^{-1}(X_s)$ 构成 X' 的一个拓扑基；于是由引理 (4.6.13, (i)) 和 (4.5.2, a)) 就可以推出 $j^*\mathscr{L}$ 是丰沛的。

接下来证明 (iii)。可以再次假设 Y 和 Y' 都是仿射的 (4.6.4)，从而投影 $h: X' \to X$ 是仿射的 (1.5.5)。由于 $\mathscr{L}$ 是丰沛的 (4.6.6)，故当 s 跑遍诸 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ $(n > 0)$ 中的那些使 X_s 成为仿射开集的整体截面的集合时，诸 X_s 是 X 的一个覆盖 (4.5.2, a′))，从而诸 $h^{-1}(X_s)$ 都是仿射的 (1.2.5)，并且覆盖了 X'；从而仍由引理 (4.6.13.1, (i)) 和 (4.5.2, a′)) 可知，$\mathscr{L}'$ 是丰沛的，因为态射 $f_{(Y')}$ 是拟紧的 (**I**, 6.6.4, (iii))。

为了证明 (iv)，首先注意到 $f_1 \times_S f_2$ 是拟紧的 (**I**, 6.6.4, (iv))。进而可以假设 S, Y_1 和 Y_2 都是仿射的 ((4.6.4) 和 (**I**, 3.2.7))，从而 $\mathscr{L}_i$ $(i = 1, 2)$ 都是丰沛的 (4.6.6)。当 s_i 跑遍 $\mathscr{L}_i^{\otimes n_i}$ 中的那些使 $(X_i)_{s_i}$ 成为仿射开集的诸截面时，诸开集 $(X_1)_{s_1} \times_S (X_2)_{s_2}$ 构成 $X_1 \times_S X_2$ 的一个覆盖 (4.5.2, a′))。此外，把 s_1 和 s_2 换成适当的方幂并不会改变 $(X_i)_{s_i}$，从而可以假设 $n_1 = n_2$。此时由 (4.6.13.1, (ii)) 和 (4.5.2, a′)) 就可以推出 $\mathscr{L}_1 \otimes_S \mathscr{L}_2$ 是丰沛的，故得我们的陈言，因为 $Y_1 \times_S Y_2$ 是仿射的 (4.6.6)。

只消再证明 (ii)。使用 (4.4.10) 的方法，并利用 (4.6.4)，则可以把问题归结到 Z 是仿射概形的情形。此时 $\mathscr{K}$ 是丰沛的，并且 Y 是拟紧的，故可找到有限个截面 $s_i \in \Gamma(Y, \mathscr{K}^{\otimes k_i})$，使得诸 Y_{s_i} 都是仿射的，并可覆盖 Y (4.5.2, a′))；把诸 s_i 换成适当的方幂，则可以进而假设所有 k_i 都取同一个整数值 k。设 s'_i 是 $f^*(\mathscr{K}^{\otimes k})$ 的与 s_i 典范对应的整体截面，则诸 $X_{s'_i} = f^{-1}(Y_{s_i})$ (4.6.1.13, (i)) 可以覆盖 X。由于 $\mathscr{L}|_{X_{s'_i}}$ 是丰沛的 (4.6.4 和 4.6.6)，故而对每个 i 都可以找到有限个 $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n_{ij}})$，使得诸 $X_{t_{ij}}$ 都是仿射的，包含在 $X_{s'_i}$ 中，并且覆盖了 $X_{s'_i}$ (4.5.2, a′))；此外还可以假设诸 n_{ij} 都取同一个数值 n。据此，由于 X 是拟紧分离的，故可找到一个整数 $m > 0$，并对每一组 (i, j) 找到一个截面

$$u_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes_X f^*(\mathscr{K}^{\otimes mk}))$$

使得 $t_{ij} \otimes s_i'^{\otimes m}$ 就是 u_{ij} 在 $X_{s'_i}$ 上的限制 (**I**, 9.3.1)；进而我们有 $X_{u_{ij}} = X_{t_{ij}}$，从而诸 $X_{u_{ij}}$ 都是仿射的，并且覆盖了 X。此外还可以假设 m 具有 nr 的形状；于是若令 $n_0 = rk$，则 (4.5.2, a′)) 我们看到 $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*(\mathscr{K}^{\otimes n_0})$ 是丰沛的。进而，存在 $h_0 > 0$，使得当 $h \geqslant h_0$ 时 $\mathscr{K}^{\otimes h}$ 都是由它的整体截面所生成的 (4.5.5)；从而根据逆像的定义 (**0**, 3.7.1 和 4.4.1)，对于 $h \geqslant h_0$，$f^*(\mathscr{K}^{\otimes h})$ 都可由它的整体截面所生成。由此可知，当 $h \geqslant h_0$ 时 $\mathscr{L} \otimes f^*(\mathscr{K}^{\otimes n_0 + h})$ 都是丰沛的 (4.5.6)，这就完成了证明。

注解 (4.6.14) — 在 (ii) 的条件下，$\mathscr{L} \otimes f^*\mathscr{K}$ 未必是 $g \circ f$ 丰沛的，这一点需要小心；事实上，由于 $\mathscr{L} \otimes f^*(\mathscr{K}^{-1})$ 也是 f 丰沛的 (4.6.5)，从而由 $\mathscr{L} \otimes f^*\mathscr{K}$ 是 $g \circ f$ 丰沛的将可推出 $\mathscr{L}$ 是 $g \circ f$ 丰沛的；特别的，取 g 是恒同态射，则所有可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层都成为 f 丰沛的，这在一般情况下并不成立 (参看 (5.1.6), (5.3.4, (i)) 和 (5.3.1))。

命题 (4.6.15) — 设 $f: X \to Y$ 是一个拟紧态射，$\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的一个局部幂零的拟凝聚理想层，Z 是 X 的由 $\mathscr{J}$ 所定义的闭子概形，$j: Z \to X$ 是典范含入。则为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需 $j^*\mathscr{L}$ 是 $f \circ j$ 丰沛的。

事实上，问题在 Y 上是局部性的 (4.6.4)，故可假设 Y 是仿射的；此时 X 是拟紧的，又可假设 $\mathscr{J}$ 是幂零的。有见于 (4.6.6)，命题与 (4.5.13) 无异。

推论 (4.6.16) — 设 X 是一个局部 *Noether* 概形，$f : X \to Y$ 是一个拟紧态射。则为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需它在典范含入 $X_{\mathrm{red}} \to X$ 下的逆像 $\mathscr{L}'$ 是 f_{red} 丰沛的。

我们已经知道条件是必要的 (4.6.13, (vi))；反过来，若该条件得到满足，则为了证明 $\mathscr{L}$ 对于 f 是丰沛的，可以限于考虑 Y 是仿射概形的情形 (4.6.4)；此时 Y_{red} 也是仿射的，从而 $\mathscr{L}'$ 是丰沛的 (4.6.6)，再依照 (4.5.13)，$\mathscr{L}$ 也是如此，因为此时 X 是 Noether 的，并且 X_{red} 作为 X 的闭子概形是由一个幂零的拟凝聚理想层所定义的 (**I**, 6.1.6)。

命题 (4.6.17) — 记号和前提条件与 (4.4.11) 相同，则为了使 $\mathscr{L}''$ 是 f'' 丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的并且 $\mathscr{L}'$ 是 f' 丰沛的。

条件的必要性缘自 (4.6.13, (i 改))。为了证明条件是充分的，可以限于考虑 Y 是仿射概形的情形，此时把判别法 (4.5.2, a)) 应用到 $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}''$ 上就可以推出 $\mathscr{L}''$ 是丰沛的，这里需要一件事：$\mathscr{L}$ 在 X 上的任何截面都可以 (0) 延拓为 $\mathscr{L}''$ 在 X'' 上的一个截面。

命题 (4.6.18) — 设 Y 是一个拟紧概形，$\mathscr{S}$ 是一个有限型拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$X = \operatorname{Proj} \mathscr{S}$，$f : X \to Y$ 是结构态射。则 f 是有限型的，并且存在一个整数 $d > 0$，使得 $\mathscr{O}_X(d)$ 是可逆的，并且是 f 丰沛的。

依照 (3.1.10)，存在一个整数 $d > 0$，使得 $\mathscr{S}^{(d)}$ 可由 $\mathscr{S}_d$ 生成。我们知道在 X 到 $X^{(d)} = \operatorname{Proj} \mathscr{S}^{(d)}$ 的典范同构下，$\mathscr{O}_X(d)$ 可以等同于 $\mathscr{O}_{X^{(d)}}(1)$ (3.2.9, (ii))。从而问题可以归结到 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的这个情形；此时命题缘自 (4.4.3) 和 (4.6.2) (有见于 f 是一个有限型态射的事实 (3.4.1))。

§5. 拟仿射态射；拟射影态射；紧合态射；射影态射

5.1 拟仿射态射

定义 (5.1.1) — 所谓拟仿射 (quasi-affine) 概形，是指这样一种概形，它与某个仿射概形在其拟紧开集上所诱导的开子概形是同构的。所谓一个态射 $f : X \to Y$ 是拟仿射的，是指可以找到 Y 的一个仿射开覆盖 (U_α)，使得 $f^{-1}(U_\alpha)$ 都是拟仿射概形，此时我们也称 X (在 f 下成为 Y 概形) 是一个拟仿射 Y 概形。

易见拟仿射态射都是分离 (**I**, 5.5.5 和 5.5.8) 且拟紧的 (**I**, 6.6.1)；仿射态射显然是拟仿射的。

还记得对任意概形 X，若令 $A=\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$，则恒同同态 $A\to A=\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 都定义了一个态射 $X\to\operatorname{Spec}A$，称为典范的 (**I**, 2.2.4)；此外，它也是 (4.5.1) 中所定义的典范态射在 $\mathscr{L}=\mathscr{O}_X$ 时的特殊情形，因为 $\operatorname{Proj}A[T]$ 可以典范等同于 $\operatorname{Spec}A$ (3.1.7)。

命题 (5.1.2) — 设 X 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，A 是环 $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$。则以下诸条件是等价的:

a) X 是拟仿射概形。

b) 典范态射 $u:X\to\operatorname{Spec}A$ 是一个开浸入。

b′) 典范态射 $u:X\to\operatorname{Spec}A$ 给出了由 X 到 $\operatorname{Spec}A$ 的底空间的一个子空间上的同胚。

c) $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X$ 是 u 极丰沛的 (4.4.2)。

c′) $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X$ 是丰沛的 (4.5.1)。

d) 当 f 跑遍 A 的元素时，诸 X_f 构成 X 的一个拓扑基。

d′) 当 f 跑遍 A 的元素时，诸 X_f 中的仿射开集构成 X 的一个覆盖。

e) 任何拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层都可由它的整体截面所生成。

e′) $\mathscr{O}_X$ 的每个有限型拟凝聚理想层都可由它的整体截面所生成。[1]

易见 b) 蕴涵 a)，并且把 (4.4.4) 的判别法 b) 应用到恒同态射上 (有见于上面的注解) 就可以推出 a) 蕴涵 c)；另一方面，c) 蕴涵 c′) (4.5.10, (i))，并且由 (4.5.2, b) 和 b′)) 知，c′), b) 和 b′) 是等价的。最后，依照 (4.5.2, a), a′), c)) 和 (4.5.5, d″))，c′) 等价于 d), d′), e), e′) 中的每一个。

进而注意到在上述记号下，X_f 中的那些仿射开集构成 X 的一个拓扑基，并且典范态射 u 是一个笼罩 (4.5.2)。

推论 (5.1.3) — 设 X 是一个拟紧概形。若有一个从 X 到仿射概形 Y 的态射 $v:X\to Y$，并且它是 X 到 Y 的一个开子空间上的同胚，则 X 是拟仿射的。

事实上，可以找到 $\mathscr{O}_Y$ 的一族整体截面 (g_α)，使得诸 $D(g_\alpha)$ 构成 $v(X)$ 的一个拓扑基；若 $v=(\psi,\theta)$，并且令 $f_\alpha=\theta(g_\alpha)$，则有 $X_{f_\alpha}=\psi^{-1}(D(g_\alpha))$ (**I**, 2.2.4.1)，从而诸 X_{f_α} 构成 X 的一个拓扑基，并且 (5.1.2) 的条件 d) 得到满足。

推论 (5.1.4) — 若 X 是一个拟仿射概形，则**任何**可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层都是极丰沛的 (相对于典范态射)，当然也是丰沛的。

事实上，一个这样的模层 $\mathscr{L}$ 总是由它的整体截面所生成的 (5.1.2, e))，从而 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{O}_X=\mathscr{L}$ 是极丰沛的 (4.4.8)。

推论 (5.1.5) — 设 X 是一个拟紧概形。若有一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$，使得 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}^{-1}$ 都是丰沛的，则 X 是拟仿射概形。

[1] 译注：在第 IV 章的 (1.7.16) 中，此命题将得到改进。

事实上，此时 $\mathscr{O}_X = \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ 是丰沛的 (4.5.7)。

命题 (5.1.6) — 设 $f : X \to Y$ 是一个拟紧态射。则以下诸条件是等价的:

a) f 是拟仿射的。

b) $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{A}(X)$ 是拟凝聚的，并且恒同同态 $\mathscr{A}(X) \to \mathscr{A}(X)$ 所对应的典范态射 $X \to \operatorname{Spec} \mathscr{A}(X)$ (1.2.7) 是一个开浸入。

b′) $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{A}(X)$ 是拟凝聚的，并且典范态射 $X \to \operatorname{Spec} \mathscr{A}(X)$ 是由 X 到 $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(X)$ 的一个子空间上的同胚。

c) $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X$ 是 f 极丰沛的。

c′) $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X$ 是 f 丰沛的。

d) 态射 f 是分离的，并且对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，典范同态 $\sigma : f^*f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ (**0**, 4.4.3) 都是满的。

进而，如果 f 是拟仿射的，则任何可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 都是 f 极丰沛的。

a) 和 c′) 的等价性缘自 f 丰沛性在 Y 上的局部性 (4.6.4) 以及定义 (5.1.1) 和判别法 (5.1.2, c′))。其余性质在 Y 上都是局部性的，从而可由 (5.1.2) 和 (5.1.4) 立得，有见于下面的事实：若 f 是分离的，则 $f_*\mathscr{F}$ 是拟凝聚的 (**I**, 9.2.2, a))。

推论 (5.1.7) — 设 $f : X \to Y$ 是一个拟仿射态射。则对于 Y 的任意开集 U，f 的限制 $f^{-1}(U) \to U$ 都是拟仿射的。

推论 (5.1.8) — 设 Y 是一个仿射概形，$f : X \to Y$ 是一个拟紧态射。则为了使 f 是拟仿射的，必须且只需 X 是一个拟仿射概形。

这可由 (5.1.6) 和 (4.6.6) 立得。

推论 (5.1.9) — 设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，$f : X \to Y$ 是一个**有限型**态射。于是若 f 是拟仿射的，则可以找到 $\mathscr{A}(X) = f_*\mathscr{O}_X$ 的一个**有限型** (**I**, 9.6.2) 拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子代数层 $\mathscr{B}$，使得对应于 (1.2.7) 典范含入 $\mathscr{B} \to \mathscr{A}(X)$ 的态射 $X \to \operatorname{Spec} \mathscr{B}$ 是一个浸入。进而，$\mathscr{A}(X)$ 的任何一个包含 $\mathscr{B}$ 的有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子代数层 $\mathscr{B}'$ 都具有这个性质。[①]

事实上，$\mathscr{A}(X)$ 是它的有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子代数层的归纳极限 (**I**, 9.6.5)；于是这个结果是 (3.8.4) 的一个特殊情形，有见于 $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(X)$ 和 $\operatorname{Proj} \mathscr{A}(X)[T]$ 的等同 (3.1.7)。

命题 (5.1.10) — (i) 若一个拟紧态射 $X \to Y$ 可以给出 X 的底空间到 Y 的底空间的一个子空间上的同胚 (特别的，若它是一个闭浸入)，则它是拟仿射的。

(ii) 两个拟仿射态射的合成也是拟仿射的。

(iii) 若 $f : X \to Y$ 是一个拟仿射 S 态射，则对任意基扩张 $S' \to S$，态射 $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ 都是拟仿射的。

[①] 译注：在第 IV 章的 (1.7.16) 中，此命题将得到改进。

(iv) 若 $f : X \to Y$ 和 $g : X' \to Y'$ 是两个拟仿射 S 态射，则 $f \times_S g$ 是拟仿射的。

(v) 设 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 是两个态射，且使得 $g \circ f$ 是拟仿射的，于是若 g 是分离的，或者 X 的底空间是局部 *Noether* 的，则 f 是拟仿射的。

(vi) 若 f 是一个拟仿射态射，则 f_{red} 也是如此。

有见于判别法 (5.1.6, c′))，陈言 (i), (iii), (iv), (v) 和 (vi) 分别缘自 (4.6.13, (i 改), (iii), (iv), (v) 和 (vi))。为了证明 (ii)，可以限于考虑 Z 是仿射概形的情形，此时把 (4.6.13, (ii)) 应用到 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$ 和 $\mathscr{K} = \mathscr{O}_Y$ 上就可以直接推出结论。

注解 (5.1.11) — 设 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 是两个态射，且使得 $X \times_Z Y$ 是局部 Noether 的。于是图像浸入 $\Gamma_f : X \to X \times_Z Y$ 是拟仿射的，因为它是拟紧的 (**I**, 6.3.5)，并且 (**I**, 5.5.12) 表明，(v) 的结论在去掉 g 是分离态射的条件后仍然是有效的。

命题 (5.1.12) — 设 $f : X \to Y$ 是一个拟紧态射，$g : X' \to X$ 是一个拟仿射态射。于是若 $\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $g^*\mathscr{L}$ 是一个 $f \circ g$ 丰沛的 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层。

事实上，由于 $\mathscr{O}_X$ 是 g 极丰沛的，并且问题在 Y 上是局部性的 (4.6.4)，故由 (4.6.13, (ii)) 知，（对于仿射的 Y）可以找到一个整数 n，使得

$$g^*(\mathscr{L}^{\otimes n}) \;=\; (g^*\mathscr{L})^{\otimes n}$$

是 $f \circ g$ 丰沛的，从而 $g^*\mathscr{L}$ 是 $f \circ g$ 丰沛的 (4.6.9)。

5.2 Serre 判别法

定理 (5.2.1) （Serre 判别法）— 设 X 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形。则以下诸条件是等价的:

a) X 是仿射概形。

b) 可以找到一族元素 $f_\alpha \in A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$，使得诸 X_{f_α} 都是仿射的，并且这些 f_α 在 A 中生成的理想就等于 A。

c) 函子 $\Gamma(X, \mathscr{F})$（关于 $\mathscr{F}$）在拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层的范畴上是正合的，换句话说，若

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

是拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层的正合序列，则序列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}'') \longrightarrow 0$$

是正合的。

c′) 性质 c) 对于 $\mathscr{F}$ 同构于有限积 $\mathscr{O}_X^n$ 的一个 $\mathscr{O}_X$ 子模层的那些正合序列 $(*)$（在拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层范畴中）都是成立的。

d) 对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均有 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F})=0$。

d′) 对于 $\mathscr{O}_X$ 的每个拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$，均有 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{J})=0$。[①]

易见 a) 蕴涵 b)；另一方面，b) 蕴涵诸 X_{f_α} 可以覆盖 X，因为根据前提条件，截面 1 是一些 f_α 的线性组合，于是这些 $D(f_\alpha)$ 可以覆盖 $\operatorname{Spec} A$。从而 (4.5.2) 的最后一个陈言蕴涵着 $X\to\operatorname{Spec} A$ 是一个同构。

我们已经知道 a) 蕴涵 c) (**I**, 1.3.11)，并且 c) 显然蕴涵 c′)。下面证明 c′) 蕴涵 b)。首先，由 c′) 可以推出，对任意闭点 $x\in X$ 和 x 的任意开邻域 U，均可找到 $f\in A$，使得 $x\in X_f\subset U$。事实上，设 $\mathscr{J}$（相应的，$\mathscr{J}'$）是 $\mathscr{O}_X$ 的这样一个拟凝聚理想层，它定义了 X 的以 $X-U$（相应的，$(X-U)\cup\{x\}$）为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)；则易见我们有 $\mathscr{J}'\subset\mathscr{J}$，并且 $\mathscr{J}''=\mathscr{J}/\mathscr{J}'$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，以 $\{x\}$ 为支集，并且满足 $\mathscr{J}''_x=\boldsymbol{k}(x)$。把条件 c′) 应用到正合序列 $0\to\mathscr{J}'\to\mathscr{J}\to\mathscr{J}''\to 0$ 上，则可以推出 $\Gamma(X,\mathscr{J})\to\Gamma(X,\mathscr{J}'')$ 是满的。从而 $\mathscr{J}''$ 的那个在 x 处的芽是 1_x 的截面就是某个截面 $f\in\Gamma(X,\mathscr{J})\subset\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 的像，并且根据定义，$f_x=1_x$，并且在 $X-U$ 中有 $f_y=0$，这证明了我们的陈言。此外，若 U 是仿射的，则 X_f 也是如此 (**I**, 1.3.6)，从而诸 X_f $(f\in A)$ 中的那些仿射开集的并集 Z 是一个包含了 X 的所有闭点的开集；由于 X 是拟紧 Kolmogoroff 空间，故必有 $Z=X$ (**0**, 2.1.3)。而因为 X 是拟紧的，所以我们能找到有限个元素 $f_i\in A$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，使得诸 X_{f_i} 都是仿射的，并且覆盖了 X。考虑由诸截面 f_i 所定义的这个同态 $\mathscr{O}_X^n\to\mathscr{O}_X$ (**0**, 5.1.1)；由于对任意 $x\in X$，总有一个 $(f_i)_x$ 是可逆的，故知该同态是满的，从而我们得到一个正合序列 $0\to\mathscr{R}\to\mathscr{O}_X^n\to\mathscr{O}_X\to 0$，其中 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{O}_X^n$ 的一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 子模层。于是由 c′) 知，相应的同态 $\Gamma(X,\mathscr{O}_X^n)\to\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 是满的，这就证明了 b)。

最后，a) 蕴涵 d) (**I**, 5.1.9.2)，并且 d) 显然蕴涵 d′)。只消再证明 d′) 蕴涵 c′)。然则，若 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{O}_X^n$ 的一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 子模层，则滤解 $0\subset\mathscr{O}_X\subset\mathscr{O}_X^2\subset\ldots\subset\mathscr{O}_X^n$ 在 $\mathscr{F}'$ 上定义了一个滤解，即 $\mathscr{F}'_k=\mathscr{F}\cap\mathscr{O}_X^k$ $(0\leqslant k\leqslant n)$，它们都是拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 (**I**, 4.1.1)，并且 $\mathscr{F}'_{k+1}/\mathscr{F}'_k$ 同构于拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X^{k+1}/\mathscr{O}_X^k=\mathscr{O}_X$ 的一个 $\mathscr{O}_X$ 子模层，也就是说，同构于 $\mathscr{O}_X$ 的一个拟凝聚理想层。从而由条件 d′) 知 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}'_{k+1}/\mathscr{F}'_k)=0$；于是利用上同调正合序列 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}'_k)\to\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}'_{k+1})\to\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}'_{k+1}/\mathscr{F}'_k)$ 我们可以对所有 k 归纳地证明 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}'_k)=0$。证毕。

注解 (5.2.1.1) — 如果 X 是一个 *Noether* 概形，则在条件 c′) 和 d″) 中，我们可以把“拟凝聚”都换成“凝聚”。事实上，在 c′) 蕴涵 b) 的证明中，$\mathscr{J}$ 和 $\mathscr{J}'$ 都是凝聚理想层，并且另一方面，凝聚层的任意拟凝聚子模层也都是凝聚的 (**I**, 6.1.1)；故得结论。

推论 (5.2.2) — 设 $f:X\to Y$ 是一个拟紧分离态射。则以下诸条件是等价的:

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.17) 中，此命题将得到改进。

a) f 是仿射态射。

b) 函子 f_* 在拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层的范畴上是正合的。

c) 对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均有 $\mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F} = 0$。

c′) 对于 $\mathscr{O}_X$ 的每个拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$，均有 $\mathrm{R}^1 f_*\mathscr{J} = 0$。①

* **(订正$_{\mathbf{III}}$, 19)** — 这个陈述是错误的，事实上，条件 b), c) 和 c′) 在 Y 上不是局部性的，因为我们不知道对于 Y 的一个开集 U 来说，一个拟凝聚 $(\mathscr{O}_X|_{f^{-1}(U)})$ 模层是否总是某个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层在 $f^{-1}(U)$ 上的限制。需作如下修改：把"设 $f: X \to Y$ 是一个拟紧分离态射"改为"设 X, Y 是两个概形，其中 X 是分离概形或者是具有局部 Noether 底空间的概形，并设 $f: X \to Y$ 是一个拟紧态射"。在证明中，注意到依照 (**I**, 5.5.5 和 5.5.8)，当 X 是分离概形时 f 也是分离的，从而在两个情形下都可以使用 (**I**, 9.2.2)。*

由于所有这些条件在 Y 上都是局部性的，故而根据函子 $\mathrm{R}^1 f_*$ 的定义 (T, 3.7.3)，可以假设 Y 是仿射的。此时若 f 是仿射的，则 X 也是仿射的，从而性质 b) 与 (**I**, 1.6.4) 无异。反过来我们证明 b) 蕴涵 a)：对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，$f_*\mathscr{F}$ 都是拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**I**, 9.2.2, a))。根据前提条件，函子 $f_*\mathscr{F}$ 对于 $\mathscr{F}$ 是正合的，并且因为 Y 是仿射的，故知函子 $\Gamma(Y, \mathscr{G})$ 对于 $\mathscr{G}$ 是正合的（在拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层范畴上）(**I**, 1.3.11)；从而 $\Gamma(Y, f_*\mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ 对于 $\mathscr{F}$ 是正合的，依照 (5.2.1, c))，这证明了我们的陈言。

若 f 是仿射的，则对于 Y 的任意仿射开集 U，$f^{-1}(U)$ 都是仿射的 (1.3.2)，从而 $\mathrm{H}^1(f^{-1}(U), \mathscr{F}) = 0$ (5.2.1, d))，根据定义，这就表明 $\mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F} = 0$。最后假设条件 c′) 得到满足；则 Leray 谱序列 (G, II, 4.17.1 和 I, 4.5.1) 中的低次项可以给出下面的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y, f_*\mathscr{J}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{J}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{J}) \ 。$$

由于 Y 是仿射的，并且 $f_*\mathscr{J}$ 是拟凝聚的 (**I**, 9.2.2, a))，故有 $\mathrm{H}^1(Y, f_*\mathscr{J}) = 0$ (5.2.1)；于是条件 c′) 蕴涵 $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{J}) = 0$，从而由 (5.2.1) 知，$X$ 是一个仿射概形。

推论 (5.2.3) — 若 $f: X \to Y$ 是一个仿射态射，则对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，典范同态 $\mathrm{H}^1(Y, f_*\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F})$ 都是一一的。

事实上，Leray 谱序列中的低次项给出下面的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y, f_*\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F}) \ ,$$

从而由 (5.2.2) 就可以推出结论。

注解 (5.2.4) — 在第 III 章 §1 中，我们将证明，若 X 是仿射的，则对任意 $i > 0$ 和任意拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，均有 $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) = 0$。

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.18) 中，此命题将得到改进。

5.3 拟射影态射

定义 (5.3.1) — 所谓一个态射 $f: X \to Y$ 是拟射影的, 或称 X (在 f 下成为 Y 概形) 在 Y 上是拟射影的, 或称 X 是一个拟射影 Y 概形, 是指 f 是有限型的, 并且存在一个 f 丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

注意到这个概念在 Y 上不是局部性的：Nagata [26] 和 Hironaka 的反例表明，即使 X 和 Y 都是代数闭域上的非奇异代数概形，并且 Y 的每一点都有一个仿射邻域 U 使得 $f^{-1}(U)$ 在 U 上是拟射影的，f 仍然不一定是拟射影的。

注意到拟射影态射一定是分离的 (4.6.1)。如果 Y 是拟紧的，则说 f 是拟射影的也相当于说 f 是有限型的并且存在一个 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层 (4.6.2 和 4.6.11)。进而：

命题 (5.3.2) — 设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形, X 是一个 Y 概形。则以下诸条件是等价的:

a) X 是拟射影 Y 概形。

b) X 在 Y 上是有限型的, 并且存在一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$, 使得 X 可以 Y 同构于 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的一个子概形。

c) X 在 Y 上是有限型的, 并且存在一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$, 它的 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的, 且能够生成 $\mathscr{S}$, 并且 X 可以 Y 同构于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 在它的一个处处稠密的开子集上所诱导的开子概形。[①]

这可由前面的注解以及 (4.4.3), (4.4.6) 和 (4.4.7) 立得。

注意到如果 Y 是一个 *Noether* 概形，则在 (5.3.2) 的条件 b) 和 c) 中，可以去掉 X 在 Y 上是有限型的这个条件，因为它自动满足 (**I**, 6.3.5)。

推论 (5.3.3) — 设 Y 是一个拟紧分离概形, 并且存在一个丰沛 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{L}$ (4.5.3)。于是为了使一个 Y 概形 X 是拟射影的, 必须且只需它在 Y 上是有限型的并且同构于射影丛 $\mathbf{P}_Y^r$ 的一个 Y 子概形。

事实上， 若 $\mathscr{E}$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层， 则 $\mathscr{E}$ 同构于某个 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{L}^{\otimes(-n)} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_Y^k$ (4.5.5) 的商模层，从而 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 同构于 $\mathbf{P}_Y^{k-1}$ 的一个闭子概形 (4.1.2 和 4.1.4)。

命题 (5.3.4) — (i) 有限型的拟仿射态射 (特别的, 拟紧浸入, 或者有限型的仿射态射) 都是拟射影的。

(ii) 若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是拟射影的, 并且 Z 是拟紧的, 则 $g \circ f$ 是拟射影的。

(iii) 若 $f: X \to Y$ 是一个拟射影 S 态射, 则对任意基扩张 $S' \to S$, 态射 $f_{(S')}$:

[①] 译注：在第 IV 章的 (1.7.19) 中，此命题将得到改进。

$X_{(S')} \to Y_{(S')}$ 都是拟射影的。

(iv) 若 $f : X \to Y$ 和 $g : X' \to Y'$ 是两个拟射影 S 态射，则 $f \times_S g$ 也是拟射影的。

(v) 若 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 是两个态射，并使得 $g \circ f$ 是拟射影的，于是若 g 是分离的或者 X 是局部 *Noether* 的，则 f 是拟射影的。

(vi) 若 f 是一个拟射影态射，则 f_{red} 也是如此。

(i) 缘自 (5.1.6) 和 (5.1.10, (i))。其余陈言可由定义 (5.3.1) 和有限型态射的性质 (**I**, 6.3.4) 以及 (4.6.13) 立得。

注解 (5.3.5) — 注意到 f_{red} 是拟射影的并不蕴涵 f 是如此，即使假设 Y 是 $\mathbb{C}$ 上的有限秩代数的谱，并且假设 f 是紧合的。

推论 (5.3.6) — 若 X 和 X' 是两个拟射影 Y 概形，则 $X \coprod X'$ 也是拟射影 Y 概形。

这缘自 (4.6.17)。

5.4 紧合态射和广泛闭态射

定义 (5.4.1) — 所谓一个概形态射 $f : X \to Y$ 是紧合的 (propre)，是指下面两个条件得到满足:

a) f 是分离且有限型的。

b) 对任意概形 Y' 和任意态射 $Y' \to Y$，投影 $f_{(Y')} : X \times_Y Y' \to Y'$ 都是一个闭态射 (**I**, 2.2.6) 。

如果这些条件成立，则我们也称 X（在结构态射 f 下成为 Y 概形）在 Y 上是紧合的。

易见条件 a) 和 b) 在 Y 上都是局部性的。为了验证 $X \times_Y Y'$ 的一个闭子集 Z 在投影 $q : X \times_Y Y' \to Y'$ 下的像是 Y' 中的闭子集，只需证明对于 Y' 的任意仿射开集 U'，$q(Z) \cap U'$ 在 U' 中都是闭的即可；由于 $q(Z) \cap U' = q(Z \cap q^{-1}(U'))$，并且 $q^{-1}(U')$ 可以等同于 $X \times_Y U'$ (**I**, 4.4.1)，故我们看到，为了验证定义 (5.4.1) 中的条件 b)，可以限于考虑 Y' 是仿射概形的情形。我们在后面 (5.6.3) 将证明，若 Y 是局部 Noether 的，则甚至可以只限于考虑 Y' 在 Y 上是有限型的这个情形（为了验证 b)）。

易见紧合态射都是闭的。

命题 (5.4.2) — (i) 闭浸入都是紧合的。

(ii) 两个紧合态射的合成也是紧合的。

(iii) 若 X, Y 是两个 S 概形，$f : X \to Y$ 是一个紧合 S 态射，则对任意基扩

张 $S' \to S$，态射

$$f_{(S')}\ :\ X_{(S')} \longrightarrow Y_{(S')}$$

都是紧合的。

(iv) 若 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Y'$ 是两个紧合的 S 态射，则 S 态射 $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ 也是紧合的。

只需证明 (i), (ii) 和 (iii) (**I**, 3.5.1)。在这三者中，(5.4.1) 的条件 a) 都可以由以前的结果 (**I**, 5.5.1 和 6.3.4) 推出；只消验证条件 b)。在情形 (i) 这是显然的，因为若 $X \to Y$ 是一个闭浸入，则 $X \times'_Y \to Y \times_Y Y' = Y'$ 也是如此 (**I**, 4.3.2 和 3.3.3)。为了证明 (ii)，考虑两个紧合态射 $X \to Y$, $Y \to Z$，和一个态射 $Z' \to Z$。由于我们有 $X \times_Z Z' = X \times_Y (Y \times_Z Z')$ (**I**, 3.3.9.1)，故知投影 $X \times_Z Z' \to Z'$ 可以分解为 $X \times_Y (Y \times_Z Z') \to Y \times_Z Z' \to Z'$。有见于开头的注解，(ii) 缘自两个闭态射的合成仍是闭的这个事实。最后，对任意态射 $S' \to S$，$X_{(S')}$ 都可以等同于 $X \times_Y Y_{(S')}$ (**I**, 3.3.11)；对任意态射 $Z \to Y_{(S')}$，均有

$$X_{(S')} \times_{Y_{(S')}} Z \ =\ (X \times_Y Y_{(S')}) \times_{Y_{(S')}} Z \ =\ X \times_Y Z\quad 。$$

根据前提条件 $X \times_Y Z \to Z$ 是闭的，从而这就证明了 (iii)。

推论 (5.4.3) — 设 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 是两个态射，并使得 $g \circ f$ 是紧合的。

(i) 若 g 是分离的，则 f 是紧合的。

(ii) 若 g 是分离且有限型的，并且 f 是映满的，则 g 是紧合的。

(i) 可由 (5.4.2) 推出 (使用 (**I**, 5.5.12) 的方法)。为了证明 (ii)，只需验证定义 (5.4.1) 中的条件 b)。对任意态射 $Z' \to Z$，图表

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Z' \arrow[r, "f\times 1_{Z'}"] \arrow[dr, "p"'] & Y \times_Z Z' \arrow[d, "p'"] \\
 & Z'
\end{tikzcd}$$

(其中 p 和 p' 是投影) 都是交换的 (**I**, 3.2.1)；进而，$f \times 1_{Z'}$ 是映满的，因为 f 是如此 (**I**, 3.5.2)，且根据前提条件 p 是一个闭态射。于是 $Y \times_Z Z'$ 的任何闭子集 F 都是 $X \times_Z Z'$ 的某个闭子集 E 在 $f \times 1_{Z'}$ 下的像，从而根据前提条件 $p'(F) = p(E)$ 在 Z' 中是闭的，故得结论。

推论 (5.4.4) — 若 X 是一个在 Y 上紧合的概形，并且 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，则任何 Y 态射 $f : X \to \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 都是紧合的，(当然也是闭的)。

事实上，结构态射 $p : \operatorname{Proj}\mathscr{S} \to Y$ 是分离的，并且根据前提条件 $p \circ f$ 是紧合的。

推论 (5.4.5) — 设 $f: X \to Y$ 是一个有限型分离态射。设 $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$（相应的，$(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$）是 X（相应的，Y）的一族有限个闭子概形，j_i（相应的，h_i）是典范含入 $X_i \to X$（相应的，$Y_i \to Y$）。假设 X 的底空间是这些 X_i 的并集，并且对任意 i，均有一个态射 $f_i: X_i \to Y_i$，使得图表

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "j_i"'] & Y_i \arrow[d, "h_i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

是交换的。则为了使 f 是紧合的，必须且只需每个 f_i 都是如此。

若 f 是紧合的，则 $f\circ j_i$ 也是如此，因为 j_i 是一个闭浸入 (5.4.2)；由于 h_i 是闭浸入，从而是分离态射，故而根据 (5.4.3)，f_i 是紧合的。反过来，假设每个 f_i 都是紧合的，考虑诸 X_i 的和概形 Z；设 u 是这样一个态射 $Z \to X$，它在每个 X_i 上皆重合于 j_i。则 $f\circ u$ 在每个 X_i 上的限制皆等于 $f\circ j_i = h_i\circ f_i$，从而是紧合的，因为 h_i 和 f_i 都是如此 (5.4.2)；于是由定义 (5.4.1) 立知 $f\circ u$ 是紧合的。根据前提条件，u 是映满的，故而根据 (5.4.3)，f 是紧合的。

推论 (5.4.6) — 设 $f: X \to Y$ 是一个有限型分离态射；则为了使 f 是紧合的，必须且只需 $f_{\mathrm{red}}: X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ 是如此。

这是 (5.4.5) 的一个特殊情形，只要取 $n=1$, $X_1 = X_{\mathrm{red}}$ 和 $Y_1 = Y_{\mathrm{red}}$ (**I**, 5.1.5)。

(5.4.7) 若 X 和 Y 都是 Noether 概形，并且 $f: X\to Y$ 是有限型分离态射，则为了验证 f 是不是紧合的，可以限于考虑整概形之间的笼罩性态射。事实上，设 X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 X 的有限个不可约分支，对每个 i，考虑 X 的那个唯一的以 X_i 为底空间的既约闭子概形，我们仍记之为 X_i (**I**, 5.2.1)。另一方面，设 Y_i 是 Y 的那个唯一的以 $\overline{f(X_i)}$ 为底空间的既约闭子概形。若 g_i（相应的，h_i）是含入态射 $X_i\to X$（相应的，$Y_i \to Y$），则我们有 $f\circ g_i = h_i\circ f_i$，其中 f_i 是一个笼罩 $X_i \to Y_i$ (**I**, 5.2.2)；此时 (5.4.5) 的条件都得到满足，从而为了使 f 是紧合的，必须且只需诸 f_i 都是如此。

推论 (5.4.8) — 设 X, Y 是两个在 S 上分离且有限型的 S 概形，并设 $f: X\to Y$ 是一个 S 态射。则为了使 f 是紧合的，必须且只需对任意 S 概形 S'，态射 $f\times_S 1_{S'}: X\times_S S' \to Y\times_S S'$ 都是闭的。

首先注意到若 $g: X\to S$ 和 $h: Y\to S$ 是结构态射，则有 $g = h\circ f$，这是根据定义，从而 f 是分离且有限型的 (**I**, 5.5.1 和 6.3.4)。若 f 是紧合的，则 $f\times_S 1_{S'}$ 也是如此 (5.4.2)，当然 $f\times_S 1_{S'}$ 就是闭的。反过来，假设上述条件得到满足，并设 Y' 是一个 Y 概形；则也可以把 Y' 看作是一个 S 概形，并且由于 $Y\to S$ 是分离的，故知 $X\times_Y$

Y' 可以等同于 $X\times_S Y'$ 的一个闭子概形 (**I**, 5.4.2)。在交换图表

$$\begin{array}{ccccc} X\times_Y Y' & \xrightarrow{f\times 1_{Y'}} & Y\times_Y Y' & = & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X\times_S Y' & \xrightarrow[f_{(Y')}]{} & Y\times_S Y' & & \end{array}$$

中，竖直箭头都是闭浸入；由此立知，若 $f_{(Y')}$ 是一个闭态射，则 $f\times 1_{Y'}$ 也是如此。

注解 (5.4.9) — 所谓一个态射 $f:X\to Y$ 是广泛闭的 (universellement fermé)，是指它满足定义 (5.4.1) 中的条件 b)。读者可以看出，在命题 (5.4.2) 到 (5.4.8) 中，把 "紧合" 都换成 "广泛闭" 后结论仍然成立 (并且在 (5.4.3), (5.4.5), (5.4.6) 和 (5.4.8) 的前提条件中，可以去掉有限性条件) 。

(5.4.10) 设 $f:X\to Y$ 是一个有限型态射，。所谓 X 的一个闭子集 Z 在 Y 上是紧合的 (或称 Y 紧合的，或称对于 f 是紧合的)，是指把 f 限制到 X 的一个以 Z 为底空间的闭子概形 (**I**, 5.2.1) 上后是紧合的。由于这个限制是分离的，故由 (5.4.6) 和 (**I**, 5.5.1, (vi)) 知，上述性质不依赖于 X 的以 Z 为底空间的闭子概形的选择。若 $g:X'\to X$ 是一个紧合态射，则 $g^{-1}(Z)$ 是 X' 的一个紧合子集：事实上，若 T 是 X 的一个以 Z 为底空间的子概形，则由于 g 在 X' 的闭子概形 $g^{-1}(T)$ 上的限制 $g^{-1}(T)\to T$ 是一个紧合态射 (这是根据 (5.4.2, (iii)))，故只需使用 (5.4.2, (ii))。另一方面，若 X'' 是一个在 Y 上分离且有限型的概形，并且 $u:X\to X''$ 是一个 Y 态射，则 $u(Z)$ 是 X'' 的一个紧合子集；事实上，取 T 是 X 的那个以 Z 为底空间的既约闭子概形；则由于 f 在 T 上的限制是紧合的，故知 u 在 T 上的限制也是如此 (5.4.3, (i))，从而 $u(Z)$ 在 X'' 中是闭的；设 T'' 是 X'' 的一个以 $u(Z)$ 为底空间的闭子概形 (**I**, 5.2.1)，于是 $u|_T$ 可以分解为

$$T \xrightarrow{v} T'' \xrightarrow{j} X'' ,$$

其中 j 是典范含入 (**I**, 5.2.2)，从而 v 是紧合且映满的 (5.4.5)；若 g 是结构态射 $X''\to Y$ 在 T'' 上的限制，则 g 是分离且有限型的，并且我们有 $f|_T=g\circ v$，从而由 (5.4.3, (ii)) 知 g 是紧合的，故得我们的陈言。

特别的，由以上注解可知，若 Z 是 X 的一个 Y 紧合的子集，则：

1° 对于 X 的任何闭子概形 X'，$Z\cap X'$ 都是 X' 的一个 Y 紧合的子集。

2° 若 X 是某个在 Y 上分离且有限型的概形 X'' 的闭子概形，则 Z 也是 X'' 的一个 Y 紧合的子集 (特别的，Z 在 X'' 中是闭的) 。

5.5 射影态射

命题 (5.5.1) — 设 X 是一个 Y 概形。则以下诸条件是等价的：

a) X 可以 Y 同构于某个射影丛 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的闭子概形，其中 $\mathscr{E}$ 是一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层。

b) 存在一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$，使得 $\mathscr{S}_1$ 是有限型的，且可以生成 $\mathscr{S}$，并且 X 可以 Y 同构于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$。

条件 a) 蕴涵 b)，这是依据 (3.6.2, (ii))：若 $\mathscr{J}$ 是 $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ 的一个拟凝聚的分次理想层，则拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}=\mathbf{S}(\mathscr{E})/\mathscr{J}$ 可由 $\mathscr{S}_1$ 所生成，并且后者作为 $\mathscr{E}$ 的典范像也是一个有限型 $\mathscr{O}_Y$ 模层。条件 b) 蕴涵 a) 是缘自 (3.6.2)（应用到 $\mathscr{M}\to\mathscr{S}_1$ 是恒同映射的情形）。

定义 (5.5.2) — 所谓一个 Y 概形 X 在 Y 上是射影的，或称 X 是一个射影 Y 概形，是指它满足 (5.5.1) 中的等价条件 a) 和 b)。所谓一个态射 $f:X\to Y$ 是射影的，是指 X 是一个射影 Y 概形。

易见若 $f:X\to Y$ 是射影的，则在 X 上有一个 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层 (4.4.2)。

定理 (5.5.3) — (i) 射影态射都是拟射影且紧合的。

(ii) 反过来，设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形；则任何拟射影且紧合的态射 $f:X\to Y$ 都是射影的。[①]

(i) 易见若 $f:X\to Y$ 是射影的，则它是有限型且拟射影的（从而是分离的）；另一方面，由 (5.5.1, b)) 和 (3.5.3) 立知，若 f 是射影的，则对任意态射 $Y'\to Y$，$f\times_Y 1_{Y'}:X\times_Y Y'\to Y'$ 都是如此。从而为了证明 f 是广泛闭的，可以归结为证明射影态射 f 总是闭的。现在问题在 Y 上是局部性的，故可假设 $Y=\operatorname{Spec}A$，从而 (5.5.1) $X=\operatorname{Proj}S$，其中 S 是一个分次 A 代数，并可由 S_1 中的有限个元素所生成。对任意 $y\in Y$，纤维 $f^{-1}(y)$ 都可以等同于 $\operatorname{Proj}S\times_T\operatorname{Spec}\boldsymbol{k}(y)$ (**I**, 3.6.1)，从而可以等同于 $\operatorname{Proj}(S\otimes_A\boldsymbol{k}(y))$ (2.8.10)；因而 $f^{-1}(y)$ 是空集的充分必要条件是 $S\otimes_A\boldsymbol{k}(y)$ 满足条件 (TN) (2.7.4)，换句话说，当 n 充分大时 $S_n\otimes_A\boldsymbol{k}(y)=0$。然而 $(S_n)_y$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_y$ 模，从而依照 Nakayama 引理，上述条件即意味着当 n 充分大时 $(S_n)_y=0$。若 $\mathfrak{a}_n$ 是 A 模 S_n 在 A 中的零化子，则上述条件也意味着当 n 充分大时 $\mathfrak{a}_n\subset\mathfrak{j}_y$ (**I**, 1.7.4)。然则，根据前提条件 $S_nS_1=S_{n+1}$，故有 $\mathfrak{a}_n\subset\mathfrak{a}_{n+1}$，从而若 $\mathfrak{a}$ 是诸 $\mathfrak{a}_n$ 的并集，则我们看到 $f(X)=V(\mathfrak{a})$，这就证明 $f(X)$ 在 Y 中是闭的，现在若 X' 是 X 的任何一个闭子集，则可以找到 X 的一个以 X' 为底空间的闭子概形 (**I**, 5.2.1)，并且易见 (5.5.1, a)) 态射 $X'\to X\xrightarrow{f}Y$ 是射影的，从而 $f(X')$ 在 Y 中是闭的。

(ii) Y 上的前提条件和 f 是拟射影态射的事实表明，存在一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E}$ 和一个 Y 浸入 $j:X\to\mathbf{P}(\mathscr{E})$ (5.3.2)。然而 f 是紧合的，故由 (5.4.4) 知 j 是闭的，从而 f 是射影的。

① 译注：在第 IV 章的 (1.7.19) 中，此命题将得到改进。

注解 (5.5.4) — (i) 设 $f : X \to Y$ 是一个态射，且满足：1° f 是紧合的；2° 存在一个 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$；3° 拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{E} = f_*\mathscr{L}$ 是有限型的。则 f 是一个射影态射：事实上 (4.4.4)，此时存在一个 Y 浸入 $r : X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$，且由于 f 是紧合的，故知 r 是一个闭浸入 (5.4.4)。我们将在第 III 章 §3 中看到：如果 Y 是局部 *Noether* 的，则上面的条件 3° 可由另外两个条件推出来，从而条件 1° 和 2° 就给出了射影态射的一个本征描述，并且若 Y 是拟紧的，则还可以把条件 2° 换成下面的条件：存在一个 f 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层 (4.6.11)。

(ii) 设 Y 是一个拟紧分离概形，并且存在一个丰沛 $\mathscr{O}_Y$ 模层。则为了使一个分离 Y 概形 X 是射影的，必须且只需它可以 Y 同构于射影丛 $\mathbf{P}^r_Y$ 的一个闭 Y 子概形。条件显然是充分的。反过来，若 X 在 Y 上是射影的，则它是拟射影的，从而存在一个从 X 到 $\mathbf{P}^r_Y$ 的 Y 浸入 (5.3.3)，并且根据 (5.4.4) 和 (5.5.3)，它是闭的。

(iii) (5.5.3) 中的推理表明，对任意概形 Y 和任意整数 $r \geqslant 0$，结构态射 $\mathbf{P}^r_Y \to Y$ 都是映满的，因为若令 $\mathscr{S} = \mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y^{r+1})$，则易见 $\mathscr{S}_y = \mathbf{S}_{\boldsymbol{k}(y)}((\boldsymbol{k}(y))^{r+1})$ (1.7.3)，从而对任意 $y \in Y$ 和任意 $n \geqslant 0$，均有 $(\mathscr{S}_n)_y \neq 0$。

(iv) Nagata [26] 的例子表明，存在这样的紧合态射，它不是拟射影的。

命题 (5.5.5) — (i) *闭浸入都是射影态射。*

(ii) *若 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是两个射影态射，并且 Z 是一个拟紧分离概形或者具有 Noether 底空间的概形，则 $g \circ f$ 是射影的。*

(iii) *若 $f : X \to Y$ 是一个射影 S 态射，则对任意基扩张 $S' \to S$，态射 $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ 都是射影的。*

(iv) *若 $f : X \to Y$ 和 $g : X' \to Y'$ 都是射影 S 态射，则 $f \times_S g$ 也是如此。*

(v) *若 $g \circ f$ 是一个射影态射，并且 g 是分离的，则 f 是射影的。*

(vi) *若 f 是射影的，则 f_{red} 也是如此。*

(i) 可由 (3.1.7) 立得。现在我们必须把 (iii) 和 (iv) 的证明分开来处理，因为在 (ii) 中对 Z 附加了限制条件（参考 (**I**, 3.5.1)）。为了证明 (iii)，可以归结到 $S = Y$ 的情形 (**I**, 3.3.11)，此时由 (5.5.1, b)) 和 (3.5.3) 立得结论。为了证明 (iv)，可以立即归结到 $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, $X' = \mathbf{P}(\mathscr{E}')$ 的情形，且其中 $\mathscr{E}$（相应的，$\mathscr{E}'$）是一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层（相应的，$\mathscr{O}_{Y'}$ 模层）。设 p, p' 分别是 $T = Y \times_S Y'$ 到 Y 和 Y' 的典范投影；根据 (4.1.3.1)，我们有 $\mathbf{P}(p^*\mathscr{E}) = \mathbf{P}(\mathscr{E}) \times_Y T$, $\mathbf{P}(p'^*\mathscr{E}') = \mathbf{P}(\mathscr{E}') \times_{Y'} T$；从而把 T 换成 $Y \times_S Y'$ 并使用 (**I**, 3.3.9.1) 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(p^*\mathscr{E}) \times_T \mathbf{P}(p'^*\mathscr{E}') \;&=\; (\mathbf{P}(\mathscr{E}) \times_Y T) \times_T (T \times_{Y'} \mathbf{P}(\mathscr{E}')) \;=\\ &=\; \mathbf{P}(\mathscr{E}) \times_Y (T \times_{Y'} \mathbf{P}(\mathscr{E}')) \;=\; \mathbf{P}(\mathscr{E}) \times_S \mathbf{P}(\mathscr{E}')\ 。\end{aligned}$$

然则，$p^*\mathscr{E}$ 和 $p'^*\mathscr{E}'$ 在 T 上都是有限型的 (**0**, 5.2.4)，从而 $p^*\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_T} p'^*\mathscr{E}'$ 也是如此；由

于

$$\mathbf{P}(p^*\mathscr{E}) \times_T \mathbf{P}(p'^*\mathscr{E}')$$

可以等同于 $\mathbf{P}(p^*\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_T} p'^*(\mathscr{E}'))$ 的一个闭子概形 (4.3.3)，这就证明了 (iv)。为了证明 (v) 和 (vi)，可以应用 (**I**, 5.5.13)，因为根据 (5.5.1, a))，射影 Y 概形的闭子概形也是射影 Y 概形。

只消再证明 (ii)；根据 Z 上的前提条件，这缘自 (5.5.3), (5.3.4, (ii)) 和 (5.4.2, (ii))。

命题 (5.5.6) — *若 X 和 X' 是两个射影 Y 概形，则 $X \coprod X'$ 也是射影 Y 概形。*

这可由 (5.5.2) 和 (4.3.6) 立得。

命题 (5.5.7) — *设 X 是一个射影 Y 概形，$\mathscr{L}$ 是一个 Y 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层；则对于 $\mathscr{L}$ 的任意整体截面 f，X_f 在 Y 上都是仿射的。*

问题在 Y 上是局部性的，故可假设 $Y = \operatorname{Spec} A$；进而 $X_{f^{\otimes n}} = X_f$，从而把 $\mathscr{L}$ 换成适当的 $\mathscr{L}^{\otimes n}$，又可假设 $\mathscr{L}$ 相对于结构态射 $q : X \to Y$ 是极丰沛的 (4.6.11)。从而典范同态 $\sigma : q^*q_*\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ 是满的，并且对应的态射

$$r = r_{\mathscr{L},\sigma} \ : \ X \longrightarrow P = \mathbf{P}(q_*\mathscr{L})$$

是一个浸入，且满足 $\mathscr{L} = r^*(\mathscr{O}_P(1))$ (4.4.4)；进而，由于 X 在 Y 上是紧合的，故知浸入 r 是闭的 (5.4.4)。此外，根据定义 $f \in \Gamma(Y, q_*\mathscr{L})$，并且 $\sigma^\flat$ 就是 $q_*\mathscr{L}$ 的恒同；于是由公式 (3.7.3.1) 知，我们有 $X_f = r^{-1}(D_+(f))$；因而 X_f 是仿射概形 $D_+(f)$ 的一个闭子概形，从而本身也是一个仿射概形。

特别的，如果取 $Y = X$，则 (有见于 (4.6.13, (i))) 可以得到下面的推论，它也可以直接证明：

推论 (5.5.8) — *设 X 是一个概形，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则对于 $\mathscr{L}$ 的任意整体截面 f，X_f 在 X 上都是仿射的 (从而如果 X 是仿射概形，则 X_f 也是仿射概形)。*

5.6 Chow 引理

定理 (5.6.1) (Chow 引理) — *设 S 是一个概形，X 是一个在 S 上分离且有限型的概形。假设下述条件之一得到满足:*

a) S 是 Noether 的。

b) S 是拟紧分离概形，并且只有有限个不可约分支。

则在这样的条件下:

*(i) 存在一个***拟射影** *S 概形 X' 和一个***射影**且**映满**的 *S 态射 $f : X' \to X$。*

(ii) 可以取 X' 和 f 满足下面的条件：存在一个开集 $U \subset X$，使得 $U' = f^{-1}(U)$ 在 X' 中是稠密的，并且 f 在 U' 上的限制是一个同构 $U' \xrightarrow{\sim} U$。

(iii) 若 X 是既约 (相应的，不可约，整) 的，则可以假设 X' 也是既约 (相应的，不可约，整) 的。

证明分为几个步骤。

A) 首先可以归结到 X 不可约的情形。事实上，在条件 a) 中，X 是 Noether 的，从而在任何一种情形下，X 的不可约分支 X_i 都是有限个。如果对 X 的每个以 X_i 为底空间的既约闭子概形都证明了定理的结论，并且设 X'_i 和 $f_i : X'_i \to X_i$ 是对应于 X_i 的那个概形和态射，考虑诸 X'_i 的和概形 X'，以及这样一个态射 $f : X' \to X$，它在每个 X'_i 上的限制都等于 $j_i \circ f_i$（j_i 是典范含入 $X_i \to X$），这两个就满足我们的要求。事实上，易见如果诸 X'_i 都是既约的，则 X' 也是既约的；另一方面，取 U 是诸集合 $U_i \cap (X - \bigcup_{j \neq i} X_j$ 的并集，则 (ii) 得到满足。最后，由于诸 X'_i 在 S 上都是拟射影的，故知 X' 也是如此 (5.3.6)；同样的，根据 (5.5.5, (i) 和 (ii))，诸态射 $X'_i \to X$ 都是射影的，从而 f 是射影的 (5.5.6)，并且由定义易见它是映满的。

B) 现在假设 X 是不可约的。由于结构态射 $r : X \to S$ 是有限型的，故可找到 S 的一个有限仿射开覆盖 (S_i)，以及对每个 i，找到 $r^{-1}(S_i)$ 的一个有限仿射开覆盖 (T_{ij})，诸态射 $T_{ij} \to S_i$ 都是仿射且有限型的，从而是拟射影的 (5.3.4, (i))；由于在条件 a), b) 的任何一种情形下，浸入 $S_i \to S$ 都是拟紧的，故知它是拟射影态射 (5.3.4, (i))，从而 r 在 T_{ij} 上的限制是一个拟射影态射 (5.3.4, (ii))。我们把这些 T_{ij} 记作 U_k ($1 \leqslant k \leqslant n$)。则对每个指标 k，均可找到一个开浸入 $\varphi_k : U_k \to P_k$，其中 P_k 在 S 上是射影的 (5.3.2 和 5.5.2)。设 $U = \bigcap_k U_k$；由于 X 是不可约的，并且诸 U_k 都不是空的，故知 U 不是空的，并且因而在 X 中是处处稠密的；诸 φ_k 在 U 上的限制定义了一个态射

$$\varphi \ : \ U \longrightarrow P = P_1 \times_S P_2 \times \ldots \times_S P_n ,$$

并使图表

(5.6.1.1)
$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & P \\ {\scriptstyle j_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_k} \\ U_k & \xrightarrow[\varphi_k]{} & P_k \end{array}$$

成为交换的，这里 j_k 是指典范含入 $U \to U_k$，p_k 是指典范投影 $P \to P_k$。若 j 是典范含入 $U \to X$，则态射 $\psi = (j, \varphi)_S : U \to X \times_S P$ 是一个浸入 (**I**, 5.3.14)。在条件 a) 下，$X \times_S P$ 是局部 Noether 的 ((3.4.1) 和 (**I**, 6.3.7 及 6.3.8))；在条件 b) 下，$X \times_S P$ 是一个拟紧分离概形 (**I**, 5.5.1 和 6.6.4)；于是在任何情形下，ψ 在 $X \times_S P$ 中的附随子概形 Z（以 $\psi(U)$ 为底空间）的概闭包 X' 都是存在的，并且 ψ 可以分解为

(5.6.1.2)
$$\psi \ : \ U \xrightarrow{\psi'} X' \xrightarrow{h} X \times_S P ,$$

其中 ψ' 是一个开浸入，h 是一个闭浸入 (**I**, 9.5.10)。设 $q_1 : X\times_S P\to X$ 和 $q_2 : X\times_S P\to P$ 是典范投影；我们令

(5.6.1.3) $$f\ :\ X' \xrightarrow{h} X\times_S P \xrightarrow{q_1} X\ ,$$

(5.6.1.4) $$g\ :\ X' \xrightarrow{h} X\times_S P \xrightarrow{q_2} P\ 。$$

下面我们证明 X' 和 f 就满足要求。

C) 首先证明 f 是射影且映满的，并且 f 在 $U'=f^{-1}(U)$ 上的限制是 U' 到 U 上的一个同构。由于诸 P_k 在 S 上都是射影的，故知 P 也是如此 (5.5.5, (iv))，从而 $X\times_S P$ 在 X 上是射影的 (5.5.5, (iii))，并且 X' 也是如此，因为它是 $X\times_S P$ 的一个闭子概形。另一方面，我们有 $f\circ\psi'=q_1\circ(h\circ\psi')=q_1\circ\psi=j$，从而 $f(X')$ 包含 X 的处处稠密的开子集 U；然而 f 是一个闭态射 (5.5.3)，从而 $f(X')=X$。现在注意到 $q_1^{-1}(U)=U\times_S P$ 是 $X\times_S P$ 的一个开子概形，并且根据定义，$U'=h^{-1}(U\times_S P)$ 就是 X' 的开子概形；因而它就是概形 Z 在 $U\times_S P$ 中的概闭包 (**I**, 9.5.8)。此时浸入 ψ 可以分解为 $U\xrightarrow{\Gamma_\varphi}U\times_S P\xrightarrow{j\times 1}X\times_S P$，且由于 P 在 S 上是分离的，故知图像态射 Γ_φ 是一个闭浸入 (**I**, 5.4.3)，从而 Z 是 $U\times_S P$ 的一个闭子概形，由此可知 $U'=Z$。此外由于 ψ 是一个浸入，故知 f 在 U' 上的限制是一个映到 U 上的同构，并且是 ψ' 的逆；最后，根据 X' 的定义，U' 在 X' 中是稠密的。

D) 下面证明 g 是一个浸入，由此就可以推出 X' 在 S 上是拟射影的，因为 P 在 S 上是射影的。令

$$V_k\ =\ \varphi_k(U_k)\qquad(\ P_k\ \text{的开集}\ )\ ,$$

$$W_k\ =\ p_k^{-1}(V_k)\qquad(\ P\ \text{的开集}\ )\ ,$$

$$U'_k\ =\ f^{-1}(U_k)\ ,\quad U''_k\ =\ g^{-1}(W_k)\qquad(\ X'\ \text{的开集}\ )\ 。$$

易见这些 U'_k 构成 X' 的一个开覆盖；我们首先证明 $U'_k\subset U''_k$，这将表明 U''_k 也构成 X' 的一个开覆盖。为此只需证明图表

(5.6.1.5)
$$\begin{tikzcd} U'_k \arrow[r, "g|_{U'_k}"] \arrow[d, "f|_{U'_k}"'] & P \arrow[d, "p_k"] \\ U_k \arrow[r, "\varphi_k"'] & P_k \end{tikzcd}$$

是交换的。然则概形 $U'_k=h^{-1}(U_k\times_S P)$ 是 X' 的开子概形，从而是 $Z=U'\subset U'_k$ 在 U'_k 中的概闭包 (**I**, 9.5.8)。从而为了证明图表 (5.6.1.5) 的交换性，只需 (因为 P_k 在 S 上是分离的) 证明该图表与典范含入 $U'\to U'_k$ 的合成 (或等价的，与 ψ 的合成，

有见于 U' 和 U 之间的同构) 可以给出一个交换图表 (**I**, 9.5.6)。然而根据定义，后面这个图表与 (5.6.1.1) 无异，故得我们的陈言。

从而诸 W_k 构成 $g(X')$ 的一个开覆盖；为了证明 g 是一个浸入，只需证明每个限制 $g|_{U''_k}$ 都是一个映到 W_k 中的浸入 (**I**, 4.2.4)。为此，考虑态射 $u_k : W_k \xrightarrow{p_k} V_k \xrightarrow{\varphi_k^{-1}} U_k \to X$；由于 X 在 S 上是分离的，故知图像态射 $\Gamma_{u_k} : W_k \to X \times_S W_k$ 是一个闭浸入 (**I**, 5.4.3)，从而图像 $T_k = \Gamma_{U_k}(W_k)$ 是 $X \times_S W_k$ 的一个闭子概形；若我们能证明这个子概形可以遮蔽 U'，则根据 (**I**, 9.5.8)，它也可以遮蔽 X' 在开集 X''_k 上所诱导的开子概形，由于 q_2 在 T_k 上的限制是一个映到 W_k 上的同构，故知 g 在 X''_k 上的限制是一个映到 W_k 中的浸入，这就证明了我们的陈言。设 v_k 是典范含入 $U' \to X \times_S W_k$；则我们需要证明，存在一个态射 $w_k : U' \to W_k$ 使得 $v_k = \Gamma_{u_k} \circ w_k$。根据纤维积的定义，只需证明 $q_1 \circ v_k = u_k \circ q_1 \circ v_k$ (**I**, 3.2.1)，或者，从右边合成上同构 $\psi' : U \to U'$，就是 $q_1 \circ \psi = u_k \circ q_2 \circ \psi$。然而由于 $q_1 \circ \psi = j$, $q_2 \circ \psi = \varphi$，故我们的陈言缘自图表 (5.6.1.1) 的交换性，有见于 u_k 的定义。

E) 易见 U 和 U' 都是不可约的，故知上面作出的 X' 也是如此，从而态射 f 是双有理的 (**I**, 2.2.9)。进而若 X 是既约的，则 U' 也是如此，从而 X' 是既约的 (**0**, 9.5.9)。这就完成了证明。

推论 (5.6.2) — 假设 (5.6.1) 中的条件 a), b) 之一得到满足。则为了使 X 在 S 上是紧合的，必须且只需存在一个在 S 上射影的概形 X' 和一个映满的 S 态射 $f : X' \to X$（它也是射影的，这是根据 (5.5.5, (v))）。如果上述条件成立，则进而可以选择 f 满足下面的条件：存在 X 的一个稠密开集 U，使得 f 在 $f^{-1}(U)$ 上的限制是一个同构 $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$，并且 $f^{-1}(U)$ 在 X' 中是稠密的。进而若 X 是不可约 (相应的，既约) 的，则可以假设 X' 也是如此；如果 X 和 X' 都是不可约的，则 f 是一个双有理态射。

依照 (5.5.3) 和 (5.4.3, (ii))，条件是充分的。它也是必要的，因为在 (5.6.1) 的记号下，若 X 在 S 上是紧合的，则 X' 在 S 上也是紧合的（因为它在 X 上是射影的，从而是紧合的 (5.5.3)），因而我们的陈言缘自 (5.4.2, (ii))；进而，由于 X 在 S 上是拟射影的，故依照 (5.5.3)，它在 S 上是射影的。

推论 (5.6.3) — 设 S 是一个局部 *Noether* 概形。X 是一个在 S 上分离且有限型的概形，$f_0 : X \to S$ 是结构态射。则为了使 X 在 S 上是紧合的，必须且只需对任意**有限型**态射 $S' \to S$，$(f_0)_{(S')} : X_{(S')} \to S'$ 都是闭态射。并且只需该条件对于所有形如 $S' = S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$（$T_i$ 是未定元）的 S 概形成立即可。

条件显然是必要的，下面证明它也是充分的。由于问题在 S 和 S' 上都是局部性的 (5.4.1)，故可假设 S 和 S' 都是仿射且 Noether 的。依照 Chow 引理，存在一个射影 S 概形 P，一个浸入 $j : X' \to P$，和一个射影且映满的态射 $f : X' \to X$，使得图

表

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ S & \xleftarrow[r]{} & P \end{array}$$

是交换的。由于 P 在 S 上是有限型的，故由第一个条件知，投影 $q_2 : X \times_S P \to P$ 是一个闭态射。然而浸入 j 是 q_2 与态射 $f \times 1 : X' \times_S P \to X \times_S P$ 的合成；且 f 是射影的，从而是紧合的 (5.5.3)，故知 $f \times 1$ 是闭的。由此可知，j 是一个闭浸入，从而是紧合的 (5.4.2, (i))。进而结构态射 $r : P \to S$ 是射影的，从而是紧合的 (5.5.3)，从而 $f_0 \circ f = r \circ j$ 是紧合的 (5.4.2, (ii))；最后，由于 f 是映满的，故依照 (5.4.3)，f_0 是紧合的。

为了在第二个条件下证明这个命题，只需证明它蕴涵第一个条件即可。然则，若 S' 是仿射的，并且在 $S = \operatorname{Spec} A$ 上是有限型的，则有 $S' = \operatorname{Spec} A[c_1, \ldots, c_n]$ (**I**, 6.3.3)，从而 S' 同构于 $S'' = \operatorname{Spec} A[T_1, \ldots, T_n]$（$T_i$ 是未定元）的一个闭子概形。在交换图表

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \xrightarrow{1_X \times j} & X \times_S S'' \\ {\scriptstyle (f_0)_{(S')}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f_0)_{(S'')}} \\ S' & \xrightarrow[j]{} & S'' \end{array}$$

中，j 和 $i_X \times j$ 都是闭浸入 (**I**, 4.3.1)，并且根据前提条件，$(f_0)_{(S')}$ 是闭的，从而 $(f_0)_{(S'')}$ 也是如此。

§6. 整型态射和有限态射

6.1 在概形上整型的概形

定义 (6.1.1) — 设 X 是一个 S 概形，$f : X \to S$ 是结构态射。所谓 X 在 S 上是整型的 (entier)，或称 f 是一个整型态射，是指可以找到 S 的一个仿射开覆盖 (S_α)，使得对任意 α，开子概形 $f^{-1}(S_\alpha)$ 都是仿射概形，并且它的环 B_α 在 S_α 的环 A_α 上是整型的。所谓 X 在 S 上是有限的，或称 f 是一个有限态射，是指 X 在 S 上是整型且有限型的。

如果 S 是仿射的，环为 A，则我们也把“在 S 上是整型 (相应的，有限) 的”称为“在 A 上是整型 (相应的，有限) 的”。

(6.1.2) 易见若 X 在 S 上是整型的，则它在 S 上是仿射的。为了使一个在 S 上仿射的概形 X 在 S 上是整型 (相应的，有限) 的，必须且只需它的附随拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数

层 $\mathscr{A}(X)$ 满足下面的条件：可以找到 S 的一个仿射开覆盖 (S_α)，使得对任意 α，$\Gamma(S_\alpha, \mathscr{A}(X)$ 都是一个在 $\Gamma(S_\alpha, \mathscr{O}_S)$ 上整型 (相应的，整型且有限型) 的代数，若一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层具有上述性质，则我们也称它在 $\mathscr{O}_S$ 上是整型 (相应的，有限) 的。从而给出一个在 S 上整型 (相应的，有限) 的概形也就相当于 (1.3.1) 给出一个在 $\mathscr{O}_S$ 上整型 (相应的，有限) 的拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层。注意到一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{B}$ 是有限的当且仅当它是一个有限型 $\mathscr{O}_S$ 模层 (**I**, 1.3.9)；这也相当于说 $\mathscr{B}$ 是一个整型且有限型的 $\mathscr{O}_S$ 代数层，因为环 A 上的一个整型并且有限型的代数一定是有限型 A 模。

命题 (6.1.3) — *设 S 是一个局部 Noether 概形。则为了使一个在 S 上仿射的概形 X 在 S 上是有限的，必须且只需 $\mathscr{O}_S$ 代数层 $\mathscr{A}(X)$ 是凝聚的。*

有见于上面的注解，问题可以归结到下面的事实：若 S 是局部 Noether 的，则有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层与凝聚 $\mathscr{O}_S$ 模层无异 (**I**, 1.5.1)。

命题 (6.1.4) — *设 X 是一个在 S 上整型 (相应的，有限) 的概形。$f : X \to S$ 是结构态射。则对任意仿射开集 $U \subset S$，环为 A，$f^{-1}(U)$ 都是仿射概形，并且它的环 B 是一个在 A 上整型 (相应的，有限) 的代数。*

我们首先证明下面的引理：

引理 (6.1.4.1) — *设 A 是一个环，M 是一个 A 模，$(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ 是 A 的有限个元素，并且 $D(g_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 可以覆盖 $\operatorname{Spec} A$。于是若对任意 i，M_{g_i} 都是有限型 A_{g_i} 模，则 M 是有限型 A 模。*

事实上，可以假设 M_{g_i} 是由有限个元素 (m_{ij}/g_i^n) $(m_{ij} \in M)$ 所生成的，并且 n 对所有指标 i 都取相同的值。下面证明诸 m_{ij} 就可以生成 M。设 M' 是由这些元素在 M 中所生成的 A 子模，并设 m 是 M 中的一个元素。根据前提条件，对每个 i，均可找到 $a_{ij} \in A$ 和一个整数 p (不依赖于 i)，使得在 M_{g_i} 中有 $m/1 = \big(\sum\limits_i a_{ij} m_{ij}\big)/g_i^p$；这表明存在一个整数 $r \geqslant p$，使得对任意 i 均有 $g_i^r m \in M'$。然则，由于诸 $D(g_i^r) = D(g_i)$ 覆盖了 $\operatorname{Spec} A$，故知由这些 g_i^r 在 A 中所生成的理想就等于 A，换句话说，可以找到元素 $a_i \in A$ 使得 $\sum\limits_i a_i g_i^r = 1$；因而 $m = \big(\sum\limits_i a_i g_i^r\big) m \in M'$，故得引理。

准此，我们已经知道 (1.3.2) $f^{-1}(U)$ 是仿射的。若 φ 是 f 所对应的同态 $A \to B$，则可以找到 U 的一个由开集 $D(g_i)$ $(g_i \in A)$ 所组成的有限覆盖，使得每个 B_{h_i} 都是一个在 A_{g_i} 上整型 (相应的，整型且有限) 的代数，这里 $h_i = \varphi(g_i)$。事实上，可以找到 U 的一个由仿射开集 $V_\alpha \subset U$ 所组成的覆盖，使得每个 $B_\alpha = \mathrm{A}(f^{-1}(V_\alpha))$ 都是一个在 $A_\alpha = \mathrm{A}(V_\alpha)$ 上整型 (相应的，有限型) 的代数。每个 $x \in U$ 都属于某个 V_α，从而可以找到 $g \in A$ 使得 $x \in D(g) \subset V_\alpha$；若 g_α 是 g 在 A_α 中的像，则有 $\mathrm{A}(D(g)) = A_g = (A_\alpha)_{g_\alpha}$；设 $h = \varphi(g)$，并设 h_α 是 g_α 在 B_α 中的像；则有

$$\mathrm{A}(D(h)) = B_h = (B_\alpha)_{h_\alpha} 。$$

由于 B_α 在 A_α 上是整型 (相应的，有限) 的，故知 $(B_\alpha)_{h_\alpha}$ 在 $(A_\alpha)_{g_\alpha}$ 上是整型 (相应的，有限) 的。现在只需使用 U 是拟紧的这个事实就可以得到所需的覆盖。

我们先假设 B_{h_i} 在 A_{g_i} 上都是整型且有限的，由于 B_{h_i} 作为 A_{g_i} 模也可以写成 B_{g_i}，故由引理 (6.1.4.1) 知，此时 B 是一个有限型 A 模。

现在仅假设每个 B_{h_i} 在 S_{g_i} 上都是整型的；设 $b \in B$，并设 C 是 b 在 B 中所生成的 A 子代数。则对任意 i，C_{h_i} 都是 $b/1$ 在 B_{h_i} 中所生成的 A_{g_i} 子代数；根据前提条件，每个 C_{h_i} 都是有限型 A_{g_i} 模，从而 (6.1.4.1) C 是有限型 A 模，这就证明了 B 在 A 上是整型的。

命题 (6.1.5) — (i) 闭浸入都是有限的 (当然也就是整型的)。

(ii) 两个有限 (相应的，整型) 态射的合成也是有限 (相应的，整型) 的。

(iii) 若 $f: X \to Y$ 是一个有限 (相应的，整型) S 态射，则对任意基扩张 $S' \to S$，态射 $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ 都是有限 (相应的，整型) 的。

(iv) 若 $f: X \to Y$ 和 $g: X' \to Y'$ 是两个有限 (相应的，整型) S 态射，则 $f \times_S g: X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ 也是如此。

(v) 若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个态射，并使得 $g \circ f$ 是有限 (相应的，整型) 的，且 g 是分离的，则 f 是有限 (相应的，整型) 的。

(vi) 若 $f: X \to Y$ 是一个有限 (相应的，整型) 态射，则 f_{red} 也是如此。

依照 (**I**, 5.5.12)，只需证明 (i), (ii) 和 (iii)。为了证明一个闭浸入 $X \to S$ 是有限的，可以限于考虑 $S = \operatorname{Spec} A$ 的情形，此时问题归结为下面的事实：商环 $A/\mathfrak{J}$ 总是一个单苇 A 模。为了证明两个有限 (相应的，整型) 态射 $X \to Y$, $Y \to Z$ 的合成也是有限 (相应的，整型) 的，仍然可以假设 Z 是仿射的 (从而 X, Y 都是仿射的 (1.3.4))，此时上述陈言等价于下面的命题：若 B 是一个有限 (相应的，整型) A 代数，并且 C 是一个有限 (相应的，整型) B 代数，则 C 是一个有限 (相应的，整型) A 代数，这是显然的。最后，为了证明 (iii)，可以限于考虑 $S = Y$ 的情形，因为 $X_{(S')}$ 可以等同于 $X \times_Y Y_{(S')}$ (**I**, 3.3.11)；进而可以假设 $S = \operatorname{Spec} A$, $S' = \operatorname{Spec} A'$；此时 X 是仿射的 (1.3.4)，环为 B，$X_{(S')}$ 也是仿射的，环为 $A' \otimes_A B$，从而只需使用下面的事实：若 B 是一个有限 (相应的，整型) A 代数，则 $A' \otimes_A B$ 是一个有限 (相应的，整型) A' 代数。

还可以注意到，若 X 和 Y 是两个 S 概形，并且在 S 上都是有限 (相应的，整型) 的，则它们的和概形 $X \coprod Y$ 也是一个在 S 上有限 (相应的，整型) 的概形，因为问题可以归结为下面的事实：若 B 和 C 是两个在 A 上有限 (相应的，整型) 的 A 代数，则 $B \times C$ 也是如此。

推论 (6.1.6) — 若 X 是一个在 S 上整型 (相应的，有限) 的概形，则对任意开集 $U \subset S$，$f^{-1}(U)$ 在 U 上都是整型 (相应的，有限) 的。

这是 (6.1.5, (iii)) 的一个特殊情形。

推论 (6.1.7) — 设 $f : X \to Y$ 是一个有限态射。则对任意 $y \in Y$，纤维 $f^{-1}(y)$ 都是一个在 $\boldsymbol{k}(y)$ 上有限的分离代数概形，当然它的底空间就是离散且有限的。

事实上，作为 $\boldsymbol{k}(y)$ 概形，$f^{-1}(y)$ 可以等同于 $X \times_Y \operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(y)$ (**I**, 3.6.1)，它在 $\operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(y)$ 上是有限的 (6.1.5, (iii))；从而是一个仿射概形，并且它的环是 $\boldsymbol{k}(y)$ 上的一个有限秩的代数 (6.1.4)。于是命题缘自 (**I**, 6.4.4)。

推论 (6.1.8) — 设 X, S 是两个整概形，$f : X \to S$ 是一个**笼罩**性态射。若 f 是整型 (相应的，有限) 的，则 X 的有理函数域 $\mathrm{R}(X)$ 在 S 的有理函数域 $\mathrm{R}(S)$ 上是代数 (相应的，有限阶代数) 的。

事实上，设 s 是 S 的一般点；则 $\boldsymbol{k}(s)$ 概形 $f^{-1}(s)$ 在 $\operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(s)$ 上是整型 (相应的，有限) 的 (6.1.5, (iii))，且根据前提条件，它包含 X 的一般点 x；从而 x 在 $f^{-1}(s)$ 中的局部环 (等于 $\boldsymbol{k}(x)$ (**I**, 3.6.5)) 是一个整型 (相应的，有限) $\boldsymbol{k}(s)$ 代数的局部环 (6.1.4)，故得结论。

注解 (6.1.9) — g 是分离的这个条件对于 (6.1.5, (v)) 来说是关键的：事实上，若 Y 在 Z 上不是分离的，则恒同 1_Y 是合成态射 $Y \xrightarrow{\Delta_Y} Y \times_Z Y \xrightarrow{p_1} Y$，然而 Δ_Y 不是整型态射，这可由 (6.1.10) 得知：

命题 (6.1.10) — 整型态射都是广泛闭的。

设 $f : X \to Y$ 是一个整型态射；依照 (6.1.5, (iii))，只需证明 f 是闭的。设 Z 是 X 的一个闭子集；则 X 有一个以 Z 为底空间的子概形 (**I**, 5.2.1)，从而由 (6.1.5, (i) 和 (ii)) 知，可以限于证明 $f(X)$ 在 Y 中是闭的。依照 (6.1.5, (vi))，可以假设 X 和 Y 都是既约的；进而，若 T 是 Y 的以 $\overline{f(X)}$ 为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)，则我们知道 f 可以分解为 $X \to T \xrightarrow{j} Y$，其中 j 是含入态射 (**I**, 5.2.2)，且由于 j 是分离的 (**I**, 5.5.1, (i))，故由 (6.1.5, (v)) 知 g 是一个整型态射。从而可以假设 $f(X)$ 在 Y 中是稠密的。最后，问题在 Y 上是局部性的，故可限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A$ 的情形。此时 $X = \operatorname{Spec} B$，其中 B 是一个在 A 上整型的 A 代数 (6.1.4)；进而 A 是既约的 (**I**, 5.1.4)，并且由于 $f(X)$ 在 Y 中是稠密的，故知 f 所对应的同态 $\varphi : A \to B$ 是单的 (**I**, 1.2.7)。在这些条件下，说 $f(X) = Y$ 即意味着说 A 的任何素理想都是 B 的某个素理想与 A 的交集，这与 Cohen-Seidenberg 第一定理 ([13], t. I, p. 257, 定理 3) 无异。

推论 (6.1.11) — 有限态射 $f : X \to Y$ 都是射影的。

事实上，由于 f 是仿射的，故知 $\mathscr{O}_X$ 是 f 极丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层 (5.1.2)；进而 $f_*\mathscr{O}_X$ 是一个有限型的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (6.1.2)；最后 f 是分离有限型的，并且是广泛闭的 (6.1.10)，从而判别法 (5.5.4, (i)) 中的条件都得到了满足。

命题 (6.1.12) — 设 $f: X' \to X$ 是一个有限态射，并设 $\mathscr{B} = f_*\mathscr{O}_{X'}$（它是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层，并且是有限型 $\mathscr{O}_X$ 模层）。设 $\mathscr{F}'$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层；则为了使 $\mathscr{F}'$ 是 r 秩局部自由的，必须且只需 $f_*\mathscr{F}'$ 是一个 r 秩局部自由 $\mathscr{B}$ 模层。

易见若 $(f_*\mathscr{F}')|_U$ 同构于 $\mathscr{B}^r|_U$（U 是 X 的开集），则 $\mathscr{F}'|_{f^{-1}(U)}$ 同构于 $\mathscr{O}_{X'}^r|_{f^{-1}(U)}$ (1.4.2)。反过来，假设 $\mathscr{F}'$ 是 r 秩局部自由的，下面证明 $f_*\mathscr{F}'$ 作为 $\mathscr{B}$ 模层可以局部同构于 $\mathscr{B}^r$。设 x 是 X 的一点；于是当 U 跑遍 x 的某个基本仿射邻域组时，诸 $f^{-1}(U)$ 跑遍有限集合 $f^{-1}(x)$ 的一个基本仿射邻域组 (1.2.5)，因为 f 是闭的 (6.1.10)。于是命题缘自下面的引理：

引理 (6.1.12.1) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{E}$ 是一个 r 秩局部自由 $\mathscr{O}_Y$ 模层，Z 是 Y 的一个有限子集，且包含在一个仿射开集 V 之中。于是可以找到 Z 的一个邻域 $U \subset V$，使得 $\mathscr{E}|_U$ 同构于 $\mathscr{O}_Y^r|_U$。

显然可以假设 Y 是仿射的；对任意 $z_i \in Z$，在闭包 $\overline{\{z_i\}}$ 中至少存在一个闭点 z_i' (**0**, 2.1.3)；若 Z' 是由诸 z_i' 所组成的集合，则 Z' 的每个邻域也是 Z 的邻域，从而可以假设 Z 在 Y 中是闭的，并且是离散的。考虑 Y 的以 Z 为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)，并设 $j: Z \to Y$ 是典范含入；则 $j^*\mathscr{E} = \mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{O}_Z$ 在离散概形 Z 上是 r 秩局部自由的，从而同构于 $\mathscr{O}_Z^r$；换句话说，可以找到 $\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{O}_Z$ 在 Z 上的 r 个截面 s_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 使得由这些截面所定义的同态 $\mathscr{O}_Z^r \to \mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{O}_Z$ 是一一的。然而 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，故知 Z 是由 A 的某个理想 $\mathfrak{J}$ 所定义的，并且 $\mathscr{E} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个 A 模；诸 s_i 都是 $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ 中的元素，从而它们是 $M = \Gamma(Y, \mathscr{E})$ 中的 r 个元素 t_i 的像。于是对任意 $z_j \in Z$，均可找到 z_j 的一个邻域 V_j，使得 t_i 在 V_j 上的限制定义了一个同构 $\mathscr{O}_Y^r|_{V_j} \to \mathscr{E}|_{V_j}$ (**0**, 5.5.4)；从而这些 V_j 的并集 U 就是我们所需要的。

命题 (6.1.13) — 设 $g: X' \to X$ 是概形间的一个整型态射，Y 是一个正规的局部整概形，f 是 Y 到 X' 的一个有理映射，并使得 $g \circ f$ 是一个处处有定义的有理映射 (**I**, 7.2.1)；则 f 是处处有定义的。

若 f_1 和 f_2 是类 f 中的两个态射（从 Y 的稠密开集到 X'），则易见 $g \circ f_1$ 和 $g \circ f_2$ 是等价的态射，从而可以用 $g \circ f$ 来表示它们的等价类。还记得如果我们进而假设 Y 是局部 *Noether* 的，则由 Y 正规的这个条件就可以推出 Y 是局部整的 (**I**, 6.1.13)。

为了证明 (6.1.13)，首先注意到问题在 Y 上是局部性的，因而可以假设在类 $g \circ f$ 中存在一个态射 $h: Y \to X$。考虑逆像 $Y' = X'_{(h)} = X'_{(Y)}$，并注意到态射 $g' = g_{(Y)}: Y' \to Y$ 是整型的 (6.1.5, (iii))。利用 Y 到 X' 的有理映射和 Y' 的有理 Y 截面之间的一一对应 (**I**, 7.1.2)，我们知道问题可以归结到 $X = Y$ 的情形，换句话说，归结到

推论 (6.1.14) — 设 X 是一个正规的局部整概形，$g: X' \to X$ 是一个整型态

射，f 是 X' 的一个有理 X 截面。则 f 是处处有定义的。

问题在 Y 上是局部性的，故可假设 X 是整的，此时 f 可以等同于一个从 X 的开集 U 到 X' 的态射 (**I**, 7.2.2)，它也是 $g^{-1}(U)$ 的一个 U 截面。由于 g 是分离的，故知 f 是从 U 到 $g^{-1}(U)$ 的一个闭浸入 (**I**, 5.4.6)；设 Z 是 $g^{-1}(U)$ 的附随于 f 的闭子概形 (**I**, 4.2.1)，则它同构于 U，从而是整的；设 X_1 是 X' 的以 Z 在 X' 中的闭包 $\overline{Z}$ 为底空间的既约子概形 (**I**, 5.2.1)；则 Z 是 X_1 在它的一个开集上所诱导的开子概形 (**I**, 5.2.3)，且由于 Z 是不可约的，故知 X_1 也是如此，从而它是整的。于是可以把态射 f 看作是 X_1 的一个有理 X 截面；由于 g 在 X_1 上的限制是一个整型态射 (6.1.5, (i) 和 (ii))，故而 (6.1.14) 的证明最终归结到 $X' = X_1$ 的情形，换句话说，归结到

推论 (6.1.15) — 设 X 是一个正规整概形，X' 是一个整概形，$g : X' \to X$ 是一个**整型**态射。于是若 X' 有一个有理 X 截面 f，则 g 是一个同构。

问题在 X 上是局部性的，故可假设 X 是仿射的，环为 A，此时 X' 也是仿射的，并且它的环 A' 在 A 上是整型的 (6.1.4)，而且是整的；进而，(6.1.14) 的推理表明，可以找到 X 的一个稠密开集，它与 X' 的某个稠密开集是同构的，从而 A 和 A' 具有相同的分式域。另一方面，依照 (**I**, 8.2.1.1) 以及诸 $\mathscr{O}_x$ 都是整闭的这个条件，环 A 是整闭的，从而 $A' = A$，这就完成了 (6.1.13) 的证明。

6.2 拟有限态射

命题 (6.2.1) — 设 $f : X \to Y$ 是一个局部有限型态射，x 是 X 的一点。则以下诸条件是等价的:

a) 点 x 在它的纤维 $f^{-1}(f(x))$ 中是孤立的。

b) 环 $\mathscr{O}_x$ 是一个拟有限 $\mathscr{O}_{f(x)}$ 模 (**0**, 7.4.1)。

问题显然在 X 和 Y 上都是局部性的，故可假设 $X = \operatorname{Spec} A$ 和 $Y = \operatorname{Spec} B$ 都是仿射的，并且 A 是有限型 B 代数 (**I**, 6.3.3)。进而，把 X 换成 $X \times_Y \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{f(x)}$ 不会改变纤维 $f^{-1}(f(x))$，也不会改变局部环 $\mathscr{O}_x$ (**I**, 3.6.5)；从而可以假设 B 是一个局部环 (等于 $\mathscr{O}_{f(x)}$)；若 $\mathfrak{n}$ 是 B 的极大理想，则 $f^{-1}(f(x))$ 是一个仿射概形，环为 $A/\mathfrak{n}A$，并且在 $\boldsymbol{k}(f(x)) = B/\mathfrak{n}$ 上是有限型的 (**I**, 6.4.11)。据此，若 a) 成立，则可以进而假设 $f^{-1}(f(x))$ 只有一个点 x；从而 $A/\mathfrak{n}A$ 在 $B/\mathfrak{n}$ 上是有限秩的 (**I**, 6.4.4)，换句话说，A 是一个拟有限 B 模。反过来，若这个条件得到满足，则 $f^{-1}(f(x))$ 是一个 Artin 仿射概形，从而是离散的 (**I**, 6.4.4)；因而 x 在它的纤维中是孤立的，这就表明 b) 蕴涵 a)。

推论 (6.2.2) — 设 $f : X \to Y$ 是一个有限型态射。则以下诸条件是等价的:

a) 每个点 $x \in X$ 在它的纤维 $f^{-1}(f(x))$ 中都是孤立的 (换句话说，子空间 $f^{-1}(f(x))$ 是离散的)。

b) 对任意 $x \in X$，概形 $f^{-1}(f(x))$ 都是一个有限 $\boldsymbol{k}(f(x))$ 概形。

c) 对任意 $x \in X$，环 $\mathscr{O}_x$ 都是一个拟有限 $\mathscr{O}_{f(x)}$ 模。

a) 和 c) 的等价性缘自 (6.2.1)。另一方面，由于 $f^{-1}(f(x))$ 是一个代数 $\boldsymbol{k}(f(x))$ 概形 (**I**, 6.4.11)，故知 a) 和 b) 的等价性缘自 (**I**, 6.4.4)。

定义 (6.2.3) — 如果 $f: X \to Y$ 是一个有限型态射，并且满足 (6.2.2) 中的等价条件，则我们称 f 是拟有限的，或称 X 在 Y 上是拟有限的。* **(追加 $_{\mathbf{III}}$, 20)** — 所谓一个态射 $f: X \to Y$ 在点 $x \in X$ 处是拟有限的，是指可以找到 $y = f(x)$ 的一个仿射开邻域 V 和 x 的一个仿射开邻域 U，满足 $f(U) \subset V$，并使得 f 的限制态射 $U \to V$ 是拟有限的。所谓一个态射 $f: X \to Y$ 是局部拟有限的，是指它在 X 的所有点处都是拟有限的。*

易见有限态射都是拟有限的 (6.1.8)。

命题 (6.2.4) — (i) 一个浸入 $X \to Y$ 在下面两种情况下是拟有限的态射：它是闭的，或者 X 是 Noether 的。

(ii) 若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是拟有限的态射，则 $g \circ f$ 也是如此。

(iii) 若 X 和 Y 都是 S 概形，$f: X \to Y$ 是一个拟有限 S 态射，则对任意基扩张 $g: S' \to S$，态射 $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ 都是拟有限的。

(iv) 若 $f: X \to Y$ 和 $g: X' \to Y'$ 是两个拟有限 S 态射，则

$$f \times_S g \;:\; X \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y'$$

也是拟有限的。

(v) 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个态射，并使得 $g \circ f$ 是拟有限的；于是若 g 是分离的，或者 X 是 Noether 的，或者 $X \times_Z Y$ 是局部 Noether 的，则 f 是拟有限的。

(vi) 若 f 是拟有限的，则 f_{red} 也是如此。

若 $f: X \to Y$ 是一个浸入，则它的所有纤维都只含一点，从而陈言 (i) 缘自 (**I**, 6.3.4 (i) 和 6.3.5)。为了证明 (ii)，首先注意到 $h = g \circ f$ 是有限型的 (**I**, 6.3.4 (ii))；进而，若 $z = h(x)$ 且 $y = f(x)$，则 y 在 $g^{-1}(z)$ 中是孤立的，从而可以找到 y 在 Y 中的一个开邻域 V，它不包含 $g^{-1}(z)$ 中的任何不同于 y 的点；从而 $f^{-1}(V)$ 是 x 的一个开邻域，并且与 $f^{-1}(y')$ 没有交点，其中 $y' \neq y$ 是 $g^{-1}(z)$ 中的一点；由于 x 在 $f^{-1}(y)$ 中是孤立的，故知它在 $h^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$ 中是孤立的。为了证明 (iii)，可以限于考虑 $Y = S$ 的情形 (**I**, 3.3.11)；首先仍然注意到 $f' = f_{(S')}$ 是有限型的 (**I**, 6.3.4, (iii))；另一方面，若 $x' \in X' = X_{(S')}$，并且令 $y' = f'(x'), y = g(y')$，则 ${f'}^{-1}(y')$ 可以等同于 $f^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(y')$ (**I**, 3.6.5)；由于根据前提条件 $f^{-1}(y)$ 在 $\boldsymbol{k}(y)$ 上是有限秩的，故知 ${f'}^{-1}(y')$ 在 $\boldsymbol{k}(y')$ 上是有限秩的，从而是离散的。陈言 (iv), (v), (vi) 都可由 (i), (ii), (iii) 推出来，按照 (**I**, 5.5.12) 中的一般方法，但是这只包含 (v) 中 “g 是分离的” 这个情形；为了处理其他的情形，注意到若 x 在 $f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))$ 中是孤立的，则它当

然在 $f^{-1}(f(x))$ 中也是孤立的；此时 f 是有限型的这个事实缘自 ($\mathbf{I}$, 6.3.6)。

命题 (6.2.5) — 设 A 是一个**完备** *Noether* 局部环，X 是一个局部有限型的分离 A 概形，x 是 X 的一个位于 $Y = \operatorname{Spec} A$ 的闭点 y 之上的点，并假设 x 在它的纤维 $f^{-1}(y)$ 中是孤立的（f 是指结构态射 $X \to Y$）。则 $\mathscr{O}_x$ 是一个有限型 A 模，并且 X 可以 Y 同构于 $X' = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_x$（这是一个有限 Y 概形）和另一个分离 A 概形 X'' 的和 ($\mathbf{I}$, 3.1)。

由 (6.2.1) 知，$\mathscr{O}_x$ 是一个拟有限的 A 模。由于 $\mathscr{O}_x$ 是 Noether 的 ($\mathbf{I}$, 6.3.7)，并且同态 $A \to \mathscr{O}_x$ 是局部的，故由 A 是完备的这个条件可以推出 $\mathscr{O}_x$ 是一个有限型 A 模 ($\mathbf{0}$, 7.4.3)。设 $X' = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_x$ 是 X 在点 x 处的局部概形 ($\mathbf{I}$, 2.4.1)，并设 $g : X' \to X$ 是典范态射。则由于合成态射 $X' \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ 是有限的 (6.1.1)，并且 f 是分离的，故知 g 是有限的 (6.1.5, (v))，从而 $g(X')$ 在 X 中是闭的 (6.1.10)；另一方面，由于 g 是有限型的，故依照 g 的定义和 ($\mathbf{I}$, 6.5.4)，g 在 X' 的闭点 x' 处是一个局部同构；然而 X' 是 x' 的唯一一个开邻域，这就意味着 g 是一个开浸入，从而 $g(X')$ 在 X 中也是开的，这就完成了证明。

推论 (6.2.6) — 设 A 是一个**完备** Noether 局部环，$Y = \operatorname{Spec} A$，$f : X \to Y$ 是一个分离且拟有限的态射。则 X 可以 Y 同构于一个和概形 $X' \coprod X''$，其中 X' 是一个有限 Y 概形，X'' 是一个在 Y 上分离且拟有限的概形，并且对于 Y 的闭点 y，我们有 $X'' \cap f^{-1}(y) = \varnothing$。

事实上，根据前提条件，纤维 $f^{-1}(y)$ 是有限且离散的，从而这个推论缘自 (6.2.5)，只要对这个纤维的点的个数进行归纳即可。

注解 (6.2.7) — 在第 IV 章我们将看到，若 Y 是局部 *Noether* 的，则一个分离且拟有限的态射 $X \to Y$ 必然是拟仿射的。

6.3 概形的相对整闭包

命题 (6.3.1) — 设 $(X, \mathscr{A})$ 是一个环积空间，$\mathscr{B}$ 是一个（交换）$\mathscr{A}$ 代数层，f 是 $\mathscr{B}$ 的一个整体截面。则以下诸性质是等价的:

a) 诸 f^n $(n \geqslant 0)$ 在 $\mathscr{B}$ 中所生成的 $\mathscr{A}$ 子模层 ($\mathbf{0}$, 5.1.1) 是有限型的。

b) 可以找到 $\mathscr{B}$ 的一个 $\mathscr{A}$ 子模层 $\mathscr{C}$，它是有限型 $\mathscr{A}$ 模层，并且 $f \in \Gamma(X, \mathscr{C})$。

c) 对任意 $x \in X$，f_x 在茎条 $\mathscr{A}_x$ 上都是整型的。

由于诸 f^n $(n \geqslant 0)$ 在 $\mathscr{B}$ 中所生成的 $\mathscr{A}$ 子模层是一个 $\mathscr{A}$ 代数层，故易见 a) 蕴涵 b)。另一方面，b) 蕴涵对任意 $x \in X$，$\mathscr{A}_x$ 模 $\mathscr{C}_x$ 都是有限型的，这又表明代数 $\mathscr{C}_x$ 中的任何元素在 $\mathscr{A}_x$ 上都是整型的，特别的 f_x 在 $\mathscr{A}_x$ 上是整型的。最后，若对某个 $x \in$

X，我们有一个关系式

$$f_x^n + (a_1)_x f_x^{n-1} + \cdots + (a_n)_x \ = \ 0 \ ,$$

其中 a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是 $\mathscr{A}$ 在 x 的某个开邻域 U 上的截面，则截面 $f^n|_U + a_1.f^{n-1}|_U + \cdots + a_n$ 在 x 的某个邻域 $V \subset U$ 上是零，由此立知，所有 $f^k|_V$ $(k \geqslant 0)$ 都是诸 $f^j|_V$ $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ 的 $\Gamma(V, \mathscr{A})$ 系数线性组合；这就表明 c) 蕴涵 a)。

如果 (6.3.1) 中的等价条件得到满足，则我们称截面 f 在 $\mathscr{A}$ 上是整型的。

推论 (6.3.2) — 在 (6.3.1) 的前提条件下，$\mathscr{B}$ 中有 (唯一) 一个 $\mathscr{A}$ 子模层 $\mathscr{A}'$，使得对任意 $x \in X$，$\mathscr{A}'_x$ 都是由那些在 $\mathscr{A}_x$ 上整型的芽 $f_x \in \mathscr{B}_x$ 所组成的集合。且对任意开集 $U \subset X$，$\mathscr{A}'$ 在 U 上的截面就是由那些在 $\mathscr{A}|_U$ 上整型的截面 $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$ 所组成的集合。

$\mathscr{A}'$ 的存在性是显然的，只要取 $\Gamma(U, \mathscr{A}')$ 就是这样一些 $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$ 所组成的集合，即对任意 $x \in U$，f_x 在 $\mathscr{A}_x$ 上都是整型的。第二个陈言可由 (6.3.1) 立得。

易见 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个 $\mathscr{A}$ 子代数层；我们称之为 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{B}$ 中的相对整闭包 (fermeture intégrale)。

(6.3.3) 设 $(X, \mathscr{A})$, $(Y, \mathscr{B})$ 是两个环积空间，

$$g \ = \ (\psi, \theta) \ : \ X \ \longrightarrow \ Y$$

是一个态射。设 $\mathscr{C}$ (相应的，$\mathscr{D}$) 是一个 $\mathscr{A}$ 代数层 (相应的，$\mathscr{B}$ 代数层)，并设

$$u \ : \ \mathscr{D} \ \longrightarrow \ \mathscr{C}$$

是一个 g 态射 (**0**, 4.4.1)。于是若 $\mathscr{A}'$ (相应的，$\mathscr{B}'$) 是 $\mathscr{A}$ (相应的，$\mathscr{B}$) 在 $\mathscr{C}$ (相应的，$\mathscr{D}$) 中的相对整闭包，则 u 在 $\mathscr{B}'$ 上的限制是一个 g 态射

$$u' \ : \ \mathscr{B}' \ \longrightarrow \ \mathscr{A}' \ 。$$

事实上，若 j 是典范含入 $\mathscr{B}' \to \mathscr{D}$，则只需证明

$$v \ = \ u^\sharp \circ g^*(j) \ : \ g^*\mathscr{B}' \ \longrightarrow \ \mathscr{C}'$$

把 $g^*\mathscr{B}'$ 映到 $\mathscr{A}'$ 中即可。然则，根据 $\mathscr{B}'$ 的定义，$(g^*\mathscr{B}')_x = \mathscr{B}'_{\psi(x)} \otimes_{\mathscr{B}_{\psi(x)}} \mathscr{A}_x$ 中的一个元素在 $\mathscr{A}_x$ 上是整型的，从而它在 v_x 下的像也是如此，这就证明了我们的陈言。

命题 (6.3.4) — 设 X 是一个概形，$\mathscr{A}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层。则 $\mathscr{O}_X$ 在 $\mathscr{A}$ 中的相对整闭包 $\mathscr{O}'_X$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层，并且对于 X 的任意开集 U，$\Gamma(U, \mathscr{O}'_X)$ 都是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 在 $\Gamma(U, \mathscr{A})$ 中的相对整闭包。

可以限于考虑 $X = \operatorname{Spec} B$ 是仿射概形的情形，此时 $\mathscr{A} = \widetilde{A}$，其中 A 是一个 B 代数；设 B' 是 B 在 A 中的相对整闭包。则问题归结为证明对任意 $x \in X$，A_x 的任何一个在 B_x 上整型的元素必然属于 B'_x，这缘自下面的事实：对于一个交换代数 C 来说，在 C 代数中取相对整闭包的运算与取分式环 (关于 C 的一个乘性子集) 的运算是可交换的 ([13], t, I, p. 261 和 257)。

以下我们把 X 概形 $X' = \operatorname{Spec} \mathscr{O}'_X$ 称为 X 相对于 $\mathscr{A}$（或者相对于 $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$）的整闭包；易见 X' 在 X 上是整型的 (6.1.2)。

由 (6.3.4) 立知，若 $f : X' \to X$ 是结构态射，则对于 X 的任意开集 U，$f^{-1}(U)$ 都是 X 的开子概形 U 相对于 $\mathscr{A}|_U$ 的整闭包。

(6.3.5) 设 X, Y 是两个概形，$f : X \to Y$ 是一个态射，$\mathscr{A}$（相应的，$\mathscr{B}$）是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层 (相应的，$\mathscr{O}_Y$ 代数层)，并设 $u : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 是一个 f 态射。于是由 (6.3.3) 知，我们有一个 f 态射 $u' : \mathscr{O}'_Y \to \mathscr{O}'_X$，其中 $\mathscr{O}'_X$（相应的，$\mathscr{O}'_Y$）是 $\mathscr{O}_X$（相应的，$\mathscr{O}_Y$）在 $\mathscr{A}$（相应的，$\mathscr{B}$）中的相对整闭包。从而若 X'（相应的，Y'）是 X（相应的，Y）相对于 $\mathscr{A}$（相应的，$\mathscr{B}$）的整闭包，则可以由 u 典范地导出一个态射 $f' = \operatorname{Spec}(u') : X' \to Y'$ (1.5.6)，并使下面的图表成为交换的

(6.3.5.1)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$
。

(6.3.6) 假设 X 只有有限个不可约分支 X_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$，分别具有一般点 ξ_i，并且我们考虑 X 相对于一个拟凝聚 $\mathscr{R}(X)$ 代数层 $\mathscr{A}$（作为 $\mathscr{O}_X$ 代数层是拟凝聚的与作为 $\mathscr{R}(X)$ 代数层是拟凝聚的，这两者是等价的）的整闭包。我们知道 (**I**, 7.3.5)，$\mathscr{A}$ 是 r 个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{A}_i$ 的直合，其中 $\mathscr{A}_i$ 的支集包含在 X_i 中，并且 $\mathscr{A}_i$ 在 X_i 上诱导的层是一个常值层，它的茎条 A_i 是 $\mathscr{O}_{\xi_i}$ 上的一个代数。此时易见 (6.3.4) $\mathscr{O}_X$ 在 $\mathscr{A}$ 中的相对整闭包 $\mathscr{O}'_X$ 就是 $\mathscr{O}_X$ 在每一个 $\mathscr{A}_i$ 中的相对整闭包 $\mathscr{O}_X^{(i)}$ 的直合，从而 X 相对于 $\mathscr{A}$ 的整闭包 $X' = \operatorname{Spec} \mathscr{O}'_X$ 就是诸 $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_X^{(i)} = X'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 的和 X 概形。

进而假设 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{A}$ 是既约的，这也相当于说，每个代数 A_i 都是既约的，从而可以被看作是域 $\boldsymbol{k}(\xi_i)$（等于 X 的以 X_i 为底空间的既约闭子概形的有理函数域）上的一个代数；此时 (1.3.8) 每个 X'_i 都是既约概形，且在 X 上是分离的，并且 X' 也是 X_{red} 的相对整闭包。进而假设每个代数 A_i 都是有限个域 K_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant s_i)$ 的直合；若 $\mathscr{K}_{ij}$ 是 $\mathscr{A}_i$ 的与 K_{ij} 相对应的子代数层，则易见 $\mathscr{O}_X^{(i)}$ 就是 $\mathscr{O}_X$ 在每个 $\mathscr{K}_{ij}$ 中的相对整闭包 $\mathscr{O}_X^{(ij)}$ 的直合。因而 X'_i 就是诸 X 概形 $X'_{ij} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X^{(ij)}$ $(1 \leqslant j \leqslant s_i)$ 的和概形。进而，在这些前提条件和记号下：

命题 (6.3.7) — 每个 X'_{ij} 都是整且正规的 X 概形，并且它的有理函数域 $\mathrm{R}(X'_{ij})$ 可以典范等同于 $\boldsymbol{k}(\xi_i)$ 在 K_{ij} 中的相对代数闭包 K'_{ij}，

依照上面所述，可以假设 X 是整的，从而 $r=1$ 且 $s_1=1$，于是这个唯一的代数 A_1 是一个域 K；设 ξ 是 X 的一般点，并设 $f: X'\to X$ 是结构态射。对于 X 的任意非空仿射开集 U，$f^{-1}(U)$ 都可以等同于整环 $B_U=\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ 在域 K 中的相对整闭包 B'_U (6.3.4)；由于环 B'_U 是整且整闭的，故知它在谱中的任意点处的局部环都是如此，从而根据定义 $f^{-1}(U)$ 是一个整且正规的分离概形 ((**0**, 4.1.4) 和 (**I**, 5.1.4))。进而，由于 (0) 是 B'_U 的位于 B_U 的素理想 (0) 之上的唯一素理想 ([13], t, I, p. 259)，故知 $f^{-1}(\xi)$ 只含一点 ξ'，并且 $\boldsymbol{k}(\xi')$ 就是 B'_U 的分式域 K'，它也与 $\boldsymbol{k}(\xi)$ 在 K 中的相对代数闭包无异。最后，X' 是不可约的，因为当 U 跑遍 X 的非空仿射开集的集合时，诸 $f^{-1}(U)$ 构成 X' 的一个开覆盖，并且是由不可约开集所组成的；进而任意这样两个开集的交集 $f^{-1}(U\cap V)$ 都包含 ξ'，从而不是空的，于是由 (**0**, 2.1.4) 就可以推出结论。

推论 (6.3.8) — 设 X 是一个既约概形，只有有限个不可约分支 X_i $(1\leqslant i\leqslant r)$，并设 ξ_i 是 X_i 的一般点。则 X 相对于 $\mathscr{R}(X)$ 的整闭包 X' 是 r 个整且正规的 X 概形 X'_i 的和概形，每个 X'_i 在 X 上都是分离的。若 $f: X'\to X$ 是结构态射，则 $f^{-1}(\xi_i)$ 只包含一点，即 X'_i 的一般点 ξ'_i，并且我们有 $\boldsymbol{k}(\xi'_i)=\boldsymbol{k}(\xi_i)$，换句话说，$f$ 是双有理的。

此时我们把 X' 称为既约概形 X 的正规化；注意到由于 f 是双有理且整型的，故知它是映满的 (6.1.10)。为了使 $X'=X$，必须且只需 X 是正规的。如果 X 是一个整概形，则由 (6.3.8) 知，它的正规化 X' 也是整的。

(6.3.9) 设 X, Y 是两个整概形，$f: X\to Y$ 是一个笼罩，$L=\mathrm{R}(X)$, $K=\mathrm{R}(Y)$ 是 X 和 Y 的有理函数域；则 f 典范地对应着一个含入 $K\to L$，并且如果把 K（相应的，L）等同于常值层 $\mathscr{R}(Y)$（相应的，$\mathscr{R}(X)$），则该含入是一个 f 态射。设 K_1（相应的，L_1）是 K（相应的，L）的一个扩张，并且假设给了一个嵌入 $K_1\to L_1$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \longrightarrow & L_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

是交换的；若我们把 K_1（相应的，L_1）看作是 Y（相应的，X）上的常值层，从而也是一个 $\mathscr{R}(Y)$ 代数层（相应的，$\mathscr{R}(X)$ 代数层），则这也意味着 $K_1\to L_1$ 是一个 f 态射。据此，若 X'（相应的，Y'）是 X（相应的，Y）相对于 L_1（相应的，K_1）的整闭包，则 X'（相应的，Y'）是一个整且正规的概形 (6.3.6)，其有理函数域可以典范等同于 L（相应的，K）在 L_1（相应的，K_1）中的相对代数闭包，并且存在一个典

范态射（必然是笼罩）$f' : X' \to Y'$，使得图表 (6.3.5.1) 是交换的。

最重要的一个情形是：我们取 $L_1 = L$，从而 K_1 是 K 的一个包含在 L 中的扩张，再假设 X 是整且正规的，从而 $X' = X$。此时上面所述表明，如果 X 是正规的，并且 Y' 是 Y 相对于域 $K_1 \subset L = \mathrm{R}(X)$ 的整闭包，则任何笼罩 $f : X \to Y$ 都可以分解为

$$f \ : \ X \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow Y \ ,$$

其中 f' 是笼罩；此外，如果嵌入 $K_1 \to L$ 是给定的，则 f' 必然是唯一的，因为可以归结到 X 和 Y 都是仿射概形的情形。从而我们看到，对于给定的 Y, L 和 K 嵌入 $K_1 \to L$，Y 相对于 K_1 的整闭包 Y' 是一个普适问题的解。

注解 (6.3.10) — 回到 (6.3.6) 的前提条件，进而假设每个代数 A_i 在 $\boldsymbol{k}(\xi_i)$ 上都是有限秩的（这表明 A_i 是有限个域的直合）；则在某些情形下可以证明，结构态射 $X' \to X$ 不仅是整型的，甚至是有限的。我们限于考虑 X 是既约概形的情形；由于问题在 Y 上是局部性的，故可进而假设 X 是仿射的，环为 C，并且 C 只有有限个极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$，$C_i = C/\mathfrak{p}_i$ 都是整的；此时若诸 C_i 在它的分式域的每个有限扩张中的相对整闭包都是有限型 C 模，则 X' 在 X 上是有限的 (6.3.4)。我们知道如果 C 是域上的有限型代数 ([13], t, I, p. 267, 定理 9)，或者是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型代数 [9, I, p. 93, 定理 3]，或者是完备 *Noether* 局部环上的有限型代数 ([25], p. 298)，则上述条件总是成立的。由此可知，若 X 在某个域（或者 $\mathbb{Z}$，或者某个完备 Noether 局部环）上是有限型且分离的，则 $X' \to X$ 是一个有限态射。

6.4 $\mathscr{O}_X$ 模层的自同态的行列式

(6.4.1) 设 A 是一个（交换）环，E 是一个 n 秩自由 A 模，u 是 E 的一个自同态；还记得为了定义 u 的特征多项式，我们需要考虑 n 秩自由 $A[T]$ 模 $E \otimes_A A[T]$（T 是未定元），并且令

(6.4.1.1) $$P(u,T) \ = \ \det\big(T.I - (u \otimes 1)\big)$$

（其中 I 是指 $E \otimes_A A[T]$ 的恒同自同构）。于是

(6.4.1.2) $$P(u,T) \ = \ T^n - \sigma_1(u)T^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n(u) \ ,$$

其中 $\sigma_i(u)$ 是 A 中的一个元素，等于 u 在 E 的任意一个基底下的矩阵的元素的一个（整系数）i 次齐次多项式；我们把这些 σ_i 称为 u 的基本对称函数，特别的，$\sigma_1 = \mathrm{Tr}\ u$ 且 $\sigma_n = \det u$。还记得依照 Hamilton-Cayley 定理，我们有

(6.4.1.3) $$P(u,u) \ = \ u^n - \sigma_1(u)u^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n(u) \ = \ 0 \ 。$$

这也可以写成

(6.4.1.4) $$(\det u).1_E = uQ(u)$$

（1_E 是 E 的恒同自同构），其中

(6.4.1.5) $$Q(u) = (-1)^{n+1}(u^{n-1} - \sigma_1(u)u^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(u))$$ 。

设 $\varphi : A \to B$ 是一个环同态，它使 B 成为一个 A 代数；考虑 B 模 $E_{(B)} = E\otimes_A B$，它是 n 秩自由的，并且 u 可以扩张为 $E_{(B)}$ 的一个自同态 $u\otimes 1$；易见对任意指标 i，均有 $\sigma_i(u\otimes 1) = \varphi(\sigma_i(u))$。

(6.4.2) 现在假设 A 是一个整环，分式域为 K，并且 E 是一个有限型 A 模（未必自由）。设 n 是 E 的秩，也就是说，它是 K 模 $E\otimes_A K$ 的秩；则 E 的任何自同态 u 都典范地对应着 $E\otimes_A K$ 的自同态 $u\otimes 1$；适当混用一下术语，我们也把多项式 $P(u\otimes 1, T)$ 称为 u 的特征多项式，并记作 $P(u,T)$，它的系数 $\sigma_i(u\otimes 1)$（属于 K）仍记作 $\sigma(u)$，并且称之为 u 的基本对称函数；特别的，$\det u = \det(u\otimes 1)$，这是根据定义。在这些记号下，公式 (6.4.1.3) 到 (6.4.1.5) 在某种意义下仍然是有效的，只要我们把 u^j 解释为一个同态 $E \to E\otimes_A K$，即 $E\otimes_A K$ 的自同态 $u^j\otimes 1 = (u\otimes 1)^j$ 与典范同态 $x\mapsto x\otimes 1$ 的合成。

若 F 是 E 的挠模，并且 $E_0 = E/F$，则有 $u(F)\subset F$，从而 u 通过取商可以给出 E_0 的一个自同态 u_0；进而 $E\otimes_A K$ 可以等同于 $E_0\otimes_A K$，并且 $u\otimes 1$ 可以等同于 $u_0\otimes 1$，从而 $\sigma_i(u) = \sigma_i(u_0)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$。

若 E 是无挠的，则 E 可以典范等同于 $E\otimes_A K$ 的一个 A 子模，并且关系式 $u\otimes 1 = 0$ 等价于 $u = 0$。如果 E 是一个自由 A 模，则根据上面所述，$\sigma_i(u)$ 的两个定义 (6.4.1) 和 (6.4.2) 是一致的，这也说明了所采用的记号是合理的。

还可以注意到，若 E 是一个挠模，换句话说，$E_0 = \{0\}$，则 E_0 的外代数简化为 K，并且 E_0 的唯一自同态 u_0 的行列式等于 1。

命题 (6.4.3) — *设 A 是一个整环，E 是一个有限型 A 模，u 是 E 的一个自同态；则 u 的基本对称函数 $\sigma_i(u)$（特别的 $\det u$）都是 K 的一个在 A 上整型的元素。*

设 A' 是 A 的整闭包；由于 $A'[T]$ 是一个整闭整环 ([24], p. 99)，故知它是 $A[T]$ 在其分式域 $K[T]$ 中的整闭包。把 u 换成 $T.I - u\otimes 1$ 并把 A 换成 $A[T]$，则我们看到，问题归结为证明 $\det u$ 在 A 上是整型的。若 n 是 E 的秩，则有 $\det u = \det(\wedge^n u)$ 和 $(\wedge^n u)\otimes 1 = \wedge^n(u\otimes 1)$，从而可以假设 $n = 1$。此时映射 $u\mapsto \det u$ 是 A 模 $\mathrm{Hom}_A(E,E)$ 到 K 的一个同态；由于 E 是有限型的，故知 $\mathrm{Hom}_A(E,E)$ 同构于某个有限型 A 模 E^n 的子模（比如 E 可由 n 个元素所生成），从而元素 $\det u$ 落在 K 的一个有限型 A 子模之中，因而在 A 上是整型的。

* **(订正$_{\mathbf{III}}$, 21)** — 这个证明是不对的，因为 K 的有限型 A 子模的元素在 A 上未必是整型的。修改如下：

可以假设 E 是无挠的，从而是忠实的，则 E 也是一个忠实 $A[u]$ 模 (把 A 嵌入 E 的自同态环中)。由于 E 是一个有限型 A 模，故知 u 在 A 上是整型的 (Bourbaki, 《交换代数学》, V, §1, n° 1, 引理 1)。由此立知，$u\otimes 1$ 的诸特征值 (在 K 的一个代数闭包中) 在 A 上都是整型的，从而 $\sigma_i(u)$ 也是如此。*

推论 (6.4.4) — 在 (6.4.3) 的前提条件下，若进而假设 A 是整闭的，则诸 $\sigma_i(u)$ (特别的 $\operatorname{Tr} u$ 和 $\det u$) 都属于 A。

命题 (6.4.5) — 设 A 是一个整环，E 是一个有限型 A 模，秩为 n，u 是 E 的一个自同态，并使得诸 $\sigma_i(u)$ 都落在 A 中。则为了使 u 是 E 的一个自同构，必须 $\det u$ 要在 A 中是可逆的，如果 E 是无挠的，则这个条件也是充分的。

条件是充分的，因为前提条件和公式 (6.4.1.4), (6.4.1.5) (在 E 上也是成立的，不仅是在 $E\otimes_A K$ 上成立，因为 E 是无挠的) 表明，$(\det u)^{-1}Q(u)$ 就是 u 的逆。

条件是必要的，因为若 u 是可逆的，则由 (6.4.3) 知，$\det(u^{-1})$ 落在 A 在其分式域 K 中的整闭包 A' 之中，并且显然是 $\det u$ 在 A' 中的逆。于是我们的陈言缘自：

引理 (6.4.5.1) — 设 A 是环 A' 的一个子环，并且 A' 在 A 上是整型的。于是若元素 $x\in A$ 在 A' 中是可逆的，则它在 A 中也是可逆的。

如果这是不对的，则 x 属于 A 的某个极大理想 $\mathfrak{m}$，并且由 Cohen-Seidenberg 第一定理 ([13], t, I, p. 257, th, 3) 知，可以找到 A' 的一个极大理想 $\mathfrak{m}'$，使得 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}'\cap A$；从而我们有 $x\in\mathfrak{m}'$，这是荒谬的。

推论 (6.4.6) — 设 A 是一个整闭整环，E 是一个无挠的有限型 A 模，u 是 E 的一个自同态。则为了使 u 是 E 的一个自同构，必须且只需 $\det u$ 在 A 中是可逆的，

这缘自 (6.4.4) 和 (6.4.5)。

注解 (6.4.7) — 我们在后面将会需要上述结果的一个推广。考虑一个 Noether 既约环 A；设 $\mathfrak{p}_\alpha$ $(1\leqslant\alpha\leqslant r)$ 是它的极小素理想，K_α 是整环 $A/\mathfrak{p}_\alpha$ 的分式域，K 是 A 的全分式环，它是这些域 K_α 的直合。设 E 是一个有限型 A 模，并假设 $E\otimes_A K$ 是一个 n 秩自由 K 模 (此时它不能由其它条件推出)；这相当于说，所有 K_α 向量空间 $E\otimes_A K_\alpha=E_\alpha$ 都具有相同的秩 n；于是若 u 是 E 的一个自同态，则仍然可以令 $P(u,T)=P(u\otimes 1,T)$ 和 $\sigma_j(u)=\sigma_j(u\otimes 1)$，特别的，$\det u=\det(u\otimes 1)$；从而诸 $\sigma_j(u)$ 都是 K 中的元素。易见 $E\otimes_A K$ 是诸 E_α 的直和，并且这些 E_α 在 $u\otimes 1$ 下都是稳定的；此外，$u\otimes 1$ 在 E_α 上的限制与 u 在这个 K_α 向量空间上的延拓 u_α 无异；由此可知，$\sigma_j(u)$ 是 K 中的这样一个元素，它在 K_α 中的分量正好是 $\sigma_j(u_\alpha)$。由

于 A 在 K 中的相对整闭包就是 A 在这些 K_α 中的相对整闭包的直合，故知这些 $\sigma_j(u)$ 在 A 上都是整型的。

引理 (6.4.7.1) — 当 u 跑遍 $\mathrm{Hom}_A(E,E)$ 时，由所有元素 $\sigma_j(u)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 在 K 中所生成的 A 子代数是一个有限型 A 模。

只需证明诸 $P(u,T)$ 在 $K[T]$ 中所生成的 $A[T]$ 子代数是一个有限型 $A[T]$ 子模，因为若 $F_i(T)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 构成这个 $A[T]$ 模的一个生成元组，则这些 $F_i(T)$ 的系数在 A 上都是整型的，从而生成一个 A 代数，并且它是有限型 A 模 ([13], t, I, p. 255, 定理 1)。于是可以把 A 换成 $A[T]$（它是 Noether 的）并把 E 换成 $E \otimes_A A[T] = E'$，注意到 $E' \otimes_{A[T]} K[T] = E \otimes_A K[T]$ 是一个 n 秩的自由 $K[T]$ 模。回到最初的记号，从而只需证明，当 u 跑遍 $\mathrm{Hom}_A(E,E)$ 时，由元素 $\det u$ 所生成的 A 模是有限型的；自然 (因为有限型 A 模的子模也是有限型的) 只需证明当 v 跑遍 $\wedge^n E$ 的自同态集合时，由诸 $\det v$ 所生成的 A 模是有限型的；换句话说，仍然可以归结到 $n=1$ 的情形。此时命题缘自下面的事实：$\mathrm{Hom}_A(E,E)$ 是一个有限型 A 模，并且 $v \mapsto \det v$ 是该模到 K 中的一个同态。

设 F 是典范同态 $E \to E \otimes_A K$ 的核，并设 $E_0 = E/F$；则我们在上面已经看到，$E \otimes_A K$ 可以等同于 $E_0 \otimes_A K$，$u(F) \subset F$，并且若 u_0 是 E_0 的这样一个自同态，它是由 u 通过取商而导出的，则 $u \otimes 1$ 可以等同于 $u_0 \otimes 1$，并且对任意 j 均有 $\sigma_j(u) = \sigma_j(u_0)$。若 $F=0$，则公式 (6.4.1.3) 到 (6.4.1.5) 在某种意义下仍然是有效的，只要我们把 E 等同于 $E \otimes_A K$ 的一个子模，并且把 u^j 等同于一个同态 $E \to E \otimes_A K$；于是命题 (6.4.5) 及其证明都可以扩展到这个情形。

(6.4.8) 设 $(X,\mathscr{A})$ 是一个环积空间，$\mathscr{E}$ 是一个 (有限秩) 局部自由 $\mathscr{A}$ 模层，u 是 $\mathscr{E}$ 的一个自同态。根据前提条件，可以找到 X 的一个拓扑基 $\mathfrak{B}$，使得对任意 $V \in \mathfrak{B}$，$\mathscr{E}|_V$ 都同构于 $\mathscr{A}^n|_V$（n 可以随着 V 而变化）。设 u 是 $\mathscr{E}$ 的一个自同态；则对任意 $V \in \mathfrak{B}$，u_V 都是 $\Gamma(V,\mathscr{A})$ 模 $\Gamma(V,\mathscr{E})$（根据前提条件，它是自由的）的一个自同态，从而行列式 $\det u_V$ 是有定义的，且属于 $\Gamma(V,\mathscr{A})$。进而，若 $e_1,\dots,e_n$ 构成 $\Gamma(V,\mathscr{E})$ 的一个基底，则它们限制到任意开集 $W \subset V$ 上都构成 $\Gamma(W,\mathscr{E})$ 在 $\Gamma(W,\mathscr{A})$ 上的一个基底，从而 $\det u_W$ 是 $\det u_V$ 在 W 上的限制。因而在 $\mathscr{A}$ 上有唯一一个这样的整体截面，它在每个 $V \in \mathfrak{B}$ 上的限制都等于 $\det u_V$，我们记之为 $\det u$，并且称之为 u 的行列式。易见对任意 $x \in X$，均有 $(\det u)_x = \det u_x$；对于 $\mathscr{E}$ 的两个自同态 u, v，我们有

(6.4.8.1) $$\det(u \circ v) = (\det u)(\det v) \ ,$$

并且

(6.4.8.2) $$\det(1_{\mathscr{E}}) = 1_{\mathscr{A}} \ 。$$

若 $\mathscr{E}$ 的秩是常值的 (比如 X 是连通的 $(\mathbf{0}, 5.4.1)$)，并且等于 n，则对任意 $s \in \Gamma(X,\mathscr{A})$，

均有

(6.4.8.3) $$\det(s.u) = s^n \det u$$

（注意到 $n \geqslant 1$ 时 $\det(0) = 0_{\mathscr{A}}$，但是 $n = 0$ 时 $\det(0) = 1_{\mathscr{A}}$）。进而，为了使 u 是 $\mathscr{E}$ 的一个自同构，必须且只需 $\det u$ 在 $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 中是可逆的。

若 $\mathscr{E}$ 的秩是常值的，则可以同样地定义基本对称函数 $\sigma_i(u)$，它们都是 $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 中的元素；而且关系式 (6.4.1.3) 到 (6.4.1.5) 仍然成立。

于是我们定义了一个乘法单演[①]的同态 $\det : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$；注意到根据定义 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) = \Gamma(X, \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}))$，故我们看到，在上述定义中可以把 X 换成任意的开集 $U \subset X$，由此定义出一个乘法单演层的同态 $\det : \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathscr{A}$。如果 $\mathscr{E}$ 的秩是常值的，则同样可以定义集合层的同态 $\sigma_i : \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathscr{A}$；对于 $i = 1$，同态 $\sigma_1 = \mathrm{Tr}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层同态。

设 $(Y, \mathscr{B})$ 是另一个环积空间，并设 $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ 是一个环积空间态射；若 $\mathscr{F}$ 是一个局部自由 $\mathscr{B}$ 模层，则 $f^*\mathscr{F}$ 是一个局部自由 $\mathscr{A}$ 模层（它和 $\mathscr{F}$ 具有相同的秩，只要 $\mathscr{F}$ 的秩是常值的）(**0**, 5.4.5)。对于 $\mathscr{F}$ 的任意自同态 v，$f^*(v)$ 都是 $f^*\mathscr{F}$ 的自同态，并且由定义立知，$\det f^*(v)$ 是 $\mathscr{A} = f^*\mathscr{B}$ 的这样一个整体截面，它典范对应着 $\det v \in \Gamma(Y, \mathscr{B})$。我们也可以说同态 $f^*(\det) : f^*\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \to f^*\mathscr{B} = \mathscr{A}$ 是下面这个合成

$$f^*\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\gamma^\sharp} \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(f^*\mathscr{F}, f^*\mathscr{F}) \xrightarrow{\det} \mathscr{A}$$

(**0**, 4.4.6)。类似结果对 σ_i 也成立。

(6.4.9) 现在假设 X 是一个*局部整概形*，于是 X 上的有理函数层 $\mathscr{R}(X)$ 是一个局部常值的域层 (**I**, 7.3.4)，并且作为 $\mathscr{O}_X$ 模层是拟凝聚的。若 $\mathscr{E}$ 是一个*有限型*的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，则 $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是一个局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层 (**I**, 7.3.6)；于是对于 $\mathscr{E}$ 的任意自同态 u，$u \otimes 1_{\mathscr{R}(X)}$ 都是 $\mathscr{E}'$ 的一个自同态，并且 $\det(u \otimes 1)$ 是 $\mathscr{R}(X)$ 的一个整体截面，我们也称之为 u 的*行列式*，并记作 $\det u$。由 (6.4.3) 知，$\det u$ 是 $\mathscr{O}_X$ 在 $\mathscr{R}(X)$ 中的相对整闭包的一个截面 (6.3.2)；进而若 X 是*正规*的，则 $\det u$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的整体截面，若进而假设 $\mathscr{E}$ 是*无挠*的，则依照 (6.4.6)，为了使 u 是 $\mathscr{E}$ 的一个自同构，必须且只需 $\det u$ 是可逆的。公式 (6.4.8.1) 到 (6.4.8.3) 仍然是有效的；把同态 $u \mapsto \det u$ 应用到 $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{E})$ 的截面模上，则可以导出一个层同态 $\det : \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathscr{R}(X)$，并且当 X 正规时，这个同态取值在 $\mathscr{O}_X$ 中。如果 $\mathscr{E}'$ *的秩是常值的*，则对于基本对称函数 $\sigma_j(u)$ 也有类似的定义和结果；进而若 X 是正规的，则诸 $\sigma_j(u)$ 都是 $\mathscr{O}_X$ 的整体截面。

最后，设 X, Y 是两个整概形，$f : X \to Y$ 是一个笼罩。则我们有典范同态

[①] 译注：单演 =“monoïde”。

$f^*\mathscr{R}(Y) \to \mathscr{R}(X)$ (**I**, 7.3.8 的订正)，由此可知，对每个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{F}$，均有典范同态 $\theta : f^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{R}(Y)) \to (f^*\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$。若 v 是 $\mathscr{F}$ 的一个自同态，则 $f^*(v \otimes 1_{\mathscr{R}(Y)})$ 是 $f^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{R}(Y))$ 的一个自同态，并且我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} f^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{R}(Y)) & \xrightarrow{f^*(v\otimes 1)} & f^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{R}(Y)) \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ (f^*\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X) & \xrightarrow[f^*(v)\otimes 1]{} & (f^*\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X) \end{array} \quad 。$$

由此易见，$\det f^*(v)$ 就是 $\mathscr{R}(Y)$ 的截面 $\det v$ 在同态 $f^*\mathscr{R}(Y) \to \mathscr{R}(X)$ 下的典范像；事实上，问题显然可以归结到下面的情形：$X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ 都是仿射的，A 和 B 都是整环，分式域分别是 K 和 L，同态 $B \to A$ 是单的，从而可以延拓为一个嵌入 $L \to K$；若 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个有限型 B 模，则 $M \otimes_B L$ 在 L 上的秩等于 $(M \otimes_B A) \otimes_A K$ 在 K 上的秩，并且对于 M 的任意自同态 u，$\det((u \otimes 1) \otimes 1)$ 都是 $\det(u \otimes 1)$ 在 K 中的像，故得结论。

(6.4.10) 最后假设 X 是一个既约局部 *Noether* 概形，从而 X 上的有理函数层 $\mathscr{R}(X)$ 仍然是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 (**I**, 7.3.4)；另一方面，设 $\mathscr{E}$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，并使得 $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是 (有限秩) 局部自由的。则依照 (6.4.7)，若 $\mathscr{E}'$ 的秩是常值的，则对于 $\mathscr{E}$ 的任意自同态 u，都可以定义 $\sigma_j(u)$，并且它们都是 $\mathscr{R}(X)$ 的整体截面。即使不假设 $\mathscr{E}'$ 的秩是常值的，仍然可以定义同态 $\det : \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathscr{R}(X)$。

6.5 可逆层的范数

(6.5.1) 设 $(X, \mathscr{A})$ 是一个环积空间，$\mathscr{B}$ 是一个 (交换) $\mathscr{A}$ 代数层。则 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{B}$ 可以典范等同于 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{B})$ 的一个 $\mathscr{A}$ 子模层，$\mathscr{B}$ 在 X 的开集 U 上的一个截面 f 可以等同于乘以该截面的运算所定义的同态。若 $(X, \mathscr{A})$ 和 $\mathscr{B}$ 满足 (6.4.8), (6.4.9) 或 (6.4.10) 中所列举的条件之一，则可以定义 $\det(f)$ (在某些情况下还可以定义 $\sigma_j(f)$)，它是 $\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{R}(X)$ 在 U 上的截面，称为 f 的范数 (相应的，f 的基本对称函数)，并且记为 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(f)$。我们现在假设下面两个条件之一是满足的：

(I) *$\mathscr{B}$ 是一个 (有限秩) 局部自由 $\mathscr{A}$ 模层。*

(II) *$(X, \mathscr{A})$ 是一个既约局部 Noether 概形，$\mathscr{B}$ 是一个凝聚 $\mathscr{A}$ 模层，假设 $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是一个局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层，并且对于开集 $U \subset X$ 上的任意截面 $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$，$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(f)$ 都是 $\mathscr{A}$ 在 U 上的一个截面。*

注意到如果局部 Noether 概形 X 是正规的，则后一个条件自动满足 (6.4.9)。

另一方面，$\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是局部自由的这个条件也可以用下面的方法来消去：我们用 X_α 来标记 X 的那些以不可约分支为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)，从而它们

都是局部 Noether 整概形。任何 $x \in X$ 都只能落在有限个 X_α 之中；另一方面，$\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X_\alpha)$ 是一个具有常数秩 k_α 的局部自由 $\mathscr{R}(X_\alpha)$ 模层 (**I**, 7.3.6)；说 $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是一个局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层即意味着对任意 $x \in X$，满足 $x \in X_\alpha$ 的那些指标 α 所对应的秩 k_α 都是相等的。事实上，问题是局部性的，故可归结到下面的情形：$X = \operatorname{Spec} C$，其中 C 是一个 Noether 既约环，$\mathscr{B} = \widetilde{D}$，其中 D 是一个 C 代数，并且是一个有限型 C 模；若 $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是 C 的全体极小素理想，则 C 的全分式环 L 就是诸整环 $C/\mathfrak{p}_i$ 的分式域 K_i 的直合，并且 $D \otimes_C L$ 就是诸 $D \otimes_C K_i$ 的直和，故得结论。

易见在条件 (I) 或 (II) 下，可以定义一个乘法单演层的同态 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$，仍记为 N（只要不会造成误解），且称为范数同态。从而对于 $\mathscr{B}$ 在同一个开集 U 上的两个截面 f, g，我们有

(6.5.1.1) $$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(fg) = \mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(f)\,\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(g) ,$$

取值于 $\mathscr{A}$ 在 U 上的截面集合；

(6.5.1.2) $$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(1_{\mathscr{B}}) = 1_{\mathscr{A}} 。$$

最后，对于 $\mathscr{A}$ 在 U 上的任意截面 s，均有

(6.5.1.3) $$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(s.1_{\mathscr{B}}) = s^n ,$$

这里假设 $\mathscr{B}$ 的秩是常值的，并且等于 n（对于 $s = 0_{\mathscr{A}}$，该公式在 $n \geqslant 1$ 时给出 $N(0_{\mathscr{B}}) = 0_{\mathscr{A}}$，而在 $n = 0$ 时给出 $N(0_{\mathscr{B}}) = N(1_{\mathscr{B}}) = 1_{\mathscr{A}}$）。

在条件 (I) 下，为了使 $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$ 是可逆的，必须且只需 $N(f) \in \Gamma(U, \mathscr{A})$ 是如此。在条件 (II) 下，这个条件也是必要的；如果再假设 $\mathscr{B} \to \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是单的，并且下面这个更强条件得到满足，则这个条件是充分的（根据 (6.4.7)）：

(II 改) $(X, \mathscr{A})$ *是一个既约局部 Noether 概形，$\mathscr{B}$ 是一个凝聚 $\mathscr{A}$ 模层，假设 $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是一个局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层，并且对于任意使得 $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)|_U$ 在 $\mathscr{R}(X)|_U$ 具有常数秩 n 的开集 U，和任意截面 $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$，诸 $\sigma_j(f)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 都是 $\mathscr{A}$ 在 U 上的截面。*

（注意到若 X 是正规的，则这个条件总能得到满足。）

(6.5.2) 假设 (6.5.1) 的条件 (I), (II) 之一得到满足，并设 $\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{B}$ 模层。我们现在要把 $\mathscr{L}'$ 典范地对应到一个可逆 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{L}$（只差一个唯一的同构），方法是这样的：以 $\mathscr{A}^*$（相应的，$\mathscr{B}^*$）来记 $\mathscr{A}$（相应的，$\mathscr{B}$）的这样一个子层，对任意开集 $U \subset X$，$\Gamma(U, \mathscr{A}^*)$（相应的，$\Gamma(U, \mathscr{B}^*)$）都是 $\Gamma(U, \mathscr{A})$（相应的，$\Gamma(U, \mathscr{B})$）众的可逆元的集合；它们都是乘法群层，并且 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ 在 $\mathscr{B}^*$ 上的限制是一个群层同态 $\mathscr{B}^* \to \mathscr{A}^*$ (6.5.1)。设 $\mathfrak{L}$ 是这样一些二元组 $(U_\lambda, \eta_\lambda)$ 所组成的集合：U_λ 是 X 的一个开集，η_λ

是一个 $(\mathscr{B}|_{U_\lambda})$ 模层同构: $\mathscr{L}'|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}|_{U_\lambda}$。根据前提条件，诸 U_λ 构成 X 的一个覆盖；对任意两个指标 λ, μ，我们令 $\omega_{\lambda\mu} = (\eta_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu})\circ(\eta_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu})^{-1}$，它是 $\mathscr{B}|_{U_\lambda\cap U_\mu}$ 的自同构，并且可以典范等同于 $\mathscr{B}^*$ 在 $U_\lambda\cap U_\mu$ 上的一个截面，于是 $(\omega_{\lambda\mu})$ 是覆盖 $\mathfrak{U} = (U_i)$ 的一个取值在 $\mathscr{B}^*$ 中的 1 阶上圈 $(\mathbf{0}, 5.4.7)$。由 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 是一个同态的事实可以推出，$(\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}\omega_{\lambda\mu})$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个取值在 $\mathscr{A}^*$ 中的 1 阶上圈，从而它对应着 (只差一个唯一的同构) 一个可逆 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{L}$ $(\mathbf{0}, 5.4.7)$，我们记之为 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{L}')$，并且称为可逆 $\mathscr{B}$ 模层 $\mathscr{L}'$ 的范数。

设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个子集，其中的 U_λ 仍然构成 X 的一个覆盖，并设 $\mathfrak{V}$ 就是这个覆盖；则上圈 $(\omega_{\lambda\mu})$ 在 $\mathfrak{V}$ 上的限制定义了 $\mathfrak{V}$ 的一个取值在 $\mathscr{A}^*$ 中的 1 阶上圈，它是 $\mathfrak{U}$ 上的 1 阶上圈 $(\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}\omega_{\lambda\mu})$ 在 $\mathfrak{V}$ 上的限制；易见我们有一个从 $\mathfrak{V}$ 上的这个 1 阶上圈所定义的可逆 $\mathscr{A}$ 模层到 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{L}')$ 上的典范同构，这表明该可逆 $\mathscr{A}$ 模层可以用 $\mathfrak{U}$ 的任意一个子覆盖来定义。由此易见，若 $\mathscr{L}'_1, \mathscr{L}'_2$ 是两个可逆 $\mathscr{B}$ 模层，则依照 (6.5.1.1) 和 (6.5.1.2)，我们有

(6.5.2.1)
$$\mathrm{N}(\mathscr{L}'_1 \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{L}'_2) \;=\; \mathrm{N}(\mathscr{L}'_1) \otimes_{\mathscr{A}} \mathrm{N}(\mathscr{L}'_2)$$

且

(6.5.2.2)
$$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{B}) \;=\; \mathscr{A} \quad 。$$

还有

(6.5.2.3)
$$\mathrm{N}(\mathscr{L}'^{-1}) \;=\; (\mathrm{N}(\mathscr{L}'))^{-1} \;,$$

只差一个典范同构。进而，由 (6.5.1.3) 知，若 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{A}$ 模层，并且在条件 (I) 下，$\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的秩是常数 n (相应的，在条件 (II) 下，$\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{R}(X)$ 在 $\mathscr{R}(X)$ 上的秩是常数 n)，则有

(6.5.2.4)
$$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{L}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{B}) \;=\; \mathscr{L}^{\otimes n} \quad ,$$

只差一个典范同构。

(6.5.3) 下面我们证明 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{L}')$ 是可逆 $\mathscr{B}$ 模层范畴上的一个协变函子。事实上，设 $h' : \mathscr{L}'_1 \to \mathscr{L}'_2$ 是可逆 $\mathscr{B}$ 模层的一个同态，并设 $\mathfrak{V} = (U_\lambda)$ 是 X 的一个开覆盖，且使得对任意 λ，均有两个 $(\mathscr{B}|_{U_\lambda})$ 同构 $\eta_\lambda^{(1)} : \mathscr{L}'_1|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}|_{U_\lambda}$ 和 $\eta_\lambda^{(2)} : \mathscr{L}'_2|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}|_{U_\lambda}$；于是对每个 λ，都有 $\mathscr{B}|_{U_\lambda}$ 的一个自同态 h'_λ，使得 $h'_\lambda\circ\eta_\lambda^{(1)} = \eta_\lambda^{(2)}\circ(h'|_{U_\lambda})$，显然可以把 h'_λ 等同于 $\mathscr{B}$ 在 U_λ 上的一个截面 $(\mathbf{0}, 5.1.1)$。从而对任意一组指标 (λ, μ)，$(\eta_\lambda^{(2)})^{-1}\circ h'_\lambda\circ\eta_\lambda^{(1)}$ 和 $(\eta_\mu^{(2)})^{-1}\circ h'_\mu\circ\eta_\mu^{(1)}$ 在 $U_\lambda\cap U_\mu$ 上的限制都是重合的。由此可知，若 $(\omega_{\lambda\mu}^{(1)})$ 和 $(\omega_{\lambda\mu}^{(2)})$ 是取值在 $\mathscr{B}^*$ 中的两个 1 阶上圈，分别对应于 $\mathscr{L}'_1$ 和 $\mathscr{L}'_2$，则有关系式
$$\omega_{\lambda\mu}^{(2)} h'_\mu \;=\; h'_\lambda \omega_{\lambda\mu}^{(1)} \quad 。$$

从而若令 $h_\lambda = \mathrm{N}(h'_\lambda)$，则有类似的关系式

$$\mathrm{N}(\omega_{\lambda\mu}^{(2)})h_\mu \;=\; h_\lambda\mathrm{N}(\omega_{\lambda\mu}^{(1)}) \quad 。$$

因而诸 h_λ 定义了一个同态 $\mathrm{N}(\mathscr{L}'_1) \to \mathrm{N}(\mathscr{L}'_2)$，我们记之为 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(h')$ 或 $\mathrm{N}(h')$。在条件 (I) 下，为了使 h' 是一个同构，必须且只需 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(h')$ 是如此 (因为问题是局部性的)。在条件 (II) 下，这个条件仍然是必要的；若假定 (II 改) 成立，并且 $\mathscr{B} \to \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是单的，则这个条件也是充分的。

特别的，取 $\mathscr{L}'_1 = \mathscr{B}$；则同态 $\mathscr{B} \to \mathscr{L}'$ 可以等同于 (**0**, 5.1.1) $\mathscr{L}'$ 的整体截面，故有一个典范映射

$$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} \;:\; \Gamma(X, \mathscr{L}') \;\longrightarrow\; \Gamma(X, \mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{L}')) \quad 。$$

仍由 (6.5.1.1) 可知，若 $f'_1 \in \Gamma(X, \mathscr{L}'_1)$, $f'_2 \in \Gamma(X, \mathscr{L}'_2)$，则有

(6.5.3.1)
$$\mathrm{N}(f'_1 \otimes f'_2) \;=\; \mathrm{N}(f'_1) \otimes \mathrm{N}(f'_2) \quad 。$$

有见于 (6.5.2.4)，对任意可逆 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{L}$ 和任意 $f \in \Gamma(X, \mathscr{L})$，均有

(6.5.3.2)
$$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(f \otimes 1_{\mathscr{B}}) \;=\; f^{\otimes n} \quad ,$$

这里我们假设在条件 (I) 下 $\mathscr{B}$ 的秩是常数 n (相应的，在条件 (II) 下 $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 的秩是常数 n)。最后，为了使 $\mathscr{L}'$ 的一个整体截面 f' 所对应的同态 $\mathscr{B} \to \mathscr{L}'$ 是一个同构，必须且只需对任意 $x \in X$，f'_x 都是 $\mathscr{L}'_x$ 的一个基底；于是在条件 (I) 下，这个条件等价于对任意 $x \in X$，$(\mathrm{N}(f'))_x$ 都是 $(\mathrm{N}(\mathscr{L}'))_x$ 的一个基底，在条件 (II) 下，这个条件仍然是必要的，如果假设 (II 改) 成立，并且 $\mathscr{B} \to \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{R}(X)$ 是单的，则这个条件也是充分的。

(6.5.4) 设 $(X, \mathscr{A})$, $(X', \mathscr{A}')$ 是两个环积空间，

$$f \;:\; X' \;\longrightarrow\; X$$

是一个态射，$\mathscr{B}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 代数层，$\mathscr{B}' = f^*\mathscr{B}$ 是其逆像 $\mathscr{A}'$ 代数层。假设下列条件之一得到满足：

1° $\mathscr{B}$ 满足 (6.5.1) 中的条件 (I)。

2° $(X, \mathscr{A})$ 和 $\mathscr{B}$ 满足 (6.5.1) 中的条件 (II)，$(X', \mathscr{A}')$ 是一个既约局部 Noether 概形，并且若令 X_α 和 X'_β 是那些以 X 和 X' 的不可约分支为底空间的既约闭子概形，则 f 在每个 X'_β 上的限制都是 X'_β 到某个 X_α 上的一个笼罩。

在这些条件下，$\mathscr{B}'$ 分别满足 (6.5.1) 中的条件 (I) 和条件 (II)；第一个陈言是显然的。为了证明第二个，只需证明对任意 $x' \in X'$，对于那些满足 $x' \in X'_\beta$ 的指标 β 来说，

诸 $\mathscr{B}'\otimes_{\mathscr{O}_{X'}}\mathscr{R}(X_{\beta'})$ 的秩都是相同的。然则，若 f 在 X'_β 上的限制是一个映到 X_α 的笼罩，则 $\mathscr{B}'\otimes_{\mathscr{O}_{X'}}\mathscr{R}(X_{\beta'})$ 的秩就等于 $\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{R}(X_\alpha)$ 的秩 (因为显然可以按照 (6.4.9) 的方法归结到仿射的情形)，从而依据条件 (II) 和 (6.5.1) 就可以推出我们的陈言。

准此，由 (6.4.8), (6.4.9) 和 (6.4.10) 知，若 s 是 $\mathscr{B}$ 在某个开集 $U\subset X$ 上的一个截面，s' 是与之对应的 $\mathscr{B}'$ 在 $f^{-1}(U)$ 上的截面，则 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}'/\mathscr{A}'}(s')$ 是 $\mathscr{A}'$ 在 $f^{-1}(U)$ 上的一个截面，并且对应于 $\mathscr{A}$ 在 U 上的截面 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(s)$。

若 $\mathscr{M}$ 是一个可逆 $\mathscr{B}$ 模层，则由上面所述知，若令 $\mathscr{M}'=f^*\mathscr{M}$ (它是一个可逆 $\mathscr{B}'$ 模层)，则有 $\mathrm{N}_{\mathscr{B}'/\mathscr{A}'}(\mathscr{M}')=f^*(\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}(\mathscr{M}))$，只差一个典范同构。

(6.5.5) 以下假设 $(X,\mathscr{A})$ 是概形。于是给出一个同时是拟凝聚 $\mathscr{A}$ 代数层和有限型 $\mathscr{A}$ 模层的 $\mathscr{B}$，等价于给出一个有限态射 $g:X'\to X$ 且使得 $g_*\mathscr{O}_{X'}=\mathscr{B}$，只差一个 X 同构 (6.1.2 和 1.3.1)。进而，给出一个拟凝聚 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\mathscr{F}'$ 等价于给出一个拟凝聚 $\mathscr{B}$ 模层 $\mathscr{F}$ 且使得 $g_*\mathscr{F}'=\mathscr{F}$ (1.4.3)，并且为了使 $\mathscr{F}'$ 是可逆的，必须且只需 $\mathscr{F}$ 是如此 (6.1.12)。从而为了把前面的结果转化为关于有限态射 g 的陈述，可以假设，要么 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是一个 (有限型) 局部自由 $\mathscr{O}_X$ 模层，要么 $(X,\mathscr{O}_X)$ 和 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 满足条件 (II)。此时对任意可逆 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\mathscr{L}'$，我们令

$$\textbf{(6.5.5.1)}\qquad \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}') = \mathrm{N}_{(g_*\mathscr{O}_{X'})/\mathscr{O}_X}(g_*\mathscr{L}') ,$$

并且称之为 $\mathscr{L}'$ 的范数 (相对于 g)。同样的，若 $h':\mathscr{L}'_1\to\mathscr{L}'_2$ 是可逆 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层的一个同态，则我们令

$$\textbf{(6.5.5.2)}\qquad \mathrm{N}_{X'/X}(h')=\mathrm{N}_{(g_*\mathscr{O}_{X'})/\mathscr{O}_X}(g_*(h')) : \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}'_1) \longrightarrow \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}'_2) 。$$

特别的，对于 $\mathscr{L}'_1=\mathscr{O}_{X'}$，可以得到一个典范映射

$$\textbf{(6.5.5.3)}\qquad \mathrm{N}_{X'/X} : \Gamma(X',\mathscr{L}') \longrightarrow \Gamma(X,\mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}')) 。$$

我们把大部分的转化工作留给读者，这里只给出下面的命题：

命题 (6.5.6) — 设 $g:X'\to X$ 是一个有限态射，并假设，要么 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是一个局部自由 $\mathscr{O}_X$ 模层，要么 $(X,\mathscr{O}_X)$ 和 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 满足 (II 改) (特别的，若 X 是局部 *Noether* 且正规的，则这个条件成立)。于是在第一个条件下，为了使一个可逆 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层同态 $h':\mathscr{L}'_1\to\mathscr{L}'_2$ 是一个同构，必须且只需 $\mathrm{N}_{X'/X}(h')$ 是一个同构；在第二个条件下，该条件仍然是必要的，并且如果同态 $g_*\mathscr{O}_{X'}\to(g_*\mathscr{O}_{X'})\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{R}(X)$ 是单的，则该条件也是充分的。

注意到这里要使用下面的事实：为了使 $g_*(h')$ 是一个同构，必须且只需 h' 是如此 (1.4.2)。

推论 (6.5.7) — 设 $g : X' \to X$ 是一个有限态射，并假设，要么 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是一个局部自由 $\mathscr{O}_X$ 模层，要么 $(X, \mathscr{O}_X)$ 和 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 满足 (II 改)，并且 $g_*\mathscr{O}_{X'} \to (g_*\mathscr{O}_{X'}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是单的。现在设 $\mathscr{L}'$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层，f' 是 $\mathscr{L}'$ 的一个整体截面，$f = \mathrm{N}_{X'/X}(f')$ 是 $\mathscr{L} = \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}')$ 的与之对应的整体截面 (6.5.5.1)。则我们有 $g(X' - X'_{f'}) = X - X_f$，并且 X_f 是 X 的满足 $g^{-1}(U) \subset X'_{f'}$ 的那些开集 U 中的最大者。

事实上，$g(X' - X'_{f'})$ 在 X 中是闭的 (6.1.10)；从而只需证明最后一个陈言。然则关系式 $U \subset X_f$ 等价于 $f|_U$ 所定义的同态 $\mathscr{O}_X|_U \to \mathscr{L}|_U$ 是一个同构。依照 (6.5.6)，这也等价于说 $f'|_{g^{-1}(U)}$ 所定义的同态 $\mathscr{O}_{X'}|_{g^{-1}(U)} \to \mathscr{L}'|_{g^{-1}(U)}$ 是一个同构，也就是说，等价于关系式 $g^{-1}(U) \subset X'_{f'}$。

命题 (6.5.8) — 设 $g : X' \to X$ 是一个有限态射，$f : Y \to X$ 是一个态射；设 $Y' = X'_{(Y)}$，$g' = g_{(Y)}$，$f' = f_{(X')}$，于是我们有交换图表

$$\begin{tikzcd} X' & Y' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "g'"] \\ X \arrow[u, leftarrow, "g"'] & Y \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

假设，要么 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是局部自由的，要么 $(X, \mathscr{O}_X)$ 和 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 满足 (II)，并且 Y 是一个既约局部 *Noether* 概形，同时 f 在 Y 的任何不可约分支上的限制都是映到 X 的某个不可约分支上的笼罩。则对任意可逆 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层，均有

$$\mathrm{N}_{Y'/Y}(f'^*\mathscr{L}') = f^*(\mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}')) ,$$

只差一个典范同构。

注意到依照 (1.5.2)，我们有 $f^*g_*\mathscr{L}' = g'_*f'^*\mathscr{L}'$，特别的 $g'_*\mathscr{O}_{Y'} = f^*g_*\mathscr{O}_{X'}$；从而若 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是局部自由的，则 $g'_*(\mathscr{O}_{Y'})$ 也是如此，于是由定义及 (6.5.4) 就可以推出结论。

注解 (6.5.9) — 我们在后面会把范数的概念进行推广，并把它与除子的顺像的概念建立联系。

6.6 应用：丰沛性判别法

命题 (6.6.1) — 设 Y 是一个概形，$f : X \to Y$ 是一个拟紧态射，$g : X' \to X$ 是一个有限且映满的态射。假设，要么 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是局部自由 $\mathscr{O}_X$ 模层，要么 $(X, \mathscr{O}_X)$ 和 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 满足 (II 改)。则对任意 $f \circ g$ 丰沛的可逆 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\mathscr{L}'$，$\mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}') = \mathscr{L}$ 都是 f 丰沛的。

可以假设 Y 是仿射的 (4.6.4)，于是依照 (4.6.6)，这个命题等价于：

推论 (6.6.2) — 设 X 是一个拟紧概形，$g : X' \to X$ 是一个有限且映满的态射，使得 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是一个局部自由 $\mathscr{O}_X$ 模层，或者 $(X, \mathscr{O}_X)$ 和 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ 满足 (II 改)。则对任意的丰沛 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\mathscr{L}'$，$\mathscr{L} = \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}')$ 也是丰沛的。

在第二个条件中，可以进而假设典范同态 $g_*\mathscr{O}_{X'} \to (g_*\mathscr{O}_{X'}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是单的。事实上，如果它不成立，设 $\mathscr{T}$ 是该同态的核，则它是 $g_*\mathscr{O}_{X'} = \mathscr{B}$ 的一个凝聚理想层 (**I**, 6.1.1)，我们令 $X' = \mathrm{Spec}(\mathscr{B}/\mathscr{T})$；从而有一个交换图表

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g'"'] & & X' \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd} ,$$

其中 h 是一个闭浸入 (1.4.10)。进而，我们知道 $\mathscr{T}$ 的支集是一个在 X 中稀疏 (**I**, 7.4.6) 的闭集 (**0**, 5.2.2)，由此可知，对于 X 的任何一个不可约分支的一般点 x，均可找到 x 的一个仿射开邻域 U，使得 $\mathscr{B}|_U = (\mathscr{B}/\mathscr{T})|_U$。由于根据假设 g 是映满的，故知 $x \in g'(X'')$；从而 g' 是一个笼罩，并且由于它是有限态射，从而是映满的 (6.1.10)；于是根据定义，我们有 $(g'_*\mathscr{O}_{X''}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X) = (\mathscr{R}/\mathscr{T}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X) = (g_*\mathscr{O}_{X'}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$，从而 $(X, \mathscr{O}_X)$ 和 $g'_*\mathscr{O}_{X''}$ 满足 (II 改)，进而 $g'_*\mathscr{O}_{X''} \to (g'_*\mathscr{O}_{X''}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是单的，最后，$h^*\mathscr{L}' = \mathscr{L}''$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_{X''}$ 模层 (4.6.13, (i 改))，并且我们有 $\mathrm{N}_{X''/X}(\mathscr{L}'') = \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}')$。事实上，为了定义这两个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，可以使用 X 的同一个仿射开覆盖 (U_λ)，使得 $g_*\mathscr{L}'$ 和 $g'_*\mathscr{L}''$ 在每个 U_λ 上的限制分别同构于 $\mathscr{B}|_{U_\lambda}$ 和 $(\mathscr{B}/\mathscr{T})|_{U_\lambda}$。由此立知，任何一个同构 $\eta_\lambda : (g_*\mathscr{L}')|_{U_\lambda} \to \mathscr{B}|_{U_\lambda}$ 都典范地对应于一个同构

$$\eta'_\lambda \ : \ (g'_*\mathscr{L}'')|_{U_\lambda} \longrightarrow (\mathscr{B}/\mathscr{T})|_{U_\lambda}$$

并满足以下条件：若 $(\omega_{\lambda\mu})$ 和 $(\omega'_{\lambda\mu})$ 是对应于同构组 (η_λ) 和 (η'_λ) 的 1 阶上圈 (6.5.2)，则 $\omega'_{\lambda\mu}$ 就是 $\omega_{\lambda\mu} \in \Gamma(U_\lambda \cap U_\mu, \mathscr{B})$ 在 $\Gamma(U_\lambda \cap U_\mu, \mathscr{B}/\mathscr{T})$ 中的典范像。于是依照 $\mathscr{T}$ 的定义，可以由此推出

$$\mathrm{N}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}\omega_{\lambda\mu} = \mathrm{N}_{(\mathscr{B}/\mathscr{T})/\mathscr{A}}\omega'_{\lambda\mu} ,$$

（其中 $\mathscr{A} = \mathscr{O}_X$），故得上述等式。

从而在条件 (II 改) 下总可以假设同态 $g_*\mathscr{O}_{X'} \to (g_*\mathscr{O}_{X'}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是单的。现在只需证明当 f 跑遍 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ $(n > 0)$ 的整体截面的集合时，诸 X_f 可以构成 X 的一个拓扑基 (4.5.2)。然则，设 $x \in X$，并设 U 是 x 的任意一个邻域；由于 $g^{-1}(x)$ 是有限的 (6.1.7)，并且 $\mathscr{L}'$ 是丰沛的，故可找到一个整数 $n > 0$ 和 $\mathscr{L}'^{\otimes n}$ 的一个整体截面 f'，使得 $X'_{f'}$ 是 $g^{-1}(x)$ 的一个包含在 $g^{-1}(U)$ 中的邻域 (4.5.4)。由于

$$\mathscr{L}^{\otimes n} = \mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}'^{\otimes n}) ,$$

故只需取 $f = \mathrm{N}_{X'/X}(f')$ 即可；事实上，此时 $X - X_f = g(X' - X'_{f'})$ (6.5.7)，从而 $x \in X_f \subset U$。

推论 (6.6.3) — 在 (6.6.1) 的前提条件下，为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需 $\mathscr{L}' = g^*\mathscr{L}$ 是 $f \circ g$ 丰沛的。

条件是必要的，因为 g 是仿射的 (5.1.12)。为了证明条件是充分的，可以假设 Y 是仿射的 (4.6.4)，从而 X 和 X' 都是拟紧的，并且 $\mathscr{L}'$ 是丰沛的 (4.6.6)，于是只需证明 $\mathscr{L}$ 是丰沛的。然则，考虑 X 中的这样一些点 x，它具有一个邻域，使得在第一个条件下 $g_*\mathscr{O}_{X'}$ (相应的，在第二个条件下 $(g_*\mathscr{O}_{X'}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$) 在该邻域上是 n 秩的，则这些点组成的集合在 X 中是既开又闭的，从而 X 是有限个这种开集的概形和，因而可以假设 X 就等于其中之一 (4.6.17)。然而此时我们有 $\mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}') = \mathscr{L}^{\otimes n}$，从而依照 (6.6.2)，$\mathscr{L}^{\otimes n}$ 是丰沛的，从而 $\mathscr{L}$ 也是如此 (4.5.6)。

推论 (6.6.4) — 假设 (6.6.1) 中的前提条件得到满足，进而假设 $f : X \to Y$ 是有限型的。则为了使 f 是拟射影的，必须且只需 $f \circ g$ 是如此。若再假设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 *Noether* 底空间的概形，则为了使 f 是射影的，必须且只需 $f \circ g$ 是如此。

前提条件表明 $f \circ g$ 是有限型的。有见于拟射影态射的定义 (5.3.1)，第一个陈言缘自 (6.6.1) 和 (6.6.3)。基于这个结果和 (5.5.3, (ii))，只消再证明若 f 是拟射影的，则为了使 f 是紧合的，必须且只需 $f \circ g$ 是如此。然而此时 f 是分离 (5.3.1) 且有限型的，并且 g 是映满的，从而我们的陈言缘自 (5.4.2, (ii)) 和 (5.4.3, (ii))。

特别的：

推论 (6.6.5) — 设 X 是一个在域 K 上有限型的概形，K' 是 K 的一个有限扩张。则为了使 X 在 K 上是射影 (相应的，拟射影) 的，必须且只需 $X' = X \otimes_K K'$ 在 K' 上是射影 (相应的，拟射影) 的。

事实上，条件显然是必要的 (5.3.4, (iii) 和 5.5.5, (iii))。反过来，假设条件是成立的，并设 $g : X' \to X$ 是典范投影。则易见 g 是一个有限 (6.1.5, (iii)) 且映满 (**I**, 3.5.2, (ii)) 的态射。进而，$g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是一个局部自由 $\mathscr{O}_X$ 模层，因为它同构于 $\mathscr{O}_X \otimes_K K'$ (1.5.2)。于是由前提条件和 (6.1.11), (5.5.5, (ii)) 知，X' 在 K 上是射影 (相应的，拟射影) 的；从而由 (6.6.4) 就可以推出 X 在 K 上是射影 (相应的，拟射影) 的。

在第 IV 章我们将证明，(6.6.5) 的结论对于 K 的任意扩张 K' 都是成立的。

这一小节最后的部分将致力于证明判别法 (6.6.11)，它是对 (6.6.1) 的一个技术性改进；第一遍阅读时可以略过。

引理 (6.6.6) — 设 X 是一个 *Noether* 既约概形，$\mathscr{E}$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，并使

得 $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{R}(X)$ 是一个 n 秩局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层。则存在一个 Noether 既约概形 Z 和一个双有理的有限态射 $h:Z\to X$，满足下面的条件：集合层的态射 $\sigma_i:\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{E})\to\mathscr{R}(X)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$（参考 (6.4.10)）把 $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{E})$ 映到凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $h_*\mathscr{O}_Z$ 之中。

事实上，考虑 X 的一个仿射开集 U，环为 $\mathrm{A}(U)=A$；设 $E=\Gamma(U,\mathscr{E})$，并且当 u 跑遍 $\mathrm{Hom}_A(E,E)$ 时，设 C_U 是诸 $\sigma_i(u)$ 在 $\mathrm{R}(U)$ 中所生成的子代数；则由 (6.4.7.1) 知，这个 A 代数是有限秩的。进而，易见代数 C_U 的构造与仿射开集 U 到另一个仿射开集 $U'\subset U$ 的限制运算是可交换的。从而这就定义了 $\mathscr{R}(X)$ 的一个有限 $\mathscr{O}_X$ 子代数层 $\mathscr{C}$，使得对 X 的任意仿射开集 U，均有 $\Gamma(U,\mathscr{C})=C_U$。取 $Z=\mathrm{Spec}\,\mathscr{C}$，并取 h 是结构态射，从而它是有限的 (6.1.2)；由于 $\mathscr{C}$ 是既约的，故知 Z 是一个 Noether 既约概形 (1.3.8)。最后，根据定义，C_U 的全分式环是 $\mathrm{R}(U)$，且由于 C_U 包含在 $\mathrm{A}(U)$ 在 $\mathrm{R}(U)$ 中的相对整闭包之中，故知在 $\mathrm{A}(U)$ 的极小素理想与 C_U 的极小素理想之间有一个一一对应 ([13], t, I, p. 259)，这就证明了 h 是双有理的，从而也完成了证明。

推论 (6.6.7) — *在 (6.6.6) 的前提条件下，设 W 是 X 的一个开集，并假设对任意 $x\in W$，要么 X 在点 x 处是正规的，要么 $\mathscr{E}_x$ 是一个自由 $\mathscr{O}_x$ 模。则还可以假设 h 满足下面的条件：h 在 $h^{-1}(W)$ 上的限制是一个从 $h^{-1}(W)$ 到 W 上的同构。*

事实上，这两个前提条件都表明，若 $U\subset W$ 是一个仿射开集，则在 (6.6.6) 的记号下，对任意 $x\in U$，均有 $(\sigma_i(u))_x\in A_x$ (6.4.3)，从而 $\sigma_i(u)\in A$，于是由 (6.6.6) 中所给出的 h 的定义就可以推出结论。

(6.6.8) 设 X 是一个 Noether 既约概形，$g:X'\to X$ 是有限且映满的态射，从而 $\mathscr{B}=g_*\mathscr{O}_{X'}$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_X$ 代数层；进而假设 $\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{R}(X)$ 是一个 n 秩局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层。于是可以把引理 (6.6.6) 应用到 $\mathscr{E}=\mathscr{B}$ 上，从而在 (6.6.6) 的记号下，我们有一个乘法单演层的同态 $\sigma_n:\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{B},\mathscr{B})\to h_*\mathscr{O}_Z$，并且把这个同态与典范同态 $\mathscr{B}\to\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{B},\mathscr{B})$ (6.5.1) 合成，又得到一个乘法单演层的同态

$$\textbf{(6.6.8.1)}\qquad \mathrm{N}' :\ \mathscr{B}=g_*\mathscr{O}_{X'}\longrightarrow h_*\mathscr{O}_Z=\mathscr{C}\ 。$$

据此，对任意可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}'$，$g_*\mathscr{L}'$ 都是可逆 $\mathscr{B}$ 模层 (6.1.12)，并且使用 (6.5.2) 的方法又可以从 $\mathscr{L}'$ 函子性地导出一个可逆 $\mathscr{C}$ 模层，我们记之为 $\mathrm{N}'(g_*\mathscr{L}')$。

引理 (6.6.9) — *设 X 是一个 Noether 既约概形，$g:X'\to X$ 是一个映满的有限态射，且使得 $(g_*\mathscr{O}_{X'})\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{R}(X)$ 是一个秩为常数的局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层。则存在一个 Noether 既约概形 Z 和一个双有理的有限态射 $h:Z\to X$，具有下面的性质：对任意丰沛 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\mathscr{L}'$，满足 $h_*\mathscr{M}=\mathrm{N}'(g_*\mathscr{L}')$（记号取自 (6.6.8)）的那个可逆 $\mathscr{O}_Z$ 模层 $\mathscr{M}$ 都是丰沛的。*

首先假设同态 $\mathscr{B}\to\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{R}(X)$ 是单的。按照 (6.6.6) 的方法来定义 Z 和 h（取

$\mathscr{E} = g_*\mathscr{O}_{X'}$)。设 $z \in Z$；则只需证明存在一个整数 $m > 0$ 和 $\mathscr{M}^{\otimes m}$ 在 Z 上的一个截面 t，使得 Z_t 是一个包含 z 的仿射开集 (4.5.2)。设 $x = h(z)$，U 是 X 的一个包含 x 的仿射开集；则 $h^{-1}(U)$ 是 z 的一个仿射开邻域，从而只需找到一个 t 使得 $z \in Z_t \subset h^{-1}(U)$，因为此时 Z_t 一定是仿射的 (5.5.8)。根据前提条件，存在一个整数 $n > 0$ 和 $\mathscr{L}'^{\otimes n}$ 在 X' 上的一个截面 s'，使得

(6.6.9.1) $$g^{-1}(x) \subset X'_{s'} \subset g^{-1}(U)$$

这是依据 (4.5.4)。根据定义，s' 也是 $g_*\mathscr{L}'$ 的一个整体截面，从而按照 (6.5.2) 的方法，它对应着 $\mathrm{N}'(g_*\mathscr{L}')$ 的一个整体截面 $s = N'(s')$。我们下面证明，若令 t 是截面 s，但是把它看作是 $\mathscr{M}$ 在 Z 上的截面，则 t 就满足我们的要求。事实上，令

(6.6.9.2) $$V = X - g(X' - X'_{s'}) ,$$

则依照 (6.6.9.1) 和 (6.1.10)，V 是 X 的一个包含 x 并且包含在 U 中的开集。我们来证明

(6.6.9.3) $$h^{-1}(V) \subset Z_t \subset h^{-1}(U) ,$$

由此即可以完成证明。上式也相当于说使 s_y 可逆的那些 $y \in Y$ 所组成的集合 T 是包含 V 且包含在 U 之中的。为了证明这一点，首先考虑一个包含在 V 中的仿射开集 W；则 $g^{-1}(W)$ 是 X' 中的仿射开集，并且依照 (6.6.9.2)，对任意 $y' \in g^{-1}(W)$，$s'_{y'}$ 都是可逆的；依照 X 和 $\mathscr{B}$ 上的前提条件，我们可以应用 (6.4.7) 中的结果，故知若 $y = g(y')$，则 s_y 是可逆的，换句话说，$V \subset T$。另一方面，由 (6.4.7) 又可以推出：反过来若 s_y 是可逆的，则 $s'_{y'}$ 也是如此，根据 (6.6.9.1)，这就蕴涵着 $y' \in g^{-1}(U)$，从而 $y \in U$，故而在此情形下我们有 $T \subset U$。

使用与 (6.6.2) 相同的方法就可以由上述情形过渡到一般情形，只要把 X' 换成 X''，使得 $g'_*(\mathscr{O}_{X''}) \to g'_*(\mathscr{O}_{X''}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是单的，并把 $\mathscr{L}'$ 换成一个丰沛 $\mathscr{O}_{X''}$ 模层 $\mathscr{L}''$，使得 $\mathrm{N}'(g_*\mathscr{L}') = \mathrm{N}'(g'_*(\mathscr{L}''))$。从而在任何情况下（对于适当选择的 h）都证明了引理 (6.6.9)。

推论 (6.6.10) — 假设 (6.6.9) 中的前提条件得到满足，则对任意可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$，只要 $g^*\mathscr{L}$ 是丰沛的，$h^*\mathscr{L}$ 就是丰沛的。

事实上，若令 $\mathscr{L}' = g^*\mathscr{L}$，则我们有 $g_*\mathscr{L}' = \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{B}$ (**0**, 5.4.10)，从而

$$N'(g_*\mathscr{L}') = (\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{C})^{\otimes n}$$

（与 (6.5.2.4) 同理）。由此可知，$\mathscr{M} = (h^*\mathscr{L})^{\otimes n}$，且由于 $\mathscr{M}$ 是丰沛的，故知 $h^*\mathscr{L}$ 也是如此 (4.5.6)。

命题 (6.6.11) — 设 Y 是一个仿射概形，X 是一个 $Noether$ 既约概形，$f: X \to Y$ 是一个拟紧态射，$g: X' \to X$ 是一个映满的有限态射。设 W 是 X 的一个开子集，假设对任意 $x \in W$，要么 X 在点 x 处是正规的，要么存在 x 的一个开邻域 $T \subset W$，使得 $(g_*\mathscr{O}_{X'})|_T$ 是一个局部自由 $\mathscr{O}_X|_T$ 模层。则存在一个既约 Y 概形 Z 和一个**双有理且有限**的 Y 态射 $h: Z \to X$，使得 h 在 $h^{-1}(W)$ 上的限制是一个同构 $h^{-1}(W) \xrightarrow{\sim} W$ 并且具有下面的性质: 对任意可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$，只要 $g^*\mathscr{L}$ 是 $f \circ g$ 丰沛的，$h^*\mathscr{L}$ 就是 $f \circ h$ 丰沛的。

由于 Y 是仿射的，故知 $g^*\mathscr{L}$ 是丰沛的，于是只需证明对某个适当选择的 h，$h^*\mathscr{L}$ 是丰沛的 (4.6.6)。我们下面证明，可以把 g 换成一个映满的有限态射 $g': X'' \to X$，使得 $g'^*\mathscr{L}$ 是丰沛的，并且 $g'_*(\mathscr{O}_{X''}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ 是一个秩为常数的局部自由 $\mathscr{R}(X)$ 模层；这样一来问题归结到 (6.6.10) 的条件下，命题也将得证。

为此，设 $\mathscr{B} = g_*\mathscr{O}_{X'}$；以 X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 来标记 X 的以诸不可约分支为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)；根据前提条件，它们都是整的。设 X'_i 是 X' 的闭子概形 $g^{-1}(X_i)$，$g_i: X'_i \to X_i$ 是态射 g 在 X'_i 上的限制，它是有限 (6.1.5, (iii)) 且映满的；设 k_i 是 $\mathscr{O}_{X_i}$ 代数层 $\mathscr{B}_i = (g_i)_*(\mathscr{O}_{X'_i})$ 的秩。由于 $\mathscr{B}_i \otimes_{\mathscr{O}_{X_i}} \mathscr{R}(X_i)$ 是一个常值预层 (**I**, 7.3.5)，故知 k_i 也是 $(\mathscr{O}_X|_U)$ 代数层 $\mathscr{B}|_U$ 的秩，这里 U 是 X 的任何一个只与不可约分支 X_i 有交点的开集。若 T 是 X 的一个开集，且使得 $\mathscr{B}|_T$ 同构于 $\mathscr{O}_X^m|_T$，则由上面的注解知，对任意一个满足 $T \cap X_i \neq \varnothing$ 的指标 i，整数 k_i 都等于 m。现在设 U 是 X 的这样一个开集，由所有满足下述条件的点 x 所组成：$\mathscr{B}$ 在 x 的邻域上是局部自由的 $\mathscr{O}_X$ 模层，再设 U_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ 是 U 的连通分支，它们都是 X 中的开集，并且数目有限 (因为 U 是 Noether 的)；我们用 V_j 来标记 X' 的这样一个闭子概形，它是开集 $g^{-1}(U_j)$ 上的诱导子概形的概闭包 (**I**, 9.5.11)。根据上面所述，对任意一个满足 $X_i \cap U_j \neq \varnothing$ 的指标 i，秩 k_i 都等于同一个整数 m_j；此外注意到同一个 X_i 不可能与两个不同指标的 U_j 都有交点。设 i_λ 是满足 $X_i \cap U = \varnothing$ 的那些指标 i。考虑所有 k_i 的乘积 k，令 $n_i = k/k_i$，并设 X'' 是下面所定义的概形。对每个 j $(1 \leqslant j \leqslant s)$，考虑 k/m_j 个同构于 V_j 的概形，并且对每个 λ，考虑 $k/k_{i_\lambda} = n_{i_\lambda}$ 个同构于 X'_{i_λ} 的概形；X'' 就是所有这些概形的和。可以定义一个态射 $g'': X'' \to X'$，它在 X'' 的每一个分量上都是典范含入；易见 g'' 是一个笼罩性的有限态射，从而是映满的 (因为有限态射总是闭的 (6.1.10))；令 $g' = g \circ g''$，则它是一个映满的有限态射 $X'' \to X$；我们有 $g'^*\mathscr{L} = g''^*g^*\mathscr{L}$，从而 $g'^*\mathscr{L}$ 是一个丰沛 $\mathscr{O}_{X''}$ 模层 (5.1.12)。此时易见，对于这个新概形 X'' 来说，与 X' 上的那些秩 k_i 相对应的秩都等于 k；由此立知 (有见于 (**I**, 7.3.3))，对于 X 的任意仿射开集 T，$(g'_*(\mathscr{O}_{X''}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X))|_T$ 都是一个同构于 $(\mathscr{R}(X)|_T)^k$ 的 $(\mathscr{R}(X)|_T)$ 模层。

推论 (6.6.12) — 如果在 (6.6.11) 中，我们有 $W = X$，则为了使一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，必须且只需 $g^*\mathscr{L}$ 是 $f \circ g$ 丰沛的。

注解 (6.6.13) — 在第 III 章我们将看到，若 Y 是 Noether 的，f 是有限型的，并且 f 在 X 的以 $X-W$ 为底空间的既约闭子概形上的限制是紧合的，则 (6.6.12) 的结论仍然有效。然而我们在第 V 章会给出一个例子，在其中 X 是域 K 上的一个分离代数概形（结构态射 $X \to \operatorname{Spec} K$ 不是紧合的），并且它的正规化 X' 是拟仿射的，但 X 本身不是拟仿射的（如此一来 $\mathscr{O}_X$ 不是丰沛的，尽管 $\mathscr{O}_{X'}$ 是丰沛的 (5.1.2)，并且态射 $X' \to X$ 还是映满且有限的 (6.3.10)）。我们将在下一小节证明，如果把“拟仿射”换成“仿射”，则上面这种情况不会发生。

6.7 Chevalley 定理

我们现在来证明下面的定理（借助 Serre 判别法 (5.2.1)），它最早是由 Chevalley 所证明的，使用了另一种方法，并且是针对代数分离概形的。

定理 (6.7.1) — *设 X 是一个仿射概形，Y 是一个 Noether 概形，$f : X \to Y$ 是一个映满的有限态射。则 Y 也是仿射概形。*

易见 $f_{\mathrm{red}} : X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ 是有限的 (6.1.5, (vi))；由于 X_{red} 是一个仿射概形，并且说 Y 是仿射的与说 Y_{red} 是仿射的是等价的（因为 Y 是 Noether 的 (**I**, 6.1.7)），故我们看到，可以假设 Y 是既约的。对于 Y 的任意闭子集 Y'，均有 Y 的唯一一个以 Y' 为底空间的既约子概形 (**I**, 5.1.2)；它的逆像 $f^{-1}(Y')$（典范同构于 $X \times_Y Y'$ (**I**, 4.4.1)）是仿射的（作为 X 的闭子概形），并且 f 在 $f^{-1}(Y')$ 上的限制（可以等同于 $f \times_Y 1_{Y'}$）是一个映满的有限态射 (6.1.5, (iii))。从而依据 Noether 归纳法，问题可以（有见于 (**I**, 6.1.7)）归结到这样一个 Y 上，即对任意闭子集 $Y' \neq Y$，Y 的以 Y' 为底空间的任何闭子概形都是仿射的。在这种情况下，对任意凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{F}$，只要它的支集 Z（闭）不同于 Y，就有 $\mathrm{H}^1(Y, \mathscr{F}) = 0$。事实上，可以找到 Y 的一个以 Z 为底空间的闭子概形 Y'，使得若 $j : Y' \to Y$ 是典范含入，则有 $\mathscr{F} = j_* j^* \mathscr{F}$ (**I**, 9.3.5)；从而 (5.2.3)，$\mathrm{H}^1(Y, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^1(Y', j^* \mathscr{F}) = 0$，这是根据 (**I**, 5.1.9.2)。

首先假设 Y 不是不可约的，并设 Y' 是 Y 的一个不可约分支，$Y'' = Y - Y'$；我们把 Y 的以 Y' 为底空间的既约闭子概形仍记作 Y'，并设 j 是典范含入 $Y' \to Y$。设 $\mathscr{F}$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，考虑典范同态

$$\rho \ : \ \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}' = j_* j^* \mathscr{F}$$

(**0**, 4.4.3)；依照 (**0**, 5.3.10) 和 (**0**, 5.3.12)，$\mathscr{F}'$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层，因为我们有 $j_* \mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{O}_Y / \mathscr{J}$，其中 $\mathscr{J}$ 是指 $\mathscr{O}_Y$ 的定义了子概形 Y' 的那个理想层。于是 $\mathscr{G} = \operatorname{Ker} \rho$ 和 $\mathscr{K} = \operatorname{Im} \rho$ 也都是凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**0**, 5.3.4)；然则根据定义，$\mathscr{F}'$ 在 Y' 的一般点 y 处的茎条 $\mathscr{F}'_y$ 就等于 $\mathscr{F}_y$，因为 y 在 Y' 的内部，从而我们有 $\mathscr{J}_y = 0$（Y 是既约的）。由此可知，y 没有包含在 $\mathscr{G}$ 的支集（闭）之中；此外，$\mathscr{F}'$ 的支集（从而 $\mathscr{K}$ 的支集）包含在 Y' 中；换句话说，$\mathscr{G}$ 的支集和 $\mathscr{K}$ 的支集都与 Y 不同。由此可知，$\mathrm{H}^1(Y, \mathscr{G}) = \mathrm{H}^1(Y, \mathscr{K}) = 0$，并

且把上同调正合序列应用到正合序列 $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{F} \to \mathscr{K} \to 0$ 上就得到 $\mathrm{H}^1(Y, \mathscr{F}) = 0$。于是再由 Serre 判别法 (5.2.1) 就可以推出结论。

从而可以假设 Y 是不可约的，因而是整的。我们还可以假设 X 是整的：事实上，如果用 X_i 来标记 X 的以诸不可约分支为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)，并且用 g_i 来标记 g 在 X_i 上的限制，则至少有一个 g_i 是笼罩性的，又因为它是有限态射 (6.1.5)，从而是映满的 (6.1.10)；另一方面，X_i 是一个仿射概形，于是可以用 X_i 来替换 X。

引理 (6.7.1.1) — 设 X, Y 是两个 *Noether* 整概形，x（相应的，y）是 X（相应的，Y）的一般点，$f : X \to Y$ 是一个映满的有限态射。设 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，并可找到 y 的一个仿射开邻域 U 和一个截面 $g \in \Gamma(X, \mathscr{L})$，使得 $x \in X_g \subset f^{-1}(U)$。则可以找到两个整数 $m > 0,\ n > 0$ 和一个同态 $u : \mathscr{O}_Y^m \to f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ 以及 y 的一个开邻域 V，使得 $u|_V$ 是 $\mathscr{O}_Y^m|_V$ 到 $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})|_V$ 上的一个同构。

设 C 是 U 的环（它是整的），$k = \mathscr{O}_y$ 是它的分式域：由于 f 是有限的，故知 $U' = f^{-1}(U)$ 是仿射的 (1.3.2)；设 D 是它的环（也是整的），分式域为 $K = \mathscr{O}_x$；根据前提条件，D 是一个有限型 C 模 (6.1.4)，从而 K 是 k 的一个有限扩张。纤维 $f^{-1}(y) = X \otimes_Y \operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(y) = X \otimes_Y \operatorname{Spec} \mathscr{O}_y$ 可以等同于 $\operatorname{Spec} K$ (**I**, 3.6.6)；设 s_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是 D 中的一组元素，且构成 K 在 k 上的一个基底。则存在整数 $n > 0$，使得 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 在 X_g 上的这些截面 $(s_i|_{X_g})g^{\otimes n}$ 都可以扩张为 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 的整体截面 b_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ (**I**, 9.3.1)。根据定义，诸 b_i 也是 $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ 在 X 上的截面，从而它们定义了一个同态 $u : \mathscr{O}_Y^m \to f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ (**0**, 5.1.1)；现在我们证明 u 就满足要求。事实上，$\mathscr{L}^{\otimes n}|_{U'} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个有限型 D 模，从而若 φ 是 f 的限制 $f^{-1}(U) \to U$ 所对应的含入 $C \to D$，则 $M_{[\varphi]}$ 是一个有限型 C 模；因而

$$f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})|_U \ = \ (M_{[\varphi]})^{\sim}$$

(**I**, 1.6.3) 是凝聚的，且由于 U 是 Y 的任意一个仿射开集，故知 $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ 是凝聚的；进而，$u|_U = \widetilde{\theta}$，其中 θ 是一个 C 同态 $C^m \to M_{[\varphi]}$，并且 $u_y = \theta_y$ 是同态 $\theta \otimes 1 : K^m = C^m \otimes K \to M_{[\varphi]} \otimes K$；然则根据定义，后面这个同态是一个同构，因为诸 $(b_i)_x$ 构成 $M_{[\varphi]} \otimes K$ 在 k 上的一个基底（根据前提条件，g_x 是 $(\mathscr{L}^{\otimes n})_x$ 的一个生成元）。由此可知，$\mathscr{O}_Y$ 模层 $\operatorname{Ker} u$ 和 $\operatorname{Coker} u$ 的支集都不包含 y；由于这些 $\mathscr{O}_Y$ 模层都是凝聚的 (**0**, 5.3.3)，从而它们的支集都是闭的 (**0**, 5.2.2)，故得引理。

准此，引理 (6.7.1.1) 的前提条件在我们所考虑的情形下是成立的（取 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$），因为 X 是仿射的 (**I**, 1.1.10)；我们令 $\mathscr{A} = \mathscr{O}_Y$，$\mathscr{B} = f_*\mathscr{O}_X$。依照 Serre 判别法 (5.2.1)，只需证明对任意凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{F}$，均有 $\mathrm{H}^1(Y, \mathscr{F}) = 0$；甚至只需对那些 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}_Y$ 进行证明即可，这就意味着 $\mathscr{F}$ 是无挠的，因为 Y 是整的；我们现在对所有的无挠凝聚

聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 $\mathscr{F}$ 来证明 $\mathrm{H}^1(Y,\mathscr{F})=0$。此时同态 $u:\mathscr{A}^m\to\mathscr{B}$ 定义了一个同态

$$v\ :\ \mathscr{G}\ =\ \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},\mathscr{F})\ \longrightarrow\ \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^m,\mathscr{F})\ =\ \mathscr{F}^m\quad。$$

首先证明 v 是单的: 根据前提条件，$\mathscr{T}=\mathrm{Coker}\ u$ 的支集与 V 不相交，从而 $\mathscr{T}$ 是一个挠 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**I**, 7.4.6)；根据函子 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}$ 的左正合性，正合序列

$$\mathscr{A}^m\ \longrightarrow\ \mathscr{B}\ \longrightarrow\ \mathscr{T}\ \longrightarrow\ 0$$

给出了正合序列

$$0\ \longrightarrow\ \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{T},\mathscr{F})\ \longrightarrow\ \mathscr{G}\ \xrightarrow{\ v\ }\ \mathscr{F}^m\quad。$$

然而由于 $\mathscr{F}$ 是无挠的，故有 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{T},\mathscr{F})=0$ (**0**, 5.2.6)，这就推出了我们的陈言。从而我们有正合序列

$$0\ \longrightarrow\ \mathscr{G}\ \longrightarrow\ \mathscr{F}^m\ \longrightarrow\ \mathrm{Coker}\ v\ \longrightarrow\ 0\ ,$$

其中 $\mathscr{G}$ 和 $\mathrm{Coker}\ v$ 都是凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**0**, 5.3.4 和 5.3.5)；依照上同调正合序列，只要能够证明 $\mathrm{H}^1(Y,\mathscr{G})=\mathrm{H}^1(Y,\mathrm{Coker}\ v)=0$，就可以导出 $\mathrm{H}^1(Y,\mathscr{F}^m)=(\mathrm{H}^1(Y,\mathscr{F}))^m=0$，因而 $\mathrm{H}^1(Y,\mathscr{F})=0$。然则 $v|_V$ 是一个同构，从而 $\mathrm{Coker}\ v$ 的支集与 Y 不相等，故而最初的条件，我们有 $\mathrm{H}^1(Y,\mathrm{Coker}\ v)=0$。另一方面，$\mathscr{G}$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 (**I**, 9.6.4)；由于 X 在 Y 上是仿射的，故可找到一个拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{K}$，使得 $\mathscr{G}$ 同构于 $f_*\mathscr{K}$ (1.4.3)；由于 X 是仿射的，故有 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{K})=0$ (**I**, 5.1.9.2)，从而根据 (5.2.3)，我们也有 $\mathrm{H}^1(Y,\mathscr{G})=0$，这就完成了定理 (6.7.1) 的证明。

推论 (6.7.2) — 设 X 是一个 *Noether* 概形，$(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 X 的一个由闭集所组成的有限覆盖。则为了使 X 是仿射的，必须且只需对每一个 i，X 都有一个以 X_i 为底空间的闭子概形，并且后者是仿射的。

事实上，假设这个条件是成立的，设 X' 是诸 X_i 的和概形；则易见 X' 是仿射的，并且可以定义一个映满的态射 $f:X'\to X$，它限制在每一个 X_i 都是典范含入。依照 (6.7.1)，问题归结为证明 f 是有限的，这可由 (6.1.5) 推出。

推论 (6.7.3) — 为了使一个 *Noether* 概形 X 是仿射的，必须且只需 X 的以每个不可约分支为底空间的既约闭子概形都是仿射的。

§7. 赋值判别法

在本节中，我们将给出关于态射的分离性和紧合性的赋值判别法，也就是说，它们是这样一种判别法，其中出现了一些形如 $\mathrm{Spec}\,A$ 的辅助概形，并且 A 是赋值环。

如果引入适当的“Noether”假设，则在这些判别法中还可以只考虑 A 是离散赋值环的情形。毫无疑问这也是我们今后将会用到的唯一情形，并且即使在一般情形下，我们也不太讨论任意的赋值环，除非是为了指出与古典理论的关系。

7.1 赋值环的复习

(7.1.1) 在赋值环 (anneau de valuation) 的众多等价定义之中，我们将使用下面这一个：所谓一个环 A 是赋值环，是指它是一个整环但不是域，并且若考虑 A 的分式域 K 中的所有不同于 K 的局部环所组成的集合，则对于承托关系 (**I**, 8.1.1) 来说，A 在其中是极大的。我们知道赋值环都是整闭的。若 A 是一个赋值环，则对于 A 的任意非零素理想 $\mathfrak{p}$，$A_{\mathfrak{p}}$ 也是一个赋值环。

(7.1.2) 设 K 是一个域，A 是 K 的一个局部子环，并且不是域；则可以找到一个赋值环，它以 K 为分式域，并可承托 A ([1], p. 1-07, 引理 2)。

另一方面，设 B 是一个赋值环，k 是它的剩余类域，K 是它的分式域，L 是 k 的一个扩张。则可以找到一个完备赋值环 C，它可以承托 B，并且剩余类域是 L。事实上，L 是一个纯超越扩张 $L' = k(T_\mu)_{\mu\in M}$ 的代数扩张；我们知道 K 上对应于 B 的赋值可以延拓为 $K' = K(T_\mu)_{\mu\in M}$ 的一个赋值，并使得 L' 就是这个赋值的剩余类域 ([24], p. 98)；把 B 换成后面这个赋值所对应的赋值环的完备化，于是我们可以限于考虑 B 是完备的并且 L 是 k 的代数闭包的情形。若 $\overline{K}$ 是 K 的一个代数闭包，则可以把 B 所对应的赋值延拓到 $\overline{K}$ 上，并且相应的剩余类域是 k 的一个代数闭包，这只要把 $k[T]$ 中的一个首一多项式提升为一个 $\overline{K}$ 系数的多项式就可以看到这一点。从而问题最终归结到 $L = k$ 的情形，此时只需取 C 是 B 的完备化即可。

(7.1.3) 设 K 是一个域，A 是 K 的一个子环；则 A 在 K 中的相对整闭包 A' 是所有包含 A 并且以 K 为分式域的那些赋值环的交集 ([11], p. 51, 定理 2)。命题 (7.1.2) 可以改写成下面这个等价的几何形式：

命题 (7.1.4) — 设 Y 是一个概形，$p : X \to Y$ 是一个态射，x 是 X 的一点，$y = p(x)$，并且 $y' \neq y$ 是 y 的一个特殊化 (**0**, 2.1.2)。则可以找到一个局部概形 Y'，它是某个赋值环的谱，并且存在一个分离态射 $f : Y' \to Y$，使得若 a 是 Y' 的唯一闭点，b 是 Y' 的一般点，则有 $f(a) = y'$, $f(b) = y$。进而可以假设下面两个附加条件之一得到满足:

(i) Y' 是一个完备赋值环的谱，该赋值环的剩余类域是代数闭的，并且存在一个 $\boldsymbol{k}(y)$ 同态 $\boldsymbol{k}(x) \to \boldsymbol{k}(b)$。

(ii) 存在一个 $\boldsymbol{k}(y)$ 同构 $\boldsymbol{k}(x) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{k}(b)$。

设 Y_1 是 Y 的以 $\overline{\{y\}}$ 为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)，并设 X_1 是其逆像闭子概形 $p^{-1}(Y_1)$；根据前提条件，$y' \in \overline{\{y\}}$，并且 X 中的 $\boldsymbol{k}(x)$ 与 X_1 中的 $\boldsymbol{k}(x)$ 是一样的，

故可假设 Y 是整的，一般点为 y；此时 $\mathscr{O}_{y'}$ 是一个整局部环，但不是域，其分式域是 $\mathscr{O}_y=\boldsymbol{k}(y)$，并且 $\boldsymbol{k}(x)$ 是 $\boldsymbol{k}(y)$ 的一个扩张。为了能让条件 $f(a)=y'$, $f(b)=y$ 以及附加条件 (i)（相应的，(ii)）得到满足，可以取 $Y'=\operatorname{Spec}A'$，其中 A' 是一个能够承托 $\mathscr{O}_{y'}$ 的赋值环，它是完备的，并且剩余类域是 $\boldsymbol{k}(x)$ 的一个代数闭的扩张（相应的，能够承托 $\mathscr{O}_{y'}$ 的赋值环，并且剩余类域是 $\boldsymbol{k}(x)$）；A' 的存在性来源于 (7.1.2)。

(7.1.5) 还记得所谓一个局部环 A 是 1 维的，是指 A 中有不同于极大理想 $\mathfrak{m}$ 的素理想，但 A 的所有不同于 $\mathfrak{m}$ 的素理想都是极小素理想；如果 A 是整的，则这也相当于说 A 只有 $\mathfrak{m}$ 和 (0) 两个素理想，并且 $\mathfrak{m}\neq(0)$；换句话说，$Y=\operatorname{Spec}A$ 只有两个点 a,b：其中 a 是唯一的闭点，我们有 $\mathfrak{j}_a=\mathfrak{m}$，并且 $\boldsymbol{k}(a)=k$ 是剩余类域 $k=A/\mathfrak{m}$；b 是 Y 的一般点，$\mathfrak{j}_b=(0)$，集合 $\{b\}$ 是 Y 的唯一一个不同于 $\varnothing$ 和 Y 的开集（从而它是处处稠密的），并且 $\boldsymbol{k}(b)=K$ 就是 A 的分式域。

(7.1.6) 对于一个 1 维 Noether 局部环 A 来说，我们知道以下诸条件是等价的 ([1], p. 2-08 和 17-01)：a) A 是正规的；b) A 是正则的；c) A 是赋值环；进而，此时 A 是一个离散赋值环。于是对于离散赋值环来说，我们有下面一些类似于命题 (7.1.2) 和 (7.1.3) 的结果：

命题 (7.1.7) — *设 A 是一个 Noether 整局部环，但不是域，K 是它的分式域。L 是 K 的一个有限型扩张；则可以找到一个离散赋值环，它以 L 为分式域，并且可以承托 A。*

首先假设 $L=K$。设 $\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想，$(x_1,\dots,x_n)$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个非零生成元组，B 是 K 的子环 $A[x_2/x_1,\dots,x_n/x_1]$，它是 Noether 的。易见 B 的理想 $\mathfrak{m}B$ 就是主理想 x_1B；若 $\mathfrak{p}$ 是 x_1B 的一个极小素理想，则我们知道 $\mathfrak{p}$ 是 1 秩的 ([13], t. I, p. 277)；换句话说，$B_{\mathfrak{p}}$ 是一个 1 维 Noether 局部环；易见 $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}\cap A$ 是 A 的一个包含 $\mathfrak{m}$ 但不包含 1 的理想，从而它等于 $\mathfrak{m}$，因而 $B_{\mathfrak{p}}$ 可以承托 A (**I**, 8.1.1)。由 Krull-Akizuki 定理 ([25], p. 293) 知，$B_{\mathfrak{p}}$ 的整闭包 C 是一个 Noether 环（尽管 C 不一定是一个有限型 $B_{\mathfrak{p}}$ 模）；若 $\mathfrak{n}$ 是 C 的一个极大理想，则 $C_{\mathfrak{n}}$ 是一个 1 维正规 Noether 局部环 ([25], p. 295)，从而是一个离散赋值环，并且承托 $B_{\mathfrak{p}}$，当然也承托 A。

现在若 L 是 K 的一个有限型扩张，则根据上面所述，可以限于考虑 A 是离散赋值环的情形。设 w 是 K 的一个附随于 A 的赋值，则可以找到 L 的一个离散赋值 w'，它是 w 的延拓：事实上，可以通过对 L 的生成元个数进行归纳而归结到 $L=K(\alpha)$ 的情形，此时命题是一个古典的结果 ([24], p. 106)。

推论 (7.1.8) — *设 A 是一个 Noether 整环，K 是它的分式域，L 是 K 的一个有限型扩张。则 A 在 L 中的相对整闭包就是所有包含 A 并且以 L 为分式域的离散赋值环的交集。*

事实上，由于这样的离散赋值环总是正规的，当然就包含了 L 的所有在 A 上整型的元素。从而只需证明若 $x \in L$ 在 A 上不是整型的，则可以找到一个以 L 为分式域的离散赋值环 C，它包含 A 但不包含 x。事实上，x 上的条件意味着我们有 $x \notin B = A[1/x]$，换句话说，$1/x$ 在 Noether 环 B 中不是可逆的。从而在 B 中有一个素理想 $\mathfrak{p}$ 包含 $1/x$。整局部环 $B_{\mathfrak{p}}$ 是 Noether 的，且包含在 L 中，同时 L 是 $B_{\mathfrak{p}}$ 的分式域（包含 K）的一个有限型扩张。从而依照 (7.1.7)，存在一个离散赋值环 C，它可以承托 $B_{\mathfrak{p}}$，并且以 L 为分式域；由于 $q/x \in \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ 落在 C 的极大理想之中，故有 $x \notin C$，这就完成了证明。

(7.1.7) 的几何形式是下面这个：

命题 (7.1.9) — 设 Y 是一个局部 *Noether* 概形，$p : X \to Y$ 是一个局部有限型态射，x 是 X 的一点，$y = p(x)$，并且 $y' \neq y$ 是 y 的一个特殊化。则可以找到一个局部概形 Y'，它是某个离散赋值环的谱，闭点为 a，一般点为 b，并且存在一个分离态射 $f : Y' \to Y$ 和一个从 Y' 到 X 的 Y 有理映射 g，使得 $f(a) = y'$, $f(b) = y$, $g(b) = x$，且在交换图表

(7.1.9.1)
$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{k}(x) \arrow[dl, "\gamma"'] \\ \boldsymbol{k}(b) & \boldsymbol{k}(y) \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

（其中 π, φ, γ 分别是对应于 p, f, g 的同态）中，γ 是一个一一映射。

与 (7.1.4) 同样，问题可以归结到 Y 是整的并且以 y 为一般点的情形（有见于 (**I**, 6.3.4, (iv))），且由于问题在 X 和 Y 上都是局部性的，故可假设 p 是有限型的；于是我们又回到了 (7.1.4) 的情况，并连同两个补充性质：$\boldsymbol{k}(x)$ 是 $\boldsymbol{k}(y)$ 的有限型扩张 (**I**, 6.4.11)，且 $\mathscr{O}_{y'}$ 是 Noether 的；现在可以应用 (7.1.7)，即取 $Y' = \operatorname{Spec} A'$，其中 A' 是一个能够承托 $\mathscr{O}_{y'}$ 的离散赋值环，并以 $\boldsymbol{k}(x)$ 为分式域。从而我们定义出一个交换图表 (7.1.9.1)，其中 γ 是一个一一映射，并且 π 和 φ 分别对应于态射 p 和 f。进而，由于 X 和 Y 都是局部 Noether 的 (**I**, 6.6.2)，并且 Y' 是整的。故有唯一一个从 Y' 到 X 的 Y 有理映射 g，它与同构 γ 相对应 (**I**, 7.1.15)，这就完成了证明。

7.2 分离性的赋值判别法

命题 (7.2.1) — 设 X, Y 是两个概形，$f : X \to Y$ 是一个拟紧态射。则以下诸条件是等价的:

a) 态射 f 是闭的。

b) 对任意 $x \in X$ 和 $y = f(x)$ 的任意一个不同于 y 的特殊化 y'，均可找到 x 的一个特殊化 x'，使得 $f(x') = y'$。

条件 b) 相当于说 $f(\overline{\{x\}}) = \overline{\{y\}}$，从而它是 a) 的推论。为了证明 b) 蕴涵 a)，我们考虑 X 的底空间的一个闭子集 X'；设 $Y' = \overline{f(X')}$，下面证明 $Y' = f(X')$。分别考虑 X 和 Y 的以 X' 和 Y' 为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)；此时我们有一个态射 $f' : X' \to Y'$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

是交换的 (**I**, 5.2.2)，且由于 f 是拟紧的，故知 f' 也是如此。从而归结为证明若 f 是一个拟紧的笼罩性态射，则条件 b) 蕴涵 $f(X) = Y$。现在设 y' 是 Y 的一点，并设 y 是 Y 的一个包含 y' 的不可约分支的一般点；依照 b)，只需证明 $f^{-1}(y)$ 不是空的。然而我们知道，这个性质可由 f 是拟紧笼罩性态射的事实推出来 (**I**, 6.6.5)。

推论 (7.2.2) — 设 $f : X \to Y$ 是一个拟紧的浸入态射。则为了使 X 的底空间在 Y 中是闭的，必须且只需它包含它的每个点 (在 Y 中) 的每个特殊化。

命题 (7.2.3) — 设 Y 是一个概形 (相应的，局部 *Noether* 概形)，$f : X \to Y$ 是一个态射 (相应的，局部有限型态射)。则以下诸条件是等价的:

a) f 是分离的。

b) 对角线态射 $X \to X \times_Y X$ 是拟紧的，并且对任意形如 $Y' = \operatorname{Spec} A$ 的 Y 概形，其中 A 是一个赋值环 (相应的，离散赋值环)，两个从 Y' 到 X 的 Y 态射只要在 Y' 的一般点上是一致的，它们就是相等的。

c) 对角线态射 $X \to X \times_Y X$ 是拟紧的，并且对任意形如 $Y' = \operatorname{Spec} A$ 的 Y 概形，其中 A 是一个赋值环 (相应的，离散赋值环)，$X' = X_{(Y')}$ 的两个 Y' 截面只要在 Y' 的一般点上是一致的，它们就是相等的。

b) 和 c) 的等价性缘自 Y' 到 X 的 Y 态射与 X' 的 Y' 截面之间的一一对应 (**I**, 3.3.14)。若 X 在 Y 上是分离的，则依照 (**I**, 7.2.2.1)，条件 b) 是成立的，因为 Y' 是整的。只消再证明由 b) 可以推出对角线态射 $\Delta : X \to X \times_Y X$ 是闭的，即归结为证明它满足 (7.2.2) 的判别条件。然则，设 z 是对角线 $\Delta(X)$ 中的一点，$z' \neq z$ 是 z 在 $X \times_Y X$ 中的一个特殊化。则可以找到 (7.1.4) 一个赋值环 A 和一个从 $Y' = \operatorname{Spec} A$ 到 $X \times_Y X$ 的态射 f，它把 Y' 的闭点 a 映到 z'，并把 Y' 的一般点 b 映到 z；这个态射使 Y' 成为一个 $(X \times_Y X)$ 概形，当然也是一个 Y 概形。若把 f 与 $X \times_Y X$ 的两个投影进行合成，则可以得到两个从 Y' 到 X 的 Y 态射 g_1, g_2，根据前提条件，它们在点 b 上是重合的；从而它们等于同一个态射 g，这就意味着 (**I**, 5.3.1) f 可以分解为 $f = \Delta \circ g$，因而 $z' \in \Delta(X)$。如果假设 Y 是局部 Noether 的，f 是局部有限型的，则 $X \times_Y X$ 是局部 Noether 的 (**I**, 6.6.7)；此时依照 (7.1.9)，在上述证明过程中可以假设 A 是一个离散赋值环。

注解 (7.2.4) — (i) 如果假设 Y 是局部 Noether 的，f 是局部有限型的，则态射 Δ 是拟紧的这个条件总是成立的，因为此时 $X\times_Y X$ 是局部 Noether 的 (**I**, 6.6.4, (i))。在一般情形下，这个条件也意味着对于 X 的任意仿射开覆盖 (U_α)，诸集合 $U_\alpha\cap U_\beta$ 都是拟紧的。

(ii) 为了使 f 是分离的，只需条件 b) 或条件 c) 对于完备且具有代数闭的剩余类域的赋值环 A 是成立的；事实上，这可由 (7.2.3) 的证明及 (7.1.4) 推出来。

7.3 紧合性的赋值判别法

命题 (7.3.1) — 设 A 是一个赋值环，$Y=\operatorname{Spec}A$，b 是 Y 的一般点，X 是一个整分离概形，$f:X\to Y$ 是一个闭态射，假设 $f^{-1}(b)$ 只含一点 x，并且对应的同态 $\boldsymbol{k}(b)\to\boldsymbol{k}(x)$ 是一一的。则 f 是一个同构。

由于 f 是闭且笼罩性的，故有 $f(X)=Y$；于是只需 (**I**, 4.2.2) 证明对于 Y 中的任意 $y'\neq b$，均可找到唯一一点 x'，使得 $f(x')=y'$，并且对应的同态 $\mathscr{O}_{y'}\to\mathscr{O}_{x'}$ 是一一的，因为此时 f 将是一个同胚。然则，若 $f(x')=y'$，则 $\mathscr{O}_{x'}$ 是这样一个局部环，它包含在 $K=\boldsymbol{k}(x)=\boldsymbol{k}(b)$ 中，并且承托着 $\mathscr{O}_{y'}$；后面这个环就是局部环 $A_{y'}$，从而是一个以 K 为分式域的赋值环 (7.1.1)。此外，我们有 $\mathscr{O}_{x'}\neq K$，因为 x' 不是 X 的一般点 (**0**, 2.1.3)；由此可知，$\mathscr{O}_{x'}=\mathscr{O}_{y'}$。由于 X 是一个分离整概形，故知关系式 $\mathscr{O}_{x'}=\mathscr{O}_{x''}$ 意味着 $x'=x''$ (**I**, 8.2.2)，这就完成了证明。

(7.3.2) 设 A 是一个赋值环，$Y=\operatorname{Spec}A$，b 是 Y 的一般点，从而 $\mathscr{O}_b=\boldsymbol{k}(b)$ 就等于 A 的分式域 K；设 $f:X\to Y$ 是一个态射。我们知道 (**I**, 7.1.4)，X 的 Y 有理截面一一对应于点 b 处的 Y 截面芽 (定义在 b 的邻域上)，故得一个典范映射

(7.3.2.1)
$$\Gamma_{\mathrm{rat}}(X/Y)\;=\;\Gamma(f^{-1}(b)/\operatorname{Spec}K)\ 。$$

此外，根据定义 (**I**, 3.4.5)，$\Gamma(f^{-1}(b)/\operatorname{Spec}K)$ 中的元素可以等同于 $f^{-1}(b)$ 的 K 有理点。如果 f 是分离的，则由 (**I**, 5.4.7) 知，映射 (7.3.2.1) 是单的，因为 Y 是一个分离整概形。

把 (7.3.2.1) 与典范映射 $\Gamma(X/Y)\to\Gamma_{\mathrm{rat}}(X/Y)$ (**I**, 7.1.2) 进行合成，则可以得到一个典范映射

(7.3.2.2)
$$\Gamma(X/Y)\;=\;\Gamma(f^{-1}(b)/\operatorname{Spec}K)\ 。$$

如果 f 是分离的，则这个映射也是单的 (**I**, 5.4.7)。

命题 (7.3.3) — 设 A 是一个赋值环，分式域为 K，$Y=\operatorname{Spec}A$，b 是 Y 的一般点，$f:X\to Y$ 是一个分离的闭态射。则典范映射 (7.3.2.2) 是一一的 (这也相当于说它是满的，并且意味着 X 的 Y 有理截面都是处处有定义的)。

我们设 x 是 $f^{-1}(b)$ 的一点，在 K 上是有理的。由于 f 是分离的，故知 f 所对应的态射 $f^{-1}(b) \to \operatorname{Spec} K$ 也是如此 (**I**, 5.5.1, (iv))，且由于 $f^{-1}(b)$ 的所有截面都是闭浸入 (**I**, 5.4.6)，故知 $\{x\}$ 在 $f^{-1}(b)$ 中是闭的。考虑 X 的以 $\{x\}$ 在 X 中的闭包 $\overline{\{x\}}$ 为底空间的既约闭子概形。则易见 f 在 X' 上的限制满足 (7.3.1) 中的前提条件，从而它是 X' 到 Y 的一个同构，并且它的逆同构就是我们所要的那个 X 的 Y 截面。

(7.3.4) 为了陈述下面的结果，我们要起用一个新的名词，它的进一步讨论将出现第 IV 章中；设 F 是概形 Y 的一个子集，所谓 F 在 Y 中的余维数，记作 $\operatorname{codim}_Y F$，是指诸整数 $\dim \mathscr{O}_z$ 的下确界，其中 z 跑遍 F。

推论 (7.3.5) — *设 Y 是一个既约的局部 Noether 概形，N 是由那些使 Y 在该处不正则的点 $y \in Y$ 所组成的集合 (**0**, 4.1.4)；我们假设 $\operatorname{codim}_Y N \geqslant 2$。设 $f : X \to Y$ 是一个有限型*分离闭*态射，g 是 X 的 Y 有理截面；若 Y' 是由那些使 g 在该处没有定义的点 $y \in Y$ 所组成的集合（这个集合是闭的 (**I**, 7.2.1)），则有 $\operatorname{codim}_Y Y' \geqslant 2$。*

只需证明在任何满足 $\dim \mathscr{O}_z \leqslant 1$ 的点 $z \in Y$ 处 g 都是有定义的。若 $\dim \mathscr{O}_z = 0$，则 z 是 Y 的某个不可约分支的一般点 (**I**, 1.1.14)，从而落在 Y 的每一个处处稠密的开集之中，特别的，它落在 g 的定义域之中。假设 $\dim \mathscr{O}_z = 1$；则根据前提条件，$\mathscr{O}_z$ 是一个正则 Noether 局部环，从而 (7.1.6) 是离散赋值环。设 $Z = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_z$；由于 $U = Y - Y'$ 是处处稠密的，故知 $U \cap Z$ 不是空的 (**I**, 2.4.2)；设 g' 是由 g 所诱导的从 Z 到 X 的有理映射 (**I**, 7.2.8)；则只需证明 g' 是一个态射 (**I**, 7.2.9)。然则，g' 可以被看作是 Z 概形 $f^{-1}(Z) = X \times_Y Z$ 的一个 Z 有理截面；易见 f 所对应的态射 $f^{-1}(Z) \to Z$ 是闭的，从而由 (**I**, 5.5.1, (i)) 知，它是分离的；由此就可以 (7.3.3) 推出 g' 是处处有定义的；由于 Z 是既约的，并且 X 在 Y 上是分离的，故知 g' 是一个态射 (**I**, 7.2.2)。

推论 (7.3.6) — *设 S 是一个局部 Noether 概形，X 和 Y 是两个 S 概形；假设 Y 是既约的，进而由使得 Y 在该处不正则的那些点 $y \in Y$ 所组成的集合 N 具有性质 $\operatorname{codim}_Y N \geqslant 2$；最后假设结构态射 $X \to S$ 是紧合的。设 f 是 Y 到 X 的一个 S 有理映射，并设 Y' 是由 f 在该处没有定义的那些点 $y \in Y$ 所组成的集合；则有 $\operatorname{codim}_Y Y' \geqslant 2$。*

我们知道 (**I**, 7.1.2) Y 到 X 的 S 有理映射可以等同于 $X \times_S Y$ 的 Y 有理截面；由于结构态射 $X \otimes_S Y \to Y$ 是闭的 (5.4.1)，从而可以使用 (7.3.5)，故得结论。

注解 (7.3.7) — 特别的，如果 Y 是正规的 (**0**, 4.1.4)，则依照 (7.1.6)，在 (7.3.5) 和 (7.3.6) 中加在 Y 上的那些前提条件总是成立的。

我们可以用 (7.3.3) 的一个逆命题来给出广泛闭（相应的，紧合）态射的本征描述：

定理 (7.3.8) — *设 Y 是一个概形（相应的，局部 Noether 概形），$f : X \to Y$ 是*

一个拟紧分离态射 (相应的，有限型态射)。则以下诸条件是等价的:

a) f 是广泛闭 (相应的，紧合) 的。

b) 对任意形如 $Y' = \operatorname{Spec} A$ 的 Y 概形，其中 A 是一个赋值环 (相应的，离散赋值环)，分式域为 K，典范含入 $A \to K$ 所对应的典范映射

$$\operatorname{Hom}_Y(Y', X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_Y(\operatorname{Spec} K, X)$$

都是满 (相应的，一一) 的。

c) 对任意形如 $Y' = \operatorname{Spec} A$ 的 Y 概形，其中 A 是一个赋值环 (相应的，离散赋值环)，与 Y' 概形 $X_{(Y')}$ 相对应的典范映射 (7.3.2.2) 都是满 (相应的，一一) 的。

b) 和 c) 的等价性可由 (**I**, 3.3.14) 立得；a) 蕴涵 c)，因为由 a) 知，在任何一种前提条件下，$f_{(Y')}$ 都是分离 (**I**, 5.5.1, (iv)) 且闭的，从而只需应用 (7.3.3)。只消再证明 b) 蕴涵 a)。我们首先考虑 Y 是任意概形且 f 是拟紧分离态射的情形。若条件 b) 对于 f 是成立的，则它对于 $f_{(Y'')} : X_{(Y'')} \to Y''$ 也是如此，其中 Y'' 是任意一个 Y 概形，这是依据 b) 和 c) 的等价性以及下面的事实：对任意态射 $Y' \to Y''$，均有 $X_{(Y'')} \times''_Y Y' = X \times_Y Y'$ (**I**, 3.3.9.1)；进而，由于 $f_{(Y')}$ 是拟紧分离的，只要 f 是如此 (**I**, 5.5.1, (iv) 和 6.6.4, (iii))，从而问题归结为证明 b) 蕴涵 f 是闭的。为此只需验证 (7.2.1) 的条件 b)。设 $x \in X$，y' 是 $y = f(x)$ 的一个不同于 y 的特殊化；依照 (7.1.4)，存在一个概形 Y'，它是某个赋值环的谱，并且存在一个分离态射 $g : Y' \to Y$，使得若 a 是 Y' 的闭点，b 是 Y' 的一般点，则有 $g(a) = y'$, $g(b) = y$，并且存在一个 $\boldsymbol{k}(y)$ 同态 $\boldsymbol{k}(x) \to \boldsymbol{k}(b)$。后面这个同态典范对应着一个 Y 态射 $\operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(b) \to X$ (**I**, 2.4.6)，从而由 b) 知，存在一个 Y 态射 $h : Y' \to X$，它对应着上述态射。此时我们有 $h(b) = x$；若令 $h(a) = x'$，则 x' 是 x 的一个特殊化，并且我们有 $f(x') = f(h(a)) = g(a) = y'$。

现在若 Y 是局部 Noether 的，f 是有限型的，则由于对角线态射 $X \to X \times_Y X$ 是拟紧的 (7.2.4)，故而依照 (7.2.3)，条件 b) 蕴涵 f 是分离的。进而，有见于 (5.6.3)，为了验证 f 是紧合的，只需证明对任意有限型 Y 概形 Y''，$f_{(Y')} : X_{(Y'')} \to Y''$ 都是闭的。由于此时 Y'' 也是局部 Noether 的，故可采用和第一个情形相同的证明方法，只要取 Y' 是一个离散赋值环的谱，并且使用 (7.1.9) 来代替 (7.1.4)。

注解 (7.3.9) — (i) 若 Y 是一个任意的概形，f 是一个分离态射，则为了使 f 是广泛闭的，只需条件 b) 或条件 c) 对于那些具有代数闭的剩余类域的完备赋值环 A 都是成立的；事实上，这可由 (7.1.4) 的证明推出来。

(ii) 由 (7.3.8) 的判别法 c) 可以导出下述事实的一个新证明：射影态射 $X \to Y$ 总是闭的 (5.5.3)，这个证明与古典方法更为接近。事实上，可以假设 Y 是仿射的，因而 X 可以等同于某个射影丛 $\mathbf{P}^n_Y$ 的闭子概形 (5.3.3)；于是为了证明 $X \to Y$ 是闭的，只需验证结构态射 $\mathbf{P}^n_Y \to Y$ 是如此，把 (7.3.8) 中的判别法 c) 和 (4.1.3.1) 结合起来又表明，问题可以归结为证明下面的事实：若 Y 是一个赋值环 A 的谱，分式域为 K，

则 $\mathbf{P}_Y^n$ 的任何 K 值点都来自于 $\mathbf{P}_Y^n$ 的某个 A 值点 (限制到 Y 的一般点上)。然则，任何可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层都是平凡的 (**I**, 2.4.8)；从而由 (4.2.6) 知，$\mathbf{P}_Y^n$ 的一个 K 值点可以等同于 K 中的一组元素 $(\zeta c_0,\dots,\zeta c_n)$ 的等价类，这里 $\zeta\neq 0$，并且诸 c_i 是 K 中的一组元素，且不全为 0。现在给 c_i 同时乘以 A 中的一个具有适当赋值的元素，则可以假设所有 c_i 都属于 A，并且至少有一个是可逆的。此时 (4.2.6) 这个元素组 $(c_0,\dots,c_n)$ 也可以定义出 $\mathbf{P}_Y^n$ 的一个 A 值点，这就证明了我们的陈言。

(iii) 判别法 (7.2.3) 和 (7.3.8) 特别适用于下面的考虑方法，即我们把一个 Y 概形 X 等价地看作是一个定义在 Y 概形 Y' 上的函子

$$X(Y') \;=\; \mathrm{Hom}_Y(Y',X) \quad 。$$

比如说，我们可以使用这些判别法来证明，在适当的条件下“Picard 概形”是紧合的。

推论 (7.3.10) — *设 Y 是一个分离整概形 (相应的，局部 Noether 分离整概形)，X 是一个分离整概形，$f:X\to Y$ 是一个笼罩。*

(i) 若 f 是拟紧且广泛闭的，则任何以 X 的有理函数域 $\mathrm{R}(X)$ 为分式域的赋值环只要能够承托 Y 的某个局部环，也就承托着 X 的一个局部环。

(ii) 反过来，假设 f 是有限型的，并且 (i) 中的性质对于所有以 $\mathrm{R}(X)$ 为分式域的赋值环 (相应的，离散赋值环) 都是成立的，则 f 是紧合的。

首先注意到前提条件蕴涵着在任何情形下 f 都是分离的 (**I**, 5.5.9)。

(i) 设 $X=\mathrm{R}(Y), L=\mathrm{R}(X)$，$y$ 是 Y 的一点，A 是一个赋值环，以 L 为分式域，并且承托 $\mathscr{O}_y$；从而含入 $\mathscr{O}_y\to A$ 定义了一个从 $Y'=\mathrm{Spec}\,A$ 到 Y 的态射 h (**I**, 2.4.4)，且满足 $h(a)=y$，其中 a 是 Y' 的闭点；进而，若 η 是 Y 的一般点，则它也是 $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_y$ 的一般点，且我们有 $h(b)=\eta$，其中 b 是 Y' 的一般点 (因为根据前提条件 $K\subset L$)。若 ξ 是 X 的一般点，则根据前提条件，我们有 $\boldsymbol{k}(\xi)=\boldsymbol{k}(b)=L$，故得一个 Y 态射 $g:\mathrm{Spec}\,L\to X$，满足 $g(b)=\xi$；依照 (7.3.8)，g 来自于某个 Y 态射 $g':Y'\to X$。若 $x=g'(a)$，则易见 A 可以承托 $\mathscr{O}_x$。

(ii) 问题在 Y 上是局部性的，因而总可以假设 Y 是仿射 (相应的，仿射且 Noether) 的。由于 f 是有限型的，故而在这两种情形都可以使用 Chow 引理 (5.6.1)。从而存在一个射影态射 $p:P\to Y$、一个浸入态射 $j:X'\to P$、和一个射影且映满的双有理态射 $g:X'\to X$ (X' 是整的)，使得图表

$$\begin{tikzcd} P & X' \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[from=u, "p"'] & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

是交换的。现在只需证明 j 是一个闭浸入，因为此时 $f\circ g = p\circ j$ 将是一个射影态射，从而是紧合的，并且由于 g 是映满的，从而 f 也将是紧合的 (5.4.3)。设 Z 是 P 的以 $\overline{j(X')}$ 为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)；由于 X' 是整的，故知 j 可以分解为 $i\circ h$，其中 $i : Z\to P$ 是典范含入，$h : X'\to Z$ 是一个笼罩性开浸入 (**I**, 5.2.3)，并且 Z 是整的；进而 Z 在 Y 上是射影的，从而我们可以限于考虑 P 是整的并且 j 是双有理的笼罩性态射这个情形，并且问题归结为证明 j 是映满的。然则，设 $z\in P$；则 $\mathscr{O}_z$ 是一个整 (相应的，Noether 整) 局部环，并且它的分式域是

$$L = \mathrm{R}(P) = \mathrm{R}(X') = \mathrm{R}(X) \ 。$$

可以限于考虑 z 不是 P 的一般点的情形。因而可以找到 (7.1.2 和 7.1.7) 一个赋值环 (相应的，离散赋值环) A，以 L 为分式域，并且承托 $\mathscr{O}_z$。当然 A 也承托 $\mathscr{O}_y$，其中 $y = p(z)$，从而根据前提条件，存在一点 $x\in X$，使得 A 承托 $\mathscr{O}_x$。由于 g 是紧合的，故而证明的第一部分表明，A 也可以承托某个 $\mathscr{O}_{x'}$，其中 $x'\in X'$；由此可知，$\mathscr{O}_z$ 和 $\mathscr{O}_{j(x')} = \mathscr{O}_x$ 是相近的 (**I**, 8.1.4)，且由于 P 是一个分离概形，这就说明了 $z = j(x')$ (**I**, 8.2.2)，也完成了证明。

推论 (7.3.11) — 设 X, Y 是两个分离整概形，$f : X\to Y$ 是一个拟紧且广泛闭的笼罩性态射。进而假设 Y 是仿射的，环为 B (整)。则 $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 可以典范同构于 B 在 $\mathrm{R}(X)$ 中的相对整闭包的一个子环。

事实上 (**I**, 8.2.1.1)，$\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 可以等同于所有 $\mathscr{O}_x$ $(x\in X)$ 的交集；因而依照 (7.3.10), (7.1.2) 和 (7.1.3)，$\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 包含在所有包含 B 且以 $\mathrm{R}(X)$ 为分式域的赋值环的交集之中；于是由 (7.1.3) 就可以推出结论。

注解 (7.3.12) — 在 (7.3.11) 的前提条件下，如果假设 $\mathrm{R}(X)$ 是 $\mathrm{R}(Y)$ 的有限型扩张，则在很多情形下都可以推出 $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ 是环 $B=\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)$ 上的一个有限型模。比如说当 B 是域上的有限型代数的时候就是如此，因为此时我们知道 B 在它的分式域的任何有限型扩张中的相对整闭包都是有限型 B 模 ([13], t. I, p. 267, 定理 9)；于是由 (7.3.11) 以及 B 是 Noether 环的事实就可以推出结论。

特别的，*在域 K 上紧合且仿射的概形 X 一定是有限的*。事实上，依照 (1.6.4), (5.4.6) 和 (**I**, 6.4.4, c))，可以限于考虑 X 是既约的这个情形。进而，只需证明 X 的每一个以不可约分支 (有限个) 为底空间的闭子概形都是在 K 上有限的，这样一来 (有见于 (5.4.5)) 问题最后归结到 X 是整的这个情形。此时由上面的注解就可以推出结论。

在第 III 章中，我们将使用另一种方法来证明上述命题，即把它看作是下述一般事实的一个推论：若 $f : X\to Y$ 是紧合的，Y 是局部 Noether 的，则对任意凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，$f_*\mathscr{F}$ 都是凝聚的 (**III**, 4.4.2)。

最后注意到判别法 (7.3.10) 在古典代数几何学中曾被用作是紧合态射的定义。也是因为这个缘故，判别法 (7.3.8) 在我们所知的应用中都显得特别便利。

7.4 代数曲线和 1 维函数域

这一小节的目的是展示一下如何使用概形的语言来讨论古典的代数曲线论 (可以对照 C. Chevalley [23] 中的陈述) 。在整个小节中，k 是指一个域，所有分离概形都是有限型的分离 k 概形，所有态射都是 k 态射。

命题 (7.4.1) — 设 X 是一个在 k 上有限型的概形 (从而是 *Noether* 的)；设 x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 X 的诸不可约分支 X_i 的一般点，并设 $K_i = \boldsymbol{k}(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 。则以下诸条件是等价的:

a) 每个 K_i 都是 k 的超越次数为 1 的扩张。

b) 对于 X 的任意闭点 x，局部环 $\mathscr{O}_x$ 都是 1 维的 (7.1.5) 。

c) X 的不同于 X_i 的不可约闭子集就是 X 的那些闭点。

由于 X 是拟紧的，故知 X 的任何不可约闭子集 F 都包含闭点 (**0**, 2.1.3)。依照 (**I**, 2.4.2)，在 $\mathscr{O}_x$ 的素理想与 X 的包含 x 的不可约闭子集之间有一个一一对应 (**I**, 1.1.14)；由此立得 b) 和 c) 的等价性。另一方面，若 $\mathfrak{p}_\alpha$ $(1 \leqslant r \leqslant \alpha)$ 是 Noether 局部环 $\mathscr{O}_x$ 的诸极小素理想，则局部环 $\mathscr{O}_x/\mathfrak{p}_\alpha$ 都是整的，并且它们的分式域就是 K_i 中的那些满足 $x \in X_i$ 的域。进而，我们知道 ([1], p. 4-06, 定理 2) 一个有限型的整局部 k 代数的维数就等于它的分式域在 k 上的超越次数。最后，$\mathscr{O}_x$ 的维数是诸 $\mathscr{O}_x/\mathfrak{p}_\alpha$ 的维数的上确界；然则条件 b) 蕴涵着这些维数都等于 1，从而 a) 蕴涵 b)；反过来，若 $\mathscr{O}_x$ 是 1 维的，则任何一个 $\mathfrak{p}_\alpha$ 都不等于 $\mathscr{O}_x$ 的极大理想，否则 $\mathscr{O}_x$ 将是 0 维的；从而每一个 $\mathscr{O}_x/\mathfrak{p}_\alpha$ 都是 1 维的，这就证明了 b) 蕴涵 a)。

注意到在 (7.4.1) 的条件下，集合 X 要么是空的要么是无限的，这可由 (**I**, 6.4.4) 立得。

定义 (7.4.2) — 所谓 k 上的**代数曲线**，是指这样的**分离**代数 k 概形，它不是空的，并且满足 (7.4.1) 中的条件。

使用维数的语言 (将出现在第 IV 章之中) ，这也相当于说：k 上的代数曲线就是这样的非空分离代数 k 概形，它的所有的不可约分支都是 1 维的。

注意到若 X 是 k 上的一条代数曲线，则 X 的那些以其不可约分支为底空间的既约闭子概形 X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 也都是 k 上的代数曲线。

推论 (7.4.3) — 设 X 是一条不可约代数曲线。则 X 的唯一一个不是闭点的点就是它的一般点。X 的不同于 X 自身的闭子集就是那些由有限个闭点所组成的集合；它们恰好也是 X 的那些不处处稠密的子集。

若点 $x\in X$ 不是闭的，则它在 X 中的闭包是 X 的一个不可约闭子集，从而必然就是整个 X，这是依据 (7.4.1)，因而 x 是 X 的一般点。X 的一个闭子集 F 如果不等于 X，则它不能包含 X 的一般点，从而它里面的点都是闭点 (在 X 中，当然也在 F 中)；考虑 X 的以 F 为底空间的既约闭子概形 (**I**, 5.2.1)，则由 (**I**, 6.2.2) 知，F 是有限且离散的。从而 X 的一个无限子集的闭包必然等于 X。

若 X 是一条任意的代数曲线，把 (7.4.3) 用到 X 的诸不可约分支上，则我们看到，X 中的那些不是闭点的点恰好就是不可约分支的一般点。

推论 (7.4.4) — *设 X 和 Y 是 k 上的两条不可约代数曲线，$f:X\to Y$ 是一个 k 态射。则为了使 f 是笼罩性的，必须且只需对任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 都是有限的。*

事实上，若 f 不是一个笼罩，则依照 (7.4.3)，$f(X)$ 必然是 Y 的一个有限子集，从而不可能对于所有点 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 都是有限的，因为否则 X 将是有限的，这是荒谬的 (7.4.1)。反过来，若 f 是一个笼罩，则对于 Y 的任何一个不同于一般点 η 的点 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 在 X 中都是闭的，因为 $\{y\}$ 在 Y 中是闭的 (7.4.3)；另一方面，根据前提条件，$f^{-1}(y)$ 不包含 X 的一般点 ξ，从而是有限的 (7.4.3)。最后，为了证明 $f^{-1}(\eta)$ 是有限的，注意到纤维 $f^{-1}(\eta)$ 是 $\boldsymbol{k}(\eta)$ 上的一个有限型不可约分离概形，并且一般点是 ξ (**I**, 6.3.9 和 6.4.11)。由于 $\boldsymbol{k}(\xi)$ 和 $\boldsymbol{k}(\eta)$ 都是 k 的有限型扩张，且具有相同的超越次数 1，故知 $\boldsymbol{k}(\xi)$ 必然是 $\boldsymbol{k}(\eta)$ 的一个有限扩张，从而 ξ 在 $f^{-1}(\eta)$ 中是闭的 (**I**, 6.4.2)，因而 $f^{-1}(\eta)$ 只包含一点 ξ。

我们将在第 III 章里看到，对于 Noether 概形之间的一个紧合态射 $f:X\to Y$ 来说，如果对任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 都是有限的，则它一定是有限的；从而由 (7.4.4) 将可以推出，不可约代数曲线之间的紧合笼罩性态射一定是有限的。

推论 (7.4.5) — *设 X 是 k 上的一条代数曲线。则为了使 X 是正则的，必须且只需它是正规的，或者它的所有闭点处的局部环都是离散赋值环。*

这可由 (7.4.1) 的条件 b) 以及 (7.1.6) 立得。

推论 (7.4.6) — *设 X 是一条既约代数曲线，$\mathscr{A}$ 是一个既约的凝聚 $\mathscr{R}(X)$ 代数层；则 X 相对于 $\mathscr{A}$ 的整闭包 X' (6.3.4) 是一条正规代数曲线，并且典范态射 $X'\to X$ 是有限的。*

$X'\to X$ 是有限的这个事实缘自 (6.3.10)；从而 X' 是一个分离代数 k 概形，进而，若 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 X 的诸不可约分支的一般点，x'_j $(1\leqslant j\leqslant m)$ 是 X' 的诸不可约分支的一般点，则每个 $\boldsymbol{k}(x'_j)$ 都是某个 $\boldsymbol{k}(x_i)$ 的有限扩张 (6.3.6)，从而在 k 上具有超越次数 1。于是 X' 也是 k 上的代数曲线，并且 X' 是有限个整且正规的分离概形之和 (6.3.6 和 6.3.7)。

(7.4.7) 所谓 k 上的一条代数曲线 X 是完备的，是指它在 k 上是紧合的。

推论 (7.4.8) — 为了使 k 上的一条既约代数曲线 X 是完备的，必须且只需它的正规化 X' 是如此。

事实上，此时典范态射 $f: X' \to X$ 是有限的 (7.4.6)，从而是紧合 (6.1.11) 且映满的 (6.3.8)；于是若 $g: X \to \operatorname{Spec} k$ 是结构态射，则 g 和 $g \circ f$ 都是紧合的，这是缘自 (5.4.2, (ii)) 和 (5.4.3, (ii))，因为根据前提条件，g 是分离的。

命题 (7.4.9) — 设 X 是 k 上的一条**正规**代数曲线，Y 是一个在 k 上**紧合**的代数 k 概形。则 X 到 Y 的任何 k 有理映射都是处处有定义的，换句话说，是一个态射。

事实上，由 (7.3.7) 知，若一个有理映射在点 $x \in X$ 处没有定义，则 $\mathscr{O}_x$ 的维数必须 $\geqslant 2$，从而这些点的集合是空的；最后一个陈言来自 (**I**, 7.2.3)。

推论 (7.4.10) — k 上的正规代数曲线在 k 上都是拟射影的。

由于 X 是有限个整且正规的代数曲线之和 (6.3.8)，故可限于考虑 X 是整的这个情形 (5.3.6)。由于 X 是拟紧的，故知它可以被有限个仿射开集 U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 所覆盖，且由于每个 U_i 在 k 上都是有限型的，故可找到一个整数 n_i 和一个 k 浸入 $f_i: U_i \to \mathbf{P}_k^{n_i}$ (5.3.3 和 5.3.4, (i))。由于 U_i 在 X 中是稠密的，故由 (7.4.9) 知，每个 f_i 都可以延拓为一个 k 态射 $g_i: X \to \mathbf{P}_k^{n_i}$，于是我们得到一个从 X 到 P 中的 k 态射 $g = (g_1, \dots, g_n)_k$，这里 P 是诸 $\mathbf{P}_k^{n_i}$ 在 k 上的纤维积。进而，对每个指标 i，由于 g_i 在 U_i 上的限制是浸入，故知 g 在 U_i 上的限制也是如此 (**I**, 5.3.14)。由于诸 U_i 覆盖了 X，并且 g 是分离的 (**I**, 5.5.1, (v))，故知 g 是 X 到 P 的一个浸入 (**I**, 8.2.8)。由于 Segre 态射 (4.3.3) 提供了 P 到某个 $\mathbf{P}_k^N$ 中的浸入，这就证明了 X 是拟射影的。

推论 (7.4.11) — 正规代数曲线 X 总是同构于某个完备正规代数曲线 $\widehat{X}$ 的稠密开子概形，并且 $\widehat{X}$ 可以确定到只差一个唯一同构。

若 X_1, X_2 是两条完备正规曲线，则由 (7.4.9) 立知，任何一个从 X_1 的稠密开集 U_1 映到 X_2 的稠密开集 U_2 上的同构都可以唯一地延拓为一个从 X_1 到 X_2 的同构；故得唯一性。为了证明 $\widehat{X}$ 的存在性，只需注意到 X 可以被看作是某个射影丛 $\mathbf{P}_k^n$ 的子概形 (7.4.10)。设 $\overline{X}$ 是 X 在 $\mathbf{P}_k^n$ 中的闭包 (**I**, 9.5.11)；由于 X 是 $\overline{X}$ 的稠密开子概形 (**I**, 9.5.10)，故知 X 的诸不可约分支的一般点 x_i 恰好也是 $\overline{X}$ 的不可约分支的一般点，并且 $\boldsymbol{k}(x_i)$ 在这两个概形中是一样的，从而 (7.4.1) $\overline{X}$ 是 k 上的一条代数曲线，它是既约的 (**I** 9.5.9)，并且在 k 上射影的 (5.5.1)，从而是完备的 (5.5.3)。现在取 $\widehat{X}$ 是 $\overline{X}$ 的正规化，则它也是完备的 (7.4.8)；进而，若 $h: \widehat{X} \to \overline{X}$ 是典范态射，则 h 在 $h^{-1}(X)$ 上的限制是一个映到 X 上的同构，因为 X 是正规的 (6.3.4)，且由于 $h^{-1}(X)$ 包含了 $\widehat{X}$ 的诸不可约分支的一般点 (6.3.8)，故知它在 $\widehat{X}$ 中是稠密的，这就完成了证明。

注解 (7.4.12) — 我们将在第 III 章里证明，(7.4.10) 的结论对于不正规 (甚至不既约) 的曲线仍然是成立的；我们还将证明，为了使一条代数曲线 (不管既约与

否）是仿射的，必须且只需它的诸不可约分支（既约）都不是完备的。

推论 (7.4.13) — 设 X 是一条不可约**正规**曲线，函数域是 $\mathrm{R}(X)=K$，Y 是一条**完备**整曲线，函数域是 $\mathrm{R}(Y)=L$。则在**笼罩**性 k 态射 $X\to Y$ 和 k 嵌入 $L\to K$ 之间有一个一一对应。

依照 (7.4.9)，X 到 Y 的 k 有理映射可以等同于 k 态射 $u:X\to Y$。由于态射 u 的笼罩性可由 $u(x)=y$ 来表征（这里 x 和 y 分别是 X 和 Y 的一般点），从而这个推论缘自这些注解以及 (**I**, 7.1.13)。

(7.4.14) 如果 Y 是射影直线 $\mathbf{P}_k^1=\operatorname{Proj}k[T_0,T]$，其中 T_0 和 T 是未定元，则 (7.4.13) 中的结果可以写成更具体的形式。此时 Y 是一个分离整概形 (2.4.4)，并且它的开子概形 $D_+(T_0)$ 同构于 $\operatorname{Spec}k[T]$ (2.3.6)，从而 Y 的一般点就是 $k[T]$ 的理想 (0)，并且它的有理函数域就是 $k(T)$，这就表明 Y 是 k 上的一条完备代数曲线。进而，$S=k[T_0,T]$ 的唯一一个既包含 T_0 又不同于 S_+ 的分次素理想就是主理想 (T_0)，从而 $D_+(T_0)$ 在 $Y=\mathbf{P}_k^1$ 中的补集只含有一个闭点，称为“无穷远点”，我们记之为 ∞（对于一般的向量丛和射影丛的关系，参看 8.4）。在这些记号下：

推论 (7.4.15) — 设 X 是一条不可约**正规**曲线，函数域是 $\mathrm{R}(X)=K$。则有一个从 K 到下面这个集合上的典范一一映射，该集合是由 X 到 $\mathbf{P}_k^1$ 的所有不等于那个取值为 ∞ 的常值态射的态射 u 所组成的。为了使 u 是笼罩性的，必须且只需它在 K 中所对应的元素在 k 上是超越的。

这可由 (7.4.9) 和下面的引理立得：

引理 (7.4.15.1) — 设 X 是 k 上的一个整概形，并设 $K=\mathrm{R}(X)$ 是它的有理函数域。则有一个从集合 K 到下面这个集合上的典范一一映射，该集合是由 X 到 $\mathbf{P}_k^1$ 的所有不等于那个取值为 ∞ 的常值态射的有理映射 u 所组成的。为了使这样一个有理映射是笼罩性的，必须且只需它在 K 中所对应的元素在 k 上是超越的。

首先，X 到 $\mathbf{P}_k^1$ 的有理映射一一对应着 $\mathbf{P}_k^1$ 的取值在 k 的扩张 K 中的点 (**I**, 7.1.12)。若这样一个点位于 (**I**, 3.4.5) $\mathbf{P}_k^1$ 的一般点之上，则对应的有理映射显然是笼罩性的。在相反的情形，由于 $\mathbf{P}_k^1$ 的非一般点都是闭的 (7.4.3)，故知 u 这个等价类中的那个唯一的定义在 u 的定义域 U 上的态射 $U\to\mathbf{P}_k^1$ 把 U 整个映到 $\mathbf{P}_k^1$ 的一个闭点 y 上，从而该态射（未必在 X 处处有定义）不是笼罩性的；适当混用一下术语，我们称这个有理映射 u 是“常值的”，并且“取值为 y”。现在只消在 $\mathbf{P}_k^1$ 的取值在 K 中且不位于 ∞ 处的点与 K 的元素之间建立起一一对应，然后验证这样的点位于 $\mathbf{P}_k^1$ 的一般点处当且仅当该点对应着 k 上的超越元。这个验证是很容易的（利用 (4.2.6, 例 1°)）。

推论 (7.4.16) — 设 X,Y 是 k 上的两条完备且正规的不可约代数曲线；设 $K=\mathrm{R}(X)$, $L=\mathrm{R}(Y)$ 是它们的函数域。则在 k 同构 $X\xrightarrow{\sim}Y$ 的集合与 k 同构 $L\xrightarrow{\sim}K$ 的

集合之间有一个典范的一一对应。

这是 (7.4.13) 的一个显然推论。

(7.4.17) 推论 (7.4.16) 表明，k 上的一条完备且正规的不可约代数曲线可以被它的有理函数域 K 确定到只差一个唯一的同构；根据定义，K 是 k 的一个有限型扩张，超越次数是 1（传统上称为一元代数函数域）。进而：

命题 (7.4.18) — *对于 k 的任意一个有限型且超越次数为 1 的扩张 K，均有一条完备且正规的不可约代数曲线 X，使得 $\mathrm{R}(X) = K$（确定到只差一个唯一的同构）。X 的局部环的集合可以等同于 ($\mathbf{I}$, 8.2.1) K 的那些包含 k 并以 K 为分式域的赋值环所组成的集合。*

事实上，K 是 k 的某个纯超越扩张 $k(T)$ 的有限扩张，并且 $k(T)$ 可以等同于射影直线 $Y = \mathbf{P}_k^1$ 的有理函数域。设 X 是 Y 的相对于 K 的整闭包 (6.3.4)；则 X 是一条以 K 为函数域的正规代数曲线 (6.3.7)，并且它是完备的，因为态射 $X \to Y$ 是有限的 (7.4.6)。X 的局部环 $\mathscr{O}_x$ 可以描述如下：如果 x 是一般点，则 $\mathscr{O}_x$ 是域 K，若 x 不是一般点，则 $\mathscr{O}_x$ 是一个包含 k 并以 K 为分式域的离散赋值环 (7.4.5)。反过来，设 A 是这样一个环；由于态射 $X \to \operatorname{Spec} k$ 是紧合的，并且 A 可以承托 k，故知它也承托 X 的某个局部环 $\mathscr{O}_x$ (7.3.10)；后者是一个以 K 为分式域的赋值环，从而必然等于 A。

注解 (7.4.19) — *由 (7.4.16) 和 (7.4.18) 知，给出 k 上的一条完备且正规的不可约代数曲线等价于给出 k 的一个有限型且超越次数为 1 的扩张 K*。注意到若 k' 是基域 k 的一个扩张，则 $X \otimes_k k'$ 是 k' 上的一条完备代数曲线 (5.4.2, (iii))，但是一般来说它既不是既约的也不是不可约的。然而若 K 是 k 的一个可分扩张，并且 k 在 K 中的相对代数闭包就是 k（按照古典的术语，这相当于说 K 是 k 的一个"正态扩张"[①]），则 $X \otimes_k k'$ 是既约且不可约的。但即使在这种情形下，$X \otimes_k k'$ 还是有可能不是正规的。读者可以在第 IV 章找到关于该问题的更多细节。

§8. 概形的暴涨，投影锥，射影闭包

8.1 概形的暴涨[②]

(8.1.1) 设 Y 是一个概形，对任意整数 $n \geqslant 0$，设 $\mathscr{I}_n$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个拟凝聚理想层；假设下面的条件得到满足：

(8.1.1.1) $\qquad \mathscr{I}_0 = \mathscr{O}_Y\,, \quad \mathscr{I}_n \subset \mathscr{I}_m \qquad$ 当 $m \leqslant n$ 时

①译注：正态扩张 ="extension régulière"，这里我们刻意不使用"正则"一词，原因很明显。

②译注：按照几何含义，这个操作把一个指定的闭子集从比较小的维数"暴涨"到尽可能高的维数，反方向的操作称为"暴落"。

(8.1.1.2) $\mathscr{I}_m \mathscr{I}_n \subset \mathscr{I}_{m+n}$ 对所有 m, n。

注意到这些条件蕴涵着

(8.1.1.3) $\mathscr{I}_1^n \subset \mathscr{I}_n$ 。

令

(8.1.1.4) $\mathscr{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{I}_n$ ，

则由 (8.1.1.1) 和 (8.1.1.2) 知，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，从而定义了一个 Y 概形 $X = \operatorname{Proj} \mathscr{S}$ 。若 $\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个可逆理想层，则 $\mathscr{I}_n \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{J}^{\otimes n}$ 可以典范等同于 $\mathscr{I}_n \mathscr{J}^n$ 。从而若把诸 $\mathscr{I}_n$ 都换成 $\mathscr{I}_n \mathscr{J}^n$ ，则 $\mathscr{S}$ 也变成了一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}_{(\mathscr{J})}$ ，并且 $X_{(\mathscr{J})} = \operatorname{Proj} \mathscr{S}_{(\mathscr{J})}$ 典范同构于 X (3.1.8)。

(8.1.2) 假设 Y 是局部整的，从而有理函数层 $\mathscr{R}(Y)$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 (**I**, 7.3.7)。我们把 $\mathscr{R}(Y)$ 的一个 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{I}$ 称为 $\mathscr{R}(Y)$ 的一个分式理想层，只要它是有限型的 (**0**, 5.2.1)。假设对每个 $n \geqslant 0$ 都给了 $\mathscr{R}(Y)$ 的一个分式理想层 $\mathscr{I}_n$ ，并满足 $\mathscr{I}_0 = \mathscr{O}_Y$ 以及条件 (8.1.1.2) (但 (8.1.1.1) 的第二个条件不必满足)；则仍然可以用公式 (8.1.1.4) 定义出一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，进而定义出对应的 Y 概形 $X = \operatorname{Proj} \mathscr{S}$ ；对于 $\mathscr{R}(X)$ 的任意可逆分式理想层 $\mathscr{J}$ ，我们还有一个从 X 到 $X_{(\mathscr{J})}$ 的典范同构。

定义 (8.1.3) — 设 Y 是一个概形 (相应的，局部整概形)，并设 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个拟凝聚理想层 (相应的，$\mathscr{R}(Y)$ 的一个拟凝聚的分式理想层)。我们把 Y 概形 $X = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{I}^n)$ 称为理想层 $\mathscr{I}$ 所引发的暴涨概形，或者 Y 相应于 $\mathscr{I}$ 的暴涨概形 (schéma éclaté)。如果 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个拟凝聚理想层，并且 Y' 是 Y 的那个由 $\mathscr{I}$ 所定义的闭子概形，则我们也称 X 是 Y' 暴涨后的 Y 概形。

根据定义，$\mathscr{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{I}^n$ 是由 $\mathscr{S}_1 = \mathscr{I}$ 所生成的；从而若 $\mathscr{I}$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_Y$ 模层，则 X 在 Y 上是射影的 (5.5.2)。即使去掉 $\mathscr{I}$ 上的条件，$\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X(1)$ 也是可逆的 (3.2.5)，并且依照 (4.4.3)，它相对于结构态射 $X \to Y$ 还是极丰沛的。

注意到若 $f : X \to Y$ 是结构态射，$\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个理想层，并且 Y' 是由 $\mathscr{I}$ 所定义的闭子概形，则 f 在 $f^{-1}(Y - Y')$ 上的限制是一个映到 $Y - Y'$ 上的同构：事实上，问题在 Y 上是局部性的，从而可以假设 $\mathscr{I} = \mathscr{O}_Y$ ，此时我们的陈言缘自 (3.1.7)。

如果我们把 $\mathscr{I}$ 换成 $\mathscr{I}^d$ $(d > 0)$，则暴涨后的 Y 概形 X 会变成一个典范同构于 X 的 Y 概形 (8.1.1)；同样的，对任意可逆理想层 (相应的，分式理想层) $\mathscr{J}$ ，理想层 $\mathscr{I}\mathscr{J}$ 所引发的暴涨概形 $X_{(\mathscr{J})}$ 都可以典范同构于 X (8.1.1)。

特别的，如果 $\mathscr{I}$ 是一个可逆理想层 (相应的，分式理想层)，则 $\mathscr{I}$ 所引发的暴涨 Y 概形同构于 Y (3.1.7)。

命题 (8.1.4) — 设 Y 是一个整概形。

(i) 对于 $\mathscr{R}(Y)$ 的任意一个满足 (8.1.1.2) 并且 $\mathscr{I}_0 = \mathscr{O}_Y$ 的拟凝聚分式理想层序列 $(\mathscr{I}_n)$，Y 概形 $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{I}_n)$ 都是整的，并且结构态射 $f : X \to Y$ 都是笼罩性的。

(ii) 设 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{R}(Y)$ 的一个拟凝聚分式理想层，并设 X 是 $\mathscr{I}$ 在 Y 上所引发的暴涨 Y 概形。若 $\mathscr{I} \neq 0$，则结构态射 $f : X \to Y$ 是双有理且映满的。

(i) 缘自 $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{I}_n$ 是整 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的事实 (3.1.12 和 3.1.14)，因为对任意 $y \in Y$，$\mathscr{O}_y$ 都是整环 (**I**, 5.1.4)。

(ii) 根据 (i)，X 是整的；进而若 x 和 y 是 X 和 Y 的一般点，则有 $f(x) = y$，我们需要证明 $\boldsymbol{k}(x)$ 在 $\boldsymbol{k}(y)$ 上是 1 秩的。然则，x 也是纤维 $f^{-1}(y)$ 的一般点；若 ψ 是典范态射 $Z \to Y$，其中 $Z = \mathrm{Spec}\,\boldsymbol{k}(y)$，则概形 $f^{-1}(y)$ 可以等同于 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}'$，其中 $\mathscr{S}' = \psi^*\mathscr{S}$ (3.5.3)。然而易见 $\mathscr{S}' = \bigoplus_{n\geqslant 0}(\mathscr{I}_y)^n$，且由于 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{R}(Y)$ 的一个非零的拟凝聚分式理想层，故知 $\mathscr{I}_y \neq 0$ (**I**, 7.3.6)，遂有 $\mathscr{I}_y = \boldsymbol{k}(y)$；从而 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}'$ 可以等同于 $\mathrm{Spec}\,\boldsymbol{k}(y)$ (3.1.7)，这就得出了结论。

我们将在 (**III**, 2.3.7) 中证明 (8.1.4) 的一个逆命题。

(8.1.5) 返回 (8.1.1) 中的记号和条件。根据定义，对每个 $k \in \mathbb{Z}$，诸含入同态 $\mathscr{I}_{n+1} \to \mathscr{I}_n$ (8.1.1.1) 都定义了分次 $\mathscr{S}$ 模层之间的一个 0 次单同态

(8.1.5.1)
$$u_k : \mathscr{S}_+(k+1) \longrightarrow \mathscr{S}(k) \quad 。$$

由于 $\mathscr{S}_+(k+1)$ 和 $\mathscr{S}(k+1)$ 是典范 (**TN**) 同构的，故知 u_k 典范地对应着 $\mathscr{O}_X$ 模层的一个单同态 (3.4.2)：

(8.1.5.2)
$$\widetilde{u_k} : \mathscr{O}_X(k+1) \longrightarrow \mathscr{O}_X(k) \quad 。$$

另一方面，还记得 (3.2.6) 我们有典范同态

(8.1.5.3)
$$\lambda : \mathscr{O}_X(h) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(k) \longrightarrow \mathscr{O}_X(h+k) \quad ,$$

并且图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{S}(h) \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{S}(k) \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{S}(l) & \longrightarrow & \mathscr{S}(h+k) \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{S}(l) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathscr{S}(h) \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{S}(k+l) & \longrightarrow & \mathscr{S}(h+k+l)
\end{array}$$

是交换的，故由 λ 的函子性 (3.2.6) 知，诸同态 (8.1.5.3) 在

(8.1.5.4) $$\mathscr{S}_X = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}_X(n)$$

上定义了一个拟凝聚分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层的结构。进而，图表

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}(h)\otimes_{\mathscr{S}}\mathscr{S}_+(k+1) \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes u_k"'] & \mathscr{S}_+(h+k+1) \arrow[d, "u_{h+k}"] \\
\mathscr{S}(h)\otimes_{\mathscr{S}}\mathscr{S}(k) \arrow[r] & \mathscr{S}(h+k)
\end{tikzcd}$$

是交换的；于是 λ 的函子性表明，我们有一个交换图表

(8.1.5.5) $$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X(h)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(k+1) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1\otimes\widetilde{u}_k"'] & \mathscr{O}_X(h+k+1) \arrow[d, "\widetilde{u}_{h+k}"] \\
\mathscr{O}_X(h)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(k) \arrow[r, "\lambda"'] & \mathscr{O}_X(h+k)
\end{tikzcd},$$

其中水平箭头都是典范同态。从而我们可以说，诸 $\widetilde{u_k}$ 定义了一个分次 $\mathscr{S}_X$ 代数层的单同态 (0 次)

(8.1.5.6) $$\widetilde{u} : \mathscr{S}_X(1) \longrightarrow \mathscr{S}_X \ 。$$

(8.1.6) 沿用 (8.1.5) 的记号，现在注意到对于 $n\geqslant 0$，合成同态 $\widetilde{v_n}=\widetilde{u}_{n-1}\circ\widetilde{u}_{n-2}\circ\cdots\circ\widetilde{u}_0$ 是一个单同态 $\mathscr{O}_X(n)\to\mathscr{O}_X$；我们把它的像记为 $\mathscr{I}_{n,X}$，从而它是 $\mathscr{O}_X$ 的一个拟凝聚理想层，并且同构于 $\mathscr{O}_X(n)$。进而，对任意 $m\geqslant 0,\ n\geqslant 0$，图表

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X(m)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(n) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\widetilde{v}_m\otimes\widetilde{v}_n"'] & \mathscr{O}_X(m+n) \arrow[d, "\widetilde{v}_{m+n}"] \\
\mathscr{O}_X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathscr{O}_X
\end{tikzcd}$$

都是交换的。由此推出下面的包含关系

(8.1.6.1) $$\mathscr{I}_{0,X} = \mathscr{O}_X\ ,\quad \mathscr{I}_{n,X}\subset\mathscr{I}_{m,X}\qquad \text{对于 } 0\leqslant m\leqslant n\ ,$$

(8.1.6.2) $$\mathscr{I}_{m,X}\mathscr{I}_{n,X}\subset\mathscr{I}_{m+n,X}\qquad \text{对于 } m\geqslant 0,\ n\geqslant 0\ 。$$

命题 (8.1.7) — 设 Y 是一个概形，$\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 的一个拟凝聚理想层，$X=\operatorname{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{I}^n)$ 是 $\mathscr{I}$ 所引发的暴涨 Y 概形。则对任意 $n\geqslant 0$，我们都有一个典范同构

(8.1.7.1) $$\mathscr{O}_X(n) \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}^n\mathscr{O}_X = \mathscr{I}_{n,X}$$

(参考 $(\mathbf{0}, 4.3.5)$)，因而对于 $n>0$，$\mathscr{I}^n\mathscr{O}_X$ 都是极丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

最后一个陈言是显然的，因为根据定义 (4.4.3 和 4.4.9)，$\mathscr{O}_X(1)$ 是可逆的 (3.2.5)，并且是 Y 极丰沛的。另一方面，根据定义，v_n 的像与 $\mathscr{I}^n\mathscr{S}$ 无异，从而 (8.1.7.1) 缘自函子 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 的正合性 (3.2.4) 以及公式 (3.2.4.1)。

推论 (8.1.8) — 在 (8.1.7) 的前提条件下，若 $f: X\to Y$ 是结构态射，Y' 是 Y 的由 $\mathscr{I}$ 所定义的闭子概形，则 X 的闭子概形 $X'=f^{-1}(Y')$ 是由 $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ (典范同构于 $\mathscr{O}_X(1)$) 所定义的，从而有一个典范的正合序列

(8.1.8.1)
$$0\longrightarrow \mathscr{O}_X(1)\longrightarrow \mathscr{O}_X\longrightarrow \mathscr{O}_{X'}\longrightarrow 0\ 。$$

这缘自 (8.1.7.1) 和 $(\mathbf{I}, 4.4.5)$。

(8.1.9) 在 (8.1.7) 的前提条件下，可以给 $\mathscr{I}_{n,X}$ 的结构作出一个更具体的描述。事实上，注意到同态

$$\widetilde{u}_{-1}\ :\ \mathscr{O}_X\longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)$$

典范对应着 $\mathscr{O}_X(-1)$ 的一个整体截面，我们称之为典范截面 (相对于 $\mathscr{I}$) $(\mathbf{0}, 5.1.1)$。另一方面，在图表 (8.1.5.5) 中，水平箭头都是同构 (3.2.7)；把该图表中的 h 换成 k 并把 k 换成 -1，则可以得到 $\widetilde{u_k}=1_k\otimes\widetilde{u}_{-1}$ (1_k 是指 $\mathscr{O}_Xh$ 上的恒同)，换句话说，同态 $\widetilde{u_k}$ 与使用典范截面 s 进行张量乘法的运算无异 (对任意 $k\in\mathbb{Z}$)。从而同态 $\widetilde{u}$ (8.1.5.6) 也可以有类似的解释。

因而对任意 $n\geqslant 0$，同态 $\widetilde{v_n}: \mathscr{O}_X(n)\to\mathscr{O}_X$ 都与使用 $s^{\otimes n}$ 进行张量乘法无异；由此可以导出：

推论 (8.1.10) — 在 (8.1.8) 的记号下，X' 的底空间就是由满足 $s(x)=0$ 的那些点 $x\in X$ 所组成的集合，这里 s 是指 $\mathscr{O}_X(-1)$ 的典范截面。

事实上，若 c_x 是点 x 处的茎条 $(\mathscr{O}_X(1))_x$ 的一个生成元，则 $s_x\otimes c_x$ 可以典范等同于 $\mathscr{I}_{1,X}$ 在点 x 处的茎条的一个生成元，从而它是可逆的当且仅当 $s_x\notin\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_X(-1))_x$，换句话说 $s(x)\neq 0$。

命题 (8.1.11) — 设 Y 是一个整概形，$\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{R}(Y)$ 的一个拟凝聚的分式理想层，X 是 $\mathscr{I}$ 所引发的暴涨 Y 概形。则 $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ 是 Y 极丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。

问题在 Y 上是局部性的，故可限于考虑 $Y=\operatorname{Spec}A$ 的情形，其中 A 是一个整环，分式域为 K，此时 $\mathscr{I}=\widetilde{\mathfrak{J}}$，其中 $\mathfrak{J}$ 是 K 的一个分式理想；因而可以找到 A 中的一个元素 $a\neq 0$，使得 $a\mathfrak{J}\subset A$。令 $S=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathfrak{J}^n$，则映射 $x\mapsto ax$ 是 $\mathfrak{J}^{n+1}=(S(1))_n$ 到 $a\mathfrak{J}^{n+1}=a\mathfrak{J}S_n\subset\mathfrak{J}^n=S_n$ 上的一个 A 同构，从而定义了分次 S 模的一

个 0 次 (TN) 同构 $S_+(1) \to a\mathfrak{J}S$ 。此外，$x \mapsto a^{-1}x$ 也是分次 S 模的一个 0 次同构 $a\mathfrak{J}S \xrightarrow{\sim} \mathfrak{J}S$ 。从而通过合成 (3.2.4) 可以得到一个 $\mathscr{O}_X$ 模层同构 $\mathscr{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}\mathscr{O}_X$ ，且由于 S 是由 $S_1 = \mathfrak{J}$ 所生成的，故知 $\mathscr{O}_X(1)$ 是可逆的 (3.2.5)，并且是极丰沛的 (4.4.3 和 4.4.9)，遂得到了我们的陈言。

8.2 关于分次环的局部化的一些预备知识

(8.2.1) 设 S 是一个分次环，我们现在不假设它是正次数的。令

(8.2.1.1)
$$S^{\geqslant} = \bigoplus_{n\geqslant 0} S_n , \qquad S^{\leqslant} = \bigoplus_{n\leqslant 0} S_n ,$$

它们都是 S 的分次子环，其次数分别是全正和全负的。若 f 是 S 的一个 d 次 (正或负) 齐次元，则分式环 $S_f = S'$ 也具有一个分次环的结构，只要令 S'_n $(n \in \mathbb{Z})$ 就是这样一些 x/f^k 所组成的集合，其中 $x \in S_{n+kd}$ $(k \geqslant 0)$；我们仍然令 $S_{(f)} = S'_0$，并且把 $S'^{\geqslant}$ 和 $S'^{\leqslant}$ 分别记作 $S_f^{\geqslant}$ 和 $S_f^{\leqslant}$ 。若 $d > 0$，则有

(8.2.1.2)
$$(S^{\geqslant})_f = S_f ,$$

因为若 $x \in S_{n+kd}$，其中 $n+kd < 0$，则有 $x/f^k = xf^h/f^{h+k}$，并且对充分大的 $h > 0$，总有 $n+(h+k)d > 0$ 。于是由定义知

(8.2.1.3)
$$(S^{\geqslant})_{(f)} = (S_f^{\geqslant})_0 = S_{(f)} \ 。$$

若 M 是一个分次 S 模，则我们同样令

(8.2.1.4)
$$M^{\geqslant} = \bigoplus_{n\geqslant 0} M_n , \qquad M^{\leqslant} = \bigoplus_{n\leqslant 0} M_n ,$$

它们分别是分次 $S^{\geqslant}$ 模和分次 $S^{\leqslant}$ 模，并且它们的交集是 S_0 模 M_0 。若 $f \in S_d$，则仍然可以把 M_f 定义为一个分次 S_f 模，只要把 n 次元规定为形如 z/f^k 的元素，其中 $z \in M_{n+kd}$ $(k \geqslant 0)$；我们用 $M_{(f)}$ 来标记 M_f 中的全体零次元的集合，它是一个 $S_{(f)}$ 模，我们再分别用 $M_f^{\geqslant}$ 和 $M_f^{\leqslant}$ 来标记 $(M_f)^{\geqslant}$ 和 $(M_f)^{\leqslant}$ 。若 $d > 0$，则与上面相同，我们有

(8.2.1.5)
$$(M^{\geqslant})_f = M_f ,$$

和

(8.2.1.6)
$$(M^{\geqslant})_{(f)} = (M_f^{\geqslant})_0 = M_{(f)} \ 。$$

(8.2.2) 设 $\mathbf{z}$ 是一个未定元，我们把它称为齐次化变元 (variable d'homogénisation)。若 S 是一个分次环 (具有正或负的次数)，则多项式代数[①]

$$\widehat{S} = S[\mathbf{z}] \tag{8.2.2.1}$$

是一个分次 S 代数，其中的分次是这样定义的：若 f 是一个齐次元，则定义 $f\mathbf{z}^n$ $(n \geqslant 0)$ 的次数是

$$\deg(f\mathbf{z}^n) = n + \deg f \quad 。\tag{8.2.2.2}$$

引理 (8.2.3) — (i) 我们有 (非分次) 环的典范同构

$$\widehat{S}_{(\mathbf{z})} \xrightarrow{\sim} \widehat{S}/(\mathbf{z}-1)\widehat{S} \xrightarrow{\sim} S \quad 。\tag{8.2.3.1}$$

(ii) 对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，我们都有 (非分次) 环的一个典范同构

$$\widehat{S}_{(f)} \xrightarrow{\sim} S_f^{\leqslant} \quad 。\tag{8.2.3.2}$$

(8.2.3.1) 的第一个同构是在 (2.2.5) 中所定义的，第二个同构是显然的；从而这个同构 $\widehat{S}_{(\mathbf{z})} \xrightarrow{\sim} S$ 把 $x\mathbf{z}^n/\mathbf{z}^{n+k}$ (其中 $\deg(x) = k$ $(k \geqslant -n)$) 映到元素 x。同态 (8.2.3.2) 把 $x\mathbf{z}^n/f^k$ (其中 $\deg(x) = kd - n$) 映到元素 x/f^k，它是 $S_f^{\leqslant}$ 中的 $-n$ 次元，并且易见这是一个同构。

(8.2.4) 设 M 是一个分次 S 模。易见 S 模

$$\widehat{M} = M \otimes_S \widehat{S} = M \otimes_S S[\mathbf{z}] \tag{8.2.4.1}$$

是诸 S 模 $M \otimes S\mathbf{z}^n$ 的直和，从而是诸 Abel 群 $M_k \otimes S\mathbf{z}^n$ $(k \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0)$ 的直和；我们在 $\widehat{M}$ 上定义一个分次 $\widehat{S}$ 模的结构如下：对于 M 的任意齐次元 x，令

$$\deg(x \otimes \mathbf{z}^n) = n + \deg x \quad 。\tag{8.2.4.2}$$

我们把下述命题的证明留给读者 (类似于 (8.2.3))

引理 (8.2.5) — (i) 我们有 (非分次) 模的一个典范双重同构

$$\widehat{M}_{(\mathbf{z})} \xrightarrow{\sim} M \quad 。\tag{8.2.5.1}$$

(ii) 对任意 $f \in S_d$ $(d > 0)$，我们都有 (非分次) 模的一个典范双重同构

$$\widehat{M}_{(f)} \xrightarrow{\sim} M_f^{\leqslant} \quad 。\tag{8.2.5.2}$$

[①] 这里的记号 $\widehat{S}$ 不是环的分离完备化。

(8.2.6) 设 S 是一个正分次环，考虑 S 的分次理想的递减序列

(8.2.6.1) $$S_{[n]} = \bigoplus_{m\geqslant n} S_m \qquad (n\geqslant 0)$$

（特别的，我们有 $S_{[0]}=S,\ S_{[1]}=S_+$ ）。易见 $S_{[m]}S_{[n]}\subset S_{[m+n]}$，从而可以定义一个分次环 $S^\natural$ 如下：

(8.2.6.2) $$S^\natural = \bigoplus_{n\geqslant 0} S_n^\natural \qquad 其中 \qquad S_n^\natural = S_{[n]} \ 。$$

从而 $S_0^\natural$ 就是作为非分次环的 S，并且 $S^\natural$ 是一个 $S_0^\natural$ 代数。对任意齐次元 $f\in S_d$ $(d>0)$，我们用 $f^\natural$ 来标记作为 $S_{[d]}=S_d^\natural$ 中元素的 f。在这些记号下：

引理 (8.2.7) — 设 S 是一个正分次环，f 是 S_d $(d>0)$ 中的一个齐次元。则我们有环的典范同构

(8.2.7.1) $$S_f \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S(n)_{(f)} \ ,$$

(8.2.7.2) $$(S_f^{\geqslant})_{f/1} \xrightarrow{\sim} S_f \ ,$$

(8.2.7.3) $$S^\natural_{(f^\natural)} \xrightarrow{\sim} S_f^{\geqslant} \ ,$$

并且前两个都是分次环的同构。

根据定义，易见 $(S_f)_n=(S(n)_f)_0$，故得同构 (8.2.7.1)，且它与恒同无异。另一方面，由于 $f/1$ 在 S_f 中是可逆的，故有一个典范同构 $S_f\xrightarrow{\sim}(S_f^{\geqslant})_{f/1}=(S_f)_{f/1}$，这是依据 (8.2.1.2)（应用到 S_f 上）；根据定义，它的逆同构就是 (8.2.7.2)。最后，若 $x=\sum_{m\geqslant n} y_m$ 是 $S_{[n]}$ 中的一个元素，且 $n=kd$，则我们把元素 $x/(f^\natural)^k$ 对应到 $S_f^{\geqslant}$ 的元素 $\sum_m y_m$，易见这就定义了一个同构 (8.2.7.3)。

(8.2.8) 若 M 是一个分次 S 模，则对任意 $n\in\mathbb{Z}$，我们同样令

(8.2.8.1) $$M_{[n]} = \bigoplus_{m\geqslant n} S_m \ 。$$

且由于 $S_{[m]}M_{[n]}\subset M_{[m+n]}$ $(m\geqslant 0)$，故可定义一个分次 $S^\natural$ 模 $M^\natural$ 如下：

(8.2.8.2) $$M^\natural = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n^\natural \qquad 其中 \qquad M_n^\natural = M_{[n]} \ 。$$

我们把下述引理的证明留给读者：

引理 (8.2.9) — 在 (8.2.6) 和 (8.2.7) 的记号下，我们有模的典范双重同构

(8.2.9.1)
$$M_f \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M(n)_{(f)} \ ,$$

(8.2.9.2)
$$(M_f^{\geqslant})_{f/1} \xrightarrow{\sim} M_f \ ,$$

(8.2.9.3)
$$M^{\natural}_{(f^{\natural})} \xrightarrow{\sim} M_f^{\geqslant} \ ,$$

并且前两个都是分次模的双重同构。

引理 (8.2.10) — 设 S 是一个正分次环。

(i) 为了使 $S^{\natural}$ 是一个有限型 (相应的，*Noether*) $S_0^{\natural}$ 代数，必须且只需 S 是一个有限型 (相应的，*Noether*) S_0 代数。

(ii) 为了使 $S^{\natural}_{n+1}=S^{\natural}_1 S^{\natural}_n$ 当 $n\geqslant n_0$ 时成立，必须且只需 $S_{n+1}=S_1 S_n$ 当 $n\geqslant n_0$ 时成立。

(iii) 为了使 $S^{\natural}_n=S_1^{\natural n}$ 当 $n\geqslant n_0$ 时成立，必须且只需 $S_n=S_1^n$ 当 $n\geqslant n_0$ 时成立。

(iv) 若 (f_α) 是由 S_+ 中的一组齐次元所组成的集合，且这些 f_α 所生成的理想在 S_+ 中的根等于 S_+，则由诸 $f_\alpha^{\natural}$ 所生成的理想在 $S_+^{\natural}$ 中的根等于 $S_+^{\natural}$。

(i)若 $S^{\natural}$ 是一个有限型 $S_0^{\natural}$ 代数，则根据 (2.1.6, (i))，$S_+=S_1^{\natural}$ 是 $S=S_0^{\natural}$ 上的一个有限型模，从而 S 是一个有限型 S_0 代数 (2.1.4)；若 $S^{\natural}$ 是Noether的，则 $S_0^{\natural}=S$ 也是如此 (2.1.5)。反过来，若 S 是一个有限型 S_0 代数，则我们知道 (2.1.6, (ii))，存在 $h>0$ 和 $m_0>0$，使得当 $n\geqslant m_0$ 时总有 $S_{n+h}=S_hS_n$；显然可以假设 $m_0\geqslant h$。进而，诸 S_m 都是有限型 S_0 模 (2.1.6, (i))。据此，若 $n\geqslant m_0+h$，则有 $S^{\natural}_n=S_hS^{\natural}_{n-h}=S^{\natural}_hS^{\natural}_{n-h}$；且若 $m<m_0+h$，并且令 $E=S_{m_0}+\cdots+S_{m_0+h-1}$，则有 $S^{\natural}_m=S_m+\cdots+S_{m_0+h-1}+S_hE+S_h^2E+\ldots$。对于 $1\leqslant m\leqslant m_0$，设 G_m 是诸 S_0 模 S_i $(m\leqslant i\leqslant m_0+h-1)$ 的有限生成元组的并集，并把它看作是 $S_{[m]}$ 的子集。对于 $m_0+1\leqslant m\leqslant m_0+h-1$，同样设 G_m 是诸 S_0 模 S_i $(m\leqslant i\leqslant m_0+h-1)$ 和 S_hE 的有限生成元组的并集，且看作是 $S_{[m]}$ 的子集。易见对于 $1\leqslant m\leqslant m_0+h-1$ 均有 $S^{\natural}_m=S^{\natural}_0G_m$，从而诸 G_m $(1\leqslant m\leqslant m_0+h-1)$ 的并集 G 就是 $S_0^{\natural}$ 代数 $S^{\natural}$ 的一个生成元组。由此可知，若 $S=S_0^{\natural}$ 是一个Noether环，则 $S^{\natural}$ 也是如此。

(ii) 易见若对于 $n\geqslant n_0$ 有 $S_{n+1}=S_1S_n$，则对于 $n\geqslant n_0$ 也有 $S^{\natural}_{n+1}=S_1S^{\natural}_n$，当然就有 $S^{\natural}_{n+1}=S^{\natural}_1S^{\natural}_n$。反过来，后面这个关系式可以写成

$$S_{n+1}+S_{n+2}+\ldots\ =\ (S_1+S_2+\ldots)(S_n+S_{n+1}+\ldots)\ 。$$

比较等式两边的 $n+1$ 次项 (在 S 中)，可以给出 $S_{n+1}=S_1S_n$。

(iii) 若当 $n\geqslant n_0$ 时 $S_n=S_1^n$，则有 $S^{\natural}_n=S_1^n+S_1^{n+1}+\ldots$；由于 $S_1^{\natural}$ 包含 $S_1+S_1^2+\ldots$，故有 $S^{\natural}_n\subset S_1^{\natural n}$，因而当 $n\geqslant n_0$ 时 $S^{\natural}_n=S_1^{\natural n}$。反过来，$S_1^{\natural n}=(S_1+S_2+\ldots)^n$ 中的 n 次 (在 S 中) 项只有 S_1^n；从而关系式 $S^{\natural}_n=S_1^{\natural n}$ 蕴涵 $S_n=S_1^n$。

(iv) 只需证明若把一个元素 $g \in S_{k+h}$ 看作是 $S_k^\natural$ $(k>0,\ h \geqslant 0)$ 中的元素，则存在一个整数 $n>0$，使得在 $S_{kn}^\natural$ 中 g^n 是诸 $f_\alpha^\natural$ 的一个 $S^\natural$ 系数线性组合。根据前提条件，存在一个整数 m_0，使得当 $m \geqslant m_0$ 时，在 S 中总有 $g^m = \sum\limits_\alpha c_{\alpha m} f_\alpha$，并且在这个公式中出现的那些指标 α 不依赖于 m；进而，显然可以假设诸 $c_{\alpha m}$ 都是齐次的，则在 S 中

$$\deg(c_{\alpha m}) \;=\; m(k+h) - \deg f_\alpha \quad 。$$

现在取一个充分大的 m_0，使得 $km_0 > \deg f_\alpha$ 对于 g^{m_0} 的表达式中所出现的 f_α 都成立；对任意 α，设 $c'_{\alpha m}$ 就是元素 $c_{\alpha m}$，但被看作是 $S^\natural$ 中的 $km = \deg(f_\alpha)$ 次元；则在 $S^\natural$ 中我们有 $g^m = \sum\limits_\alpha c'_{\alpha m} f_\alpha^\natural$，这就完成了证明。

(8.2.11) 考虑分次 S_0 代数

(8.2.11.1) $$S^\natural \otimes_S S_0 \;=\; S^\natural / S_+ S^\natural \;=\; \bigoplus_{n \geqslant 0} S_{[n]} / S_+ S_{[n]} \quad 。$$

由于 S_n 是 $S_{[n]}/S_+S_{[n]}$ 的一个 S_0 商模，故我们有一个分次 S_0 代数的典范同态

(8.2.11.2) $$S^\natural \otimes_S S_0 \;\longrightarrow\; S \quad 。$$

它显然是满的，因而对应着 (2.9.2) 一个典范闭浸入

(8.2.11.3) $$\operatorname{Proj} S \;\longrightarrow\; \operatorname{Proj}(S^\natural \otimes_S S_0) \quad 。$$

命题 (8.2.12) — *典范态射 (8.2.11.3) 是一一的。为了使同态 (8.2.11.2) 是 (TN) 一一的，必须且只需存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时均有 $S_{n+1} = S_1 S_n$。若后面这个条件得到满足，则 (8.2.11.3) 是一个同构；如果 S 是 Noether 的，则逆命题也成立。*

为了证明第一个陈言，只需 (2.8.3) 证明同态 (8.2.11.2) 的核 $\mathfrak{J}$ 是由幂零元所组成的。然则，若 $s \in S_{[n]}$，并且它的 mod $S_+S_{[n]}$ 同余类落在这个核之中，则有 $f \in S_{[n+1]}$；于是若把元素 f^{n+1} 看作是 $S_{[n(n+1)]}$ 中的元素，则它属于 $S_+S_{[n(n+1)]}$，因为它可以写成 $f.f^n$；从而 f^{n+1} mod $S_+S_{[n(n+1)]}$ 的同余类是 0，这就证明了我们的陈言。由于当 $n \geqslant n_0$ 时 $S_{n+1} = S_1 S_n$ 的前提条件等价于当 $n \geqslant n_0$ 时 $S_{n+1}^\natural = S_1^\natural S_n^\natural$ (8.2.10, (ii))，故而根据定义，这个条件等价于 (8.2.11.2) 是 (TN) 单的，从而是 (TN) 一一的，此时依照 (2.9.1)，(8.2.11.3) 是一个同构。反过来，若 (8.2.11.3) 是一个同构，则 $\operatorname{Proj}(\S^\natural \otimes_S S_0)$ 上的层 $\widetilde{\mathfrak{J}}$ 是 0 (2.9.1, (i))；由于 $\S^\natural \otimes_S S_0$ 作为 $S^\natural$ 的商 (8.1.10, (i)) 是 Noether 的，故由 (2.7.3) 知，$\mathfrak{J}$ 满足条件 (TN)，从而当 $n \geqslant n_0$ 时 $S_{n+1}^\natural = S_1^\natural S_n^\natural$，依照 (8.2.10, (ii))，这就完成了证明。

(8.2.13) 现在考虑典范含入 $(S_+)^n \to S_{[n]}$，它定义了分次环的一个 0 次单同态

(8.2.13.1) $$\bigoplus_{n \geqslant 0} (S_+)^n \;\longrightarrow\; S^\natural \quad 。$$

命题 (8.2.14) — 为了使同态 (8.2.13.1) 是一个 (TN) 同构，必须且只需存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时总有 $S_n = S_1^n$。如果该条件得到满足，则与 (8.2.13.1) 相对应的态射是处处有定义的，并且是一个同构

$$\operatorname{Proj} S^{\natural} \longrightarrow \operatorname{Proj}\Big(\bigoplus_{n\geqslant 0}(S_+)^n\Big) 。$$

如果 S 是 Noether 的，则逆命题也成立。

依据 (8.2.10, (iii)) 和 (2.9.1)，前两个陈言是明显的。第三个陈言缘自 (8.2.10, (i) 和 (iii)) 以及下面的引理：

引理 (8.2.14.1) — 设 T 是一个正分次环，并且是一个有限型 T_0 代数。若单同态 $\bigoplus_{n\geqslant 0} T_1^n \to T$ 所对应的态射是处处有定义的，并且是一个同构 $\operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj}\big(\bigoplus_{n\geqslant 0} T_1^n\big)$，则存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时总有 $T_n = T_1^n$。

事实上，设 g_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 是 T_0 模 T_1 的生成元。则前提条件表明，诸 $D_+(g_i)$ 可以覆盖 $\operatorname{Proj} T$ (2.8.1)。设 $(h_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ 是 T_+ 中的一组齐次元，其中 $\deg(h_j) = n_j$，并且它们和那些 g_i 一起构成理想 T_+ 的一个生成元组，或 (等价的 (2.1.3)) T_0 代数 T 的一个生成元组；若令 $T' = \bigoplus_{n\geqslant 0} T_1^n$，则根据前提条件，环 $T_{(g_i)}$ 中的元素 $h_j/g_i^{n_j}$ 应该要属于子环 $T'_{(g_i)}$，从而存在一个整数 k，使得对所有 j 都有 $T_1^k h_j \subset T_1^{k+n_j}$。由此通过对 r 进行归纳可以得知，对任意 $r \geqslant 1$ 均有 $T_1^k h_j^r \subset T'$，从而根据 h_j 的定义，我们有 $T_1^k T \subset T'$。另一方面，对任意 j，均可找到一个整数 m_j，使得 $h_j^{m_j}$ 落在 T 的由诸 g_i 所生成的理想之中 (2.3.14)，从而 $h_j^{m_j} \in T_1 T$，且 $h^{m_j k} \in T_1^k T \subset T'$。因而存在一个整数 $m_0 \geqslant k$，使得当 $m \geqslant m_0$ 时总有 $h_j^m \in T_1^{mn_j}$。据此，若 q 是诸整数 n_j 中的最大者，则整数 $n_0 = qsm_0 + k$ 就是满足我们的要求。事实上，对于 $n \geqslant n_0$，S_n 中的元素总是 $T_1^\alpha u$ 中的一些单项式之和，其中 u 是诸 h_j 的一个幂积；若 $\alpha \geqslant k$，则由上面所述知 $T_1^\alpha u \subset T_1^n$；若 $\alpha < k$，则至少有一个 h_j 的指数 $\geqslant m_0$，从而 $u \in T_1^\beta v$，其中 $\beta \geqslant k$ 并且 v 仍然是诸 h_j 的一个幂积；于是问题归结到前一种情形，从而我们看到在任何情况下均有 $T_1^\alpha u \subset T_1^n$。

注解 (8.2.15) — 条件当 $n \geqslant n_0$ 时 $S_n = S_1^n$ 显然可以推出当 $n \geqslant n_0$ 时 $S_{n+1} = S_1 S_n$，但是逆命题是不对的，即使假设 S 是 Noether 的。举例来说，设 K 是一个域，$A = K[\mathbf{x}]$, $B = K[\mathbf{y}]/\mathbf{y}^2 K[\mathbf{y}]$，其中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是两个未定元，$\mathbf{x}$ 是 1 次的，$\mathbf{y}$ 是 2 次的，并设 $S = A \otimes_K B$，于是 S 是 K 上的一个分次代数，并且元素 1, $\mathbf{x}^n$ $(n \geqslant 1)$, $\mathbf{x}^n\mathbf{y}$ $(n \geqslant 0)$ 构成它的一个基底。易见当 $n \geqslant 2$ 时 $S_{n+1} = S_1 S_n$，然而当 $n \geqslant 2$ 时 $S_1^n = K\mathbf{x}^n$, $S_n = K\mathbf{x}^n + K\mathbf{x}^{n-2}\mathbf{y}$。

8.3 投影锥

(8.3.1) 设 Y 是一个概形；在这一小节中，我们只考虑 Y 概形和 Y 态射。设 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层；我们进而假设 $\mathscr{S}_0 = \mathscr{O}_Y$ 。与 (8.2.2) 中的记号相适应，我们令

$$\widehat{\mathscr{S}} = \mathscr{S}[\mathbf{z}] = \mathscr{S} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_Y[\mathbf{z}] , \tag{8.3.1.1}$$

并且把它看作是一个正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，其次数由公式 (8.2.2.2) 定义，于是对于 Y 的任意仿射开集 U ，均有

$$\Gamma(U, \widehat{\mathscr{S}}) = (\Gamma(U, \mathscr{S})[\mathbf{z}]) 。$$

在下面的内容中，我们令

$$X = \operatorname{Proj} \mathscr{S} , \quad C = \operatorname{Spec} \mathscr{S} , \quad \widehat{C} = \operatorname{Proj} \widehat{\mathscr{S}} \tag{6.3.1.2}$$

（在 C 的定义中，$\mathscr{S}$ 被看作是一个不分次的 $\mathscr{O}_Y$ 代数层），我们把 C（相应的，$\widehat{C}$）称为由 $\mathscr{S}$ 所定义的仿射锥（相应的，射影锥）；通常也把“仿射锥”简称为“锥”(cône)。适当混用一下术语，我们也把 C（相应的，$\widehat{C}$）称为 X 的仿射投影锥（相应的，X 的射影投影锥），这里已假定了 X 具有 $\operatorname{Proj} \mathscr{S}$ 的形状；最后，我们把 $\widehat{C}$ 称为 C 的射影闭包（在 C 的结构中已经事先指定了 $\mathscr{S}$ ）。

命题 (8.3.2) — 我们有典范 Y 态射

$$Y \xrightarrow{\varepsilon} C \xrightarrow{i} \widehat{C} , \tag{8.3.2.1}$$

$$X \xrightarrow{j} \widehat{C} , \tag{8.3.2.2}$$

其中 ε 和 j 都是闭浸入，i 是一个仿射态射，并且是一个笼罩性开浸入，它们满足

$$i(C) = \widehat{C} - j(X) , \tag{8.3.2.3}$$

进而 $\widehat{C}$ 是能够遮蔽 $i(C)$ 的最小闭子概形。

为了定义 i，考虑 $\widehat{C}$ 的开集

$$\widehat{C}_{\mathbf{z}} = \operatorname{Spec}\Big(\widehat{\mathscr{S}} \Big/ (\mathbf{z}-1)\widehat{\mathscr{S}}\Big) \tag{8.2.3.4}$$

(3.1.4)，其中 $\mathbf{z}$ 可以典范等同于 $\widehat{\mathscr{S}}$ 在 Y 上的一个截面。于是同构 $i : C \xrightarrow{\sim} \widehat{C}_{\mathbf{z}}$ 对应着典范同构 (8.2.3.1)

$$\widehat{\mathscr{S}} \Big/ (\mathbf{z}-1)\widehat{\mathscr{S}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S} 。$$

态射 ε 对应着增殖同态 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}_0 = \mathscr{O}_Y$，它的核是 $\mathscr{S}_+$ (1.2.7)，且由于该同态是满的，故知 ε 是一个闭浸入 (1.4.10)。最后，j 同样对应着 (3.5.1) 0 次满同态 $\widehat{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$，它在 $\mathscr{S}$ 上的限制是恒同，且在 $\mathbf{z}\widehat{CS}$ 上的限制是 0，后者就是它的核；依照 (3.6.2)，j 是处处有定义的，并且是一个闭浸入。

为了证明 (8.3.2) 的其余陈言，显然可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 S 是一个分次 A 代数，故有 $\widehat{CS} = (\widehat{S})^{\sim}$；于是 S_+ 中的齐次元 f 可以等同于 $\widehat{\mathscr{S}}$ 在 Y 上的截面，并且 $\widehat{C}$ 的开集 $D_+(f)$ (2.3.3) 也可以写成 $\widehat{C}_f$ (3.1.4)；同样的，C 的开集 $D(f)$ (**I**, 1.1.1) 也可以写成 C_f (**0**, 5.5.2)。据此，由 (2.3.14) 以及 $\widehat{S}$ 的定义知，在上述情形下，开集 $\widehat{C}_{\mathbf{z}} = i(C)$ 和诸 $\widehat{C}_f$（f 是 S_+ 中的齐次元）构成 $\widehat{C}$ 的一个覆盖。进而，在这些记号下，我们有

$$\textbf{(8.3.2.5)} \qquad i^{-1}(\widehat{C}_f) = C_f \ 。$$

事实上，$\widehat{C}_f \cap i(C) = \widehat{C}_f \cap \widehat{C}_{\mathbf{z}} = \widehat{C}_{f\mathbf{z}} = \operatorname{Spec} \widehat{S}_{f\mathbf{z}}$。然则，若 $d = \deg(f)$，则 $\widehat{S}_{f\mathbf{z}}$ 可以典范同构于 $(\widehat{S}_{(\mathbf{z})})_{f/\mathbf{z}^d}$ (2.2.2)，并且由同构 (8.2.3.1) 的定义知，$(\widehat{S}_{(\mathbf{z})})_{f/\mathbf{z}^d}$ 在对应的分式环同构下的像恰好就是 S_f。由于 $C_f = \operatorname{Spec} S_f$，这就证明了 (8.3.2.5)，同时也证明了态射 i 是仿射的；进而，如果把 i 在 C_f 上的限制看作是映到 $\widehat{C}_f$ 的态射，则它对应着 (**I**, 1.7.3) 典范同态 $\widehat{S}_{(f)} \to \widehat{S}_{(f\mathbf{z})}$，并且依照上面所述和 (8.2.3.2)，我们可以给出下面的结果：

(8.3.2.6) *若 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，并且 $\mathscr{S} = \widehat{S}$，则对于 S_+ 中的任意齐次元 f，$\widehat{C}_f$ 都可以典范等同于 $\operatorname{Spec} S_f^{\leqslant}$，并且 i 的限制态射 $C_f \to \widehat{C}_f$ 对应着典范含入 $S_f^{\leqslant} \to S_f$。*

现在注意到根据定义（对于仿射的 Y）$\widehat{C}_{\mathbf{z}}$ 在 $\widehat{C} = \operatorname{Proj} \widehat{S}$ 中的补集就是 $\widehat{S}$ 的所有包含 $\mathbf{z}$ 的分次素理想的集合，也就是说 $j(X)$（根据 j 的定义），这就证明了 (8.3.2.3)。

最后，为了证明 (8.3.2) 的最后一个陈言，仍然可以假设 Y 是仿射的。在上述记号下，注意到 $\mathbf{z}$ 在环 $\widehat{S}$ 中不是零因子；由于 $i(C) = \widehat{C}$，故只需证明

引理 (8.3.2.7) — *设 T 是一个正分次环，$Z = \operatorname{Proj} T$，$g$ 是 T 中的一个次数 $d > 0$ 的齐次元。若 g 在 T 中不是零因子，则 Z 是遮蔽 $Z_g = D_+(g)$ 的最小闭子概形。*

依照 (**I**, 4.1.9)，问题在 Z 上是局部性的；从而只需证明对任意齐次元 $h \in T_e$ $(e > 0)$，Z_h 都是 Z_h 的遮蔽 Z_{gh} 的最小闭子概形；由定义和 (**I**, 4.3.2) 知，这个条件等价于典范同态 $T_{(h)} \to T_{(gh)}$ 是单的。然则，该同态可以等同于典范同态 $T_{(h)} \to (T_{(h)})_{g^e/h^d}$ (2.2.3)。而由于 g^e 不是 T 中的零因子，故知 g^e/h^d 不是 T_h 中的零因子（当然也不是 $T_{(h)}$ 中的零因子），因为在 T_h 中，由关系式 $(g^e/h^d)(t/h^m) = 0$ $(t \in T, m > 0)$ 可以推出存在一个 $n > 0$ 使得 $h^n g^e t = 0$，故有 $h^n t = 0$，因而 $t/h^m = 0$；这就完成了证明 (**0**, 1.2.2)。

(8.3.3) 我们总是 (藉由开浸入 i) 把仿射锥 C 等同于射影锥 $\widehat{C}$ 在它的开集 $i(C)$ 上诱导的子概形。C 的附随于闭浸入 ε 的闭子概形则被称为 C 的顶点概形 (sommet)；同时 ε (作为 C 的一个 Y 截面) 也被称为 C 的顶点截面或零截面；于是可以藉由 ε 把 Y 等同于 C 的顶点概形。此外 $i\circ\varepsilon$ 是 $\widehat{C}$ 的一个 Y 截面，从而也是一个闭浸入 (**I**, 5.4.6)，它对应着 0 次典范满同态 $\widehat{\mathscr{S}}=\mathscr{S}[\mathbf{z}]\to\mathscr{O}_Y[\mathbf{z}]$ (参考 (3.1.7))，核是 $\mathscr{S}_+[\mathbf{z}]=\widehat{\mathscr{S}_+\mathscr{S}}$；$\widehat{C}$ 的附随于这个闭浸入的子概形也被称为 $\widehat{C}$ 的顶点概形，并且 $i\circ\varepsilon$ 被称为 $\widehat{C}$ 的顶点截面；顶点概形可以藉由 $i\circ\varepsilon$ 等同于 Y 。最后，$\widehat{C}$ 的附随于 j 的闭子概形将被称为 $\widehat{C}$ 的无穷远沟 (lieu à l'infini)，它可以藉由 j 等同于 X 。

(8.3.4) C (相应的，$\widehat{C}$) 在它的开集

$$E = C = \varepsilon(Y) \qquad (\text{相应的，} \widehat{E} = \widehat{C}-i(\varepsilon(Y))) \tag{8.3.4.1}$$

上诱导的子概形 (适当混用一下术语) 将被称为由 $\mathscr{S}$ 所定义的去顶仿射锥 (cône affine épointé) (相应的，去顶射影锥)；注意到尽管使用这样的名称，但 E 在 Y 上未必是仿射的，同样的，$\widehat{E}$ 在 Y 上也未必是射影的 (参考 (8.4.3))。从而如果把 C 等同于 $i(C)$，则在底空间上有

$$C\cup\widehat{E} = \widehat{C}\ , \qquad C\cap\widehat{E} = E\ , \tag{8.4.3.2}$$

从而可以把 $\widehat{C}$ 看作是由开子概形 C 和 $\widehat{E}$ 黏合而成的；进而依照 (8.3.2.3)，

$$E = \widehat{E}-j(X)\ 。 \tag{8.3.4.3}$$

如果 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，则在 (8.3.2) 的记号下，我们有

$$E = \bigcup C_f\ , \qquad \widehat{E} = \bigcup \widehat{C}_f\ , \qquad C_f = C\bigcap \widehat{C}_f\ , \tag{8.3.4.4}$$

其中 f 跑遍 S_+ 中的齐次元的集合 (或者该集合的一个子集 M，只要它所生成的理想在 S_+ 中的根就是 S_+ 自己，换句话说，诸 X_f $(f\in M)$ 可以覆盖 X (2.3.14))。此时 C 和 $\widehat{C}_f$ 沿着 C_f 的黏合是由含入态射 $C_f\to C,\ C_f\to\widehat{C_f}$ 所确定的，根据 (8.3.2.6)，这些含入态射又分别对应着典范同态 $S\to S_f,\ S_f^{\leqslant}\to S_f$ 。

命题 (8.3.5) — 在 (8.3.1) 和 (8.3.4) 的记号下，典范含入 $\varphi:\mathscr{S}\to\widehat{\mathscr{S}}=\mathscr{S}[\mathbf{z}]$ 所附随 (3.5.1) 的态射是一个映满的仿射态射 (称为典范收缩 (rétraction))

$$p\ :\ \widehat{E}\longrightarrow X\ , \tag{8.3.5.1}$$

且满足

$$p\circ j = 1_X\ 。 \tag{8.3.5.2}$$

为了证明这个命题，可以限于考虑Y是仿射的这个情形。有见于$\widehat{E}$的表达式(8.3.4.4)，p的定义域$G(\varphi)$等于$\widehat{E}$的事实缘自下面的第一个陈言：

(8.3.5.3) 若$Y = \operatorname{Spec} A$是仿射的，并且$\mathscr{S} = \widetilde{S}$，则对任意齐次元$f \in S_+$，均有

(8.3.5.4) $$p^{-1}(X_f) \;=\; \widehat{C}_f\,,$$

并且若把p在$\widehat{C}_f \;=\; \operatorname{Spec} S_f^{\leqslant}$上的限制看作是$\widehat{C}_f$到$X_f$的态射，则它对应着典范含入$S_{(f)} \to S_f^{\leqslant}$。进而若$f \in S_1$，则$\widehat{C}_f$同构于$X_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]$（$T$是未定元）。

事实上，公式(8.3.5.4)是(2.8.1.1)的一个特殊情形，并且第二个陈言当Y是仿射概形时与$\operatorname{Proj}(\varphi)$的定义无异(2.8.1)。于是公式(8.3.5.2)以及p是映满的这件事都是缘自下面的事实：典范同态的合成$\mathscr{S} \to \widehat{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$就是$\mathscr{S}$上的恒同。最后，对于$f \in S_1$，(8.3.5.3)的最后一个陈言来自$S_f^{\leqslant}$同构于$S_{(f)}[T]$这个事实(2.2.1)。

推论 (8.3.6) — p在E上的限制

(8.3.6.1) $$\pi \;:\; E \;\longrightarrow\; X$$

是一个映满的仿射态射。若Y是仿射的，且f在S_+中是齐次的，则有

(8.3.6.2) $$\pi^{-1}(X_f) \;=\; C_f\,,$$

并且π在C_f上的限制对应着典范含入$S_{(f)} \to S_f$。进而若$f \in S_1$，则C_f同构于$X_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$（$T$是未定元）。

公式(8.3.6.2)可由(8.3.5.3)和(8.3.2.5)立得，并且也证明了π是映满的；此外，我们看到浸入i在C_f上的限制对应着含入$S_f^{\leqslant} \to S_f$ (8.3.2)。最后，对于$f \in S_1$，最后一个陈言缘自S_f同构于$S_{(f)}[T, T^{-1}]$这个事实(2.2.1)。

注解 (8.3.7) — 如果Y是仿射的，则依照浸入ε的定义(8.3.2)知，E的底空间中的元素就是S的那些不包含S_+的素理想$\mathfrak{p}$（不需要是分次的），对这样一个理想$\mathfrak{p}$，诸$\mathfrak{p} \cap S_n$显然满足(2.1.9)中的条件，从而有S的唯一一个分次素理想$\mathfrak{q}$，使得对任意n都有$\mathfrak{q} \cap S_n = \mathfrak{p} \cap S_n$；此时底空间上的映射$\pi : E \to X$可由下面的关系式来描述

(8.3.7.1) $$\pi(\mathfrak{p}) \;=\; \mathfrak{q}\quad。$$

事实上，为了验证这个关系式，只需考虑S_+中的一个满足$\mathfrak{p} \in D(f)$的齐次元f，并注意到$\mathfrak{q}_{(f)}$就是$\mathfrak{p}_f$在含入$S_{(f)} \to S$下的逆像。

推论 (8.3.8) — 若$\mathscr{S}$是由$\mathscr{S}_1$所生成的，则态射p和π都是有限型的；对任意$x \in X$，纤维$p^{-1}(x)$都同构于$\operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(x)[T]$，并且纤维$\pi^{-1}(x)$都同构于$\operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(x)[T, T^{-1}]$。

这可由 (8.3.5), (8.3.6) 以及下面的事实立得：如果 Y 是仿射的，并且 S 可由 S_1 所生成，则诸 X_f ($f \in S_1$) 构成 X 的一个覆盖 (2.3.14)。

注解 (8.3.9) — 分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{O}_Y[T]$（T 是未定元）所对应的去顶仿射锥可以等同于 $G_m = \operatorname{Spec}\mathscr{O}_Y[T,T^{-1}]$，因为我们在 (8.3.2) 已经看到，它与 C_T 无异（(8.4.4) 中有一个更一般的结果）。这个概形上典范地带有一个"Y *交换群概形*"的结构。这个概念我们以后再仔细讨论，现在仅给出一个简略的描述。一个 Y 群概形是指这样一个 Y 概形 G（在 Y 上是分离的），它上面带着两个 Y 态射 $p : G \times_T G \to G$ 和 $s : G \to G$，满足类似于群的结合律及交换律的条件：图表

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{p\times 1} & G \times G \\ {\scriptstyle 1\times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G \times G & \xrightarrow[p]{} & G \end{array}$$

应该是交换的（"结合性"），并且我们还要有一个对应于群里面的下述事实的条件：映射

$$(x,y) \longmapsto (x,x^{-1},y) \longmapsto (x,x^{-1}y) \longmapsto x(x^{-1}y)$$

和

$$(x,y) \longmapsto (x,x^{-1},y) \longmapsto (x,yx^{-1}) \longmapsto (yx^{-1})x$$

都等于映射 $(x,y) \mapsto y$；比如说对应于第一个合成映射的态射列是

$$G \times G \xrightarrow{(1,s)\times 1} G \times G \times G \xrightarrow{1\times p} G \times G \xrightarrow{p} G \ 。$$

读者可以同样地写出第二个序列。

易见 (**I**, 3.4.3) 在一个 Y 概形 G（在 Y 上是分离的）上给出一个 Y 群概形的结构等价于对任意 Y 概形 Z，都给出集合 $\operatorname{Hom}_Y(Z,G)$ 上的一个群结构，并使得对任意 Y 态射 $Z \to Z'$，对应的映射 $\operatorname{Hom}_Y(Z',G) \to \operatorname{Hom}_Y(Z,G)$ 都是一个群同态。在我们所考虑的特殊情形 G_m 中，$\operatorname{Hom}_Y(Z,G)$ 可以等同于 $Z \times_Y G_m$ 的 Z 截面的集合 (**I**, 3.3.14)，从而等同于 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_Z[T,T^{-1}]$ 的 Z 截面的集合；最后，使用 (**I**, 3.3.15) 中的方法还可以证明，上述集合又可以等同于环 $\Gamma(Z,\mathscr{O}_Z)$ 中的可逆元的集合，并且这个集合上的群结构就是由环 $\Gamma(Z,\mathscr{O}_Z)$ 上的乘法所导出的。读者可以验证，上面所说的态射 p 和 s 是由以下方法得到的：根据 (1.2.7) 和 (1.4.6)，它们所对应 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的同态

$$\pi \ : \ \mathscr{O}_Y[T,T^{-1}] \longrightarrow \mathscr{O}_X[T,T^{-1},T',T'^{-1}]$$

$$\sigma \ : \ \mathscr{O}_Y[T,T^{-1}] \longrightarrow \mathscr{O}_Y[T,T^{-1}]$$

是由下式所定义的：$\pi(T) = TT'$, $\sigma T = T^{-1}$ 。

准此，G_m 可以被看作是任何仿射锥 $C = \operatorname{Spec}\mathscr{S}$（其中 $\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层）上的一个“通用算子域”(domaine d’opérateurs universel)。这意味着我们可以典范地定义一个 Y 态射 $G_m \times_Y C \to C$，它与一个带有群作用（外部运算法则）的集合具有完全相似的性质；或者，与群概形的情形类似，对任意 Y 概形 Z，都可以在 $\operatorname{Hom}_Y(Z, C)$ 上给出一个以群 $\operatorname{Hom}_Y(Z, G_m)$ 为算子集的外部运算法则，满足与通常的群在集合上的作用相类似的条件，并且还满足与 Y 态射 $Z \to Z'$ 之间的相容条件。在我们这个情形，态射 $G_m \times_Y C \to C$ 是由这样一个 $\mathscr{O}_Y$ 代数层同态 $\mathscr{S} \to \mathscr{S} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_Y[T, T^{-1}] = \mathscr{S}[T, T^{-1}]$ 所定义的，该同态把任何截面 $s_n \in \Gamma(U, \mathscr{S}_n)$（$U$ 是 X 的开集）映到截面 $s_n T^n \in \Gamma(U, \mathscr{S} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_Y[T, T^{-1}])$。

反过来，假设给了一个不分次的拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$，并且在 $C = \operatorname{Spec}\mathscr{S}$ 上给了一个“带有算子群的 Y 集合概形”的结构，以 Y 群概形 G_m 为算子域；则在 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 上可以典范地导出一个分次结构。事实上，给出一个 Y 态射 $G_m \times_Y C \to C$ 等价于给出一个 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的同态 $\psi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}[T, T^{-1}]$，从而可以写成 $\psi = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n T^n$ 的形式，其中 $\psi_n : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{O}_Y$ 模层的同态（对于 Y 的任意开集 U，和任意截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{S})$，在 $\psi_n(s)$ 中都只有有限个是非零的）。于是由群在集合上的作用的性质可以推出：诸 $\psi_n(\mathscr{S}) = \mathscr{S}_n$ 在 $\mathscr{S}$ 上定义了一个 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的分次结构（具有正或负的次数），并且诸 ψ_n 就是对应的投影算子。于是可以对任何在 Y 上仿射的概形使用“几何”方式来定义“仿射锥”的结构，而不需要事先指定分次结构。我们将不在这里展开这个观点，相关的定义和结果推导都留给读者来完成。

8.4 向量丛的射影闭包

(8.4.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{E}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层。若取 $\mathscr{S}$ 是分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E})$，则定义 (8.3.1.1) 表明，$\widehat{\mathscr{S}}$ 可以等同于 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_Y)$。此时根据定义，$\mathscr{S}$ 所定义的仿射锥 $\operatorname{Spec}\mathscr{S}$ 就是 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$，并且 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 就是 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$，从而我们看到：

命题 (8.4.2) — *Y 上的向量丛 $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ 的射影闭包可以典范同构于 $\mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_Y)$，并且后者的无穷远沟可以典范同构于 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$。*

注解 (8.4.3) — 比如取 $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y^r$ 且 $r \geqslant 2$；于是若 $Y \neq \varnothing$，则由 $\mathscr{S}$ 所定义的去顶锥 E, $\widehat{E}$ 在 Y 上既不是仿射的也不是射影的。第二个陈言是显然的，因为 $\widehat{C} = \mathbf{P}(\mathscr{O}_Y^{r+1})$ 在 Y 上是射影的，并且 E 和 $\widehat{E}$ 的底空间都是 $\widehat{C}$ 中的开集，但不是闭集，从而典范浸入 $E \to \widehat{C}$ 和 $\widehat{E} \to \widehat{C}$ 都不是射影的 (5.5.3)，于是由 (5.5.5, (v)) 就可以推出结论。另一方面，假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，并且比如取 $r = 2$，则有 $C = \operatorname{Spec} A[T_1, T_2]$，此时 E 是 C 的开子概形 $D(T_1) \cup D(T_2)$；我们已经知道后者不是仿射的 (**I**, 5.5.11)；当然 $\widehat{E}$ 也不可能是仿射的，因为 E 是由 $\widehat{E}$ 的使截面 $\mathbf{z}$ 不归零的那些点所组成的开集 (8.3.2)。

尽管如此：

命题 (8.4.4) — 若 $\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层，则对于 $C = \mathbf{V}(\mathscr{L})$ 所对应的去顶锥 E 和 $\widehat{E}$，我们有典范同构

$$\text{(8.4.4.1)} \qquad \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}\Big) \xrightarrow{\sim} E\,,$$

$$\text{(8.4.4.2)} \qquad \mathbf{V}(\mathscr{L}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \widehat{E}\ 。$$

进而，存在一个从 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的射影闭包到 $\mathbf{V}(\mathscr{L}^{-1})$ 的射影闭包上的典范同构，它把前者的零截面 (相应的，无穷远沟) 映到后者的无穷远沟 (相应的，零截面)。

现在我们有 $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}$；于是典范含入

$$\mathscr{S} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$$

定义了一个典范的笼罩

$$\text{(8.4.4.3)} \qquad \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}\Big) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathscr{L}) = \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}\Big)\ 。$$

只需证明这个态射是概形 $\operatorname{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n})$ 到 E 上的一个同构。问题在 Y 上是局部性的，故可假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，并且 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y$，从而 $\mathscr{S} = (A[T])^{\sim}$ 并且 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n} = (A[T,T^{-1}])^{\sim}$。然则 $A[T,T^{-1}]$ 就是 $A[T]$ 的分式环 $A[T]_T$，从而 (8.4.4.3) 把左边等同于 $C = \mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的开子概形 $D(T)$；这个开集在 C 中的补集 $V(T)$ 是 C 的那个由理想 $TA[T]$ 所定义的闭子概形的底空间，也就是说，是 C 的零截面，从而 $E = D(T)$。

另一方面，同构 (8.4.4.2) 可由最后一个陈言推出，因为 $\mathbf{V}(\mathscr{L}^{-1})$ 是它的射影闭包中的无穷远沟的补集，并且 $\widehat{E}$ 是 $C = \mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的射影闭包中的零截面的补集。然则这两个射影闭包分别就是 $\mathbf{P}(\mathscr{L}^{-1} \oplus \mathscr{O}_Y)$ 和 $\mathbf{P}(\mathscr{L} \oplus \mathscr{O}_Y)$；由于我们有 $\mathscr{L} \oplus \mathscr{O}_Y = \mathscr{L} \otimes (\mathscr{L}^{-1} \oplus \mathscr{O}_Y)$，故而典范同构的存在性缘自 (4.1.4)，并且问题归结为证明该同构把零截面和无穷远沟互换。为此，我们可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A,\ L = Ac,\ L^{-1} = Ac'$，并且典范同构 $L \otimes L^{-1} \to A$ 把 $c \otimes c'$ 映到 A 中的元素 1 的情形。此时 $\mathbf{S}(L \oplus A)$ 就是 $A[\mathbf{z}]$ 和 $\bigoplus_{n\geqslant 0} Ac^{\otimes n}$ 的张量积，$\mathbf{S}(L^{-1} \oplus A)$ 就是 $A[\mathbf{z}]$ 和 $\bigoplus_{n\geqslant 0} Ac'^{\otimes n}$ 的张量积，并且 (4.1.4) 中所定义的同构把 $\mathbf{z}^h \otimes c'^{\otimes(n-h)}$ 映到元素 $z^{n-h} \otimes c^{\otimes h}$。然则在 $\mathbf{P}(\mathscr{L}^{-1} \oplus \mathscr{O}_Y)$ 中，无穷远沟是由使截面 $\mathbf{z}$ 归零的那些点所组成的集合，零截面是由使截面 c' 归零的那些点所组成的集合；对于 $\mathbf{P}(\mathscr{L} \oplus \mathscr{O}_Y)$ 有类似的定义，于是我们的结论可由上述具体描述立得。

8.5 函子行为

(8.5.1) 设 Y, Y' 是两个概形，$q : Y' \to Y$ 是一个态射，$\mathscr{S}$（相应的，$\mathscr{S}'$）是一个正次数的拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层（相应的，$\mathscr{O}_{Y'}$ 代数层）。考虑分次代数层的一个 q 态射

$$\varphi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}' 。\tag{8.5.1.1}$$

我们知道 (1.5.6) 它典范地对应着一个态射

$$\Phi = \operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec}\mathscr{S}' \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathscr{S} ,$$

并且图表

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\Phi} & C \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y' & \xrightarrow[q]{} & Y \end{array}\tag{8.5.1.2}$$

是交换的，其中 $C = \operatorname{Spec}\mathscr{S}$，$C' = \operatorname{Spec}\mathscr{S}'$。进而假设 $\mathscr{S}_0 = \mathscr{O}_Y$，$\mathscr{S}'_0 = \mathscr{O}_{Y'}$；设 $\varepsilon : Y \to C$ 和 $\varepsilon' : Y' \to C'$ 是典范浸入 (8.3.2)；则我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle\varepsilon'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ C' & \xrightarrow[\Phi]{} & C \end{array} ,\tag{8.5.1.3}$$

它对应着图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{S}' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathscr{O}_Y & \longrightarrow & \mathscr{O}_{Y'} \end{array} ,$$

其中竖直箭头都是增殖同态，并且它的交换性缘自 φ 是一个分次代数层同态的前提条件。

命题 (8.5.2) — *若 E（相应的，E'）是由 $\mathscr{S}$（相应的，$\mathscr{S}'$）所定义的去顶仿射锥，则有 $\Phi^{-1}(E) \subset E'$；进而若 $\operatorname{Proj}(\varphi) : G(\varphi) \to \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 是处处有定义的（换句话说 $G(\varphi) = \operatorname{Proj}\mathscr{S}'$），则我们有 $\Phi^{-1}(E) = E'$，反之亦然。*

第一个陈言缘自 (8.5.1.3) 的交换性。为了证明第二个，可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A$ 和 $Y' = \operatorname{Spec} A'$ 都是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，$\mathscr{S}' = \widetilde{S'}$。对于 S_+ 中的任意齐

次元 f，若令 $f'=\varphi(f)$，则有 $\Phi^{-1}(C_f)=C'_{f'}$ (**I**, 2.2.4.1)；说 $G(\varphi)=\operatorname{Proj}S'$ 即意味着在 S'_+ 中由诸 $f'=\varphi(f)$ 所生成的理想的根就是 S_+ 自身 ((2.8.1) 和 (2.3.14))，而这又等价于诸 $C'_{f'}$ 可以覆盖 E' (8.3.4.4)。

(8.5.3) q 态射 φ 可以典范地延拓为一个分次代数层的 q 态射

(8.5.3.1) $$\widehat{\varphi}\ :\ \widehat{\mathscr{S}}\longrightarrow\widehat{\mathscr{S}'}\ ,$$

只需令 $\widehat{\varphi}(\mathbf{z})=\mathbf{z}$。由此我们可以导出一个态射

$$\widehat{\Phi}=\operatorname{Proj}(\widehat{\varphi})\ :\ G(\widehat{\varphi})\ \longrightarrow\ \widehat{C}=\operatorname{Proj}\widehat{\mathscr{S}}\ ,$$

并且图表

$$\begin{tikzcd} G(\widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] \arrow[d] & \widehat{C} \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

是交换的 (3.5.6)。由定义立知，若以 $i\ :\ X\ \to\ \widehat{C}$ 和 $i'\ :\ C'\ \to\ \widehat{C'}$ 来标记典范开浸入 (8.3.2)，则有 $i'(C')\subset G(\widehat{\varphi})$，并且图表

(8.5.3.2) $$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "i'"'] & C \arrow[d, "i"] \\ G(\widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{\Phi}"'] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

是交换的。最后，若令 $X=\operatorname{Proj}\mathscr{S}$, $X'=\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$，并设 $j:X\to\widehat{C}$, $j':X'\to\widehat{C'}$ 是典范闭浸入 (8.3.2)，则由这些浸入的定义知 $j'(G(\varphi))\subset G(\widehat{\varphi})$，并且图表

(8.5.3.3) $$\begin{tikzcd} G(\varphi) \arrow[r, "\operatorname{Proj}(\varphi)"] \arrow[d, "j'"'] & X \arrow[d, "j"] \\ G(\widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{\Phi}"'] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

是交换的。

命题 (8.5.4) — *若 $\widehat{E}$ (相应的，$\widehat{E'}$) 是由 $\mathscr{S}$ (相应的，$\mathscr{S}'$) 所定义的去顶射影锥，则有 $\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{E})\subset\widehat{E'}$；进而，若 $p:\widehat{E}\to X$ 和 $p':\widehat{E'}\to X'$ 是典范收缩，则*

有 $p'(\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{E}))\subset G(\widehat{\varphi})$，并且图表

(8.5.4.1)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{E}) \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] \arrow[d, "p'"'] & \widehat{E} \arrow[d, "p"] \\
G(\varphi) \arrow[r, "\mathrm{Proj}(\varphi)"'] & X
\end{tikzcd}$$

是交换的。若 $\mathrm{Proj}(\varphi)$ 是处处有定义的，则 $\widehat{\Phi}$ 也是如此，并且我们有 $\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{E})=\widehat{E'}$。

第一个陈言缘自图表 (8.5.1.3) 和 (8.5.3.2) 的交换性，后面两个缘自典范收缩的定义 (8.3.5) 以及 $\widehat{\varphi}$ 的定义。另一方面，为了证明当 $\mathrm{Proj}(\varphi)$ 处处有定义时 $\widehat{\Phi}$ 也是处处有定义的，可以限于考虑 $Y=\mathrm{Spec}\,A$ 和 $Y'=\mathrm{Spec}\,A'$ 都是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$, $\mathscr{S}'=\widetilde{S}'$；前提条件说，当 f 跑遍 S_+ 的齐次元集合时，由诸 $\varphi(f)$ 所生成的理想在 S'_+ 中的根就是 S'_+ 自身；由此立知，由 $\mathbf{z}$ 和诸 $\varphi(f)$ 所生成的理想在 $S[\mathbf{z}]'_+$ 中的根就是 $S[\mathbf{z}]'_+$ 自身，故得我们的陈言；同时这也证明了 $\widehat{E'}$ 就是诸 $\widehat{C}'_{\varphi(f)}$ 的并集，从而等于 $\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{E})$。

推论 (8.5.5) — 如果 $\mathrm{Proj}(\varphi)$ 是处处有定义的，则 $\widehat{C'}$ 的无穷远沟 (相应的，顶点概形) 的底空间在 $\widehat{\Phi}$ 下的逆像就是 $\widehat{C}$ 的无穷远沟 (相应的，顶点概形) 的底空间。

这可由 (8.5.4) 和 (8.5.2) 立得，有见于关系式 (8.3.4.1) 和 (8.3.4.2)。

8.6 去顶锥的一个典范同构

(8.6.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚的正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，且满足 $\mathscr{S}_0=\mathscr{O}_Y$，
X 是 Y 概形 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}$。我们现在把 (8.5) 中的结果应用到 $Y'=X$ 上，其中 $q:X\to Y$ 是结构态射；设

(8.6.1.1)
$$\mathscr{S}_X=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{O}_X(n)\ ,$$

它是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层。其中的乘法是由典范同态 (3.2.6.1)

$$\mathscr{O}_X(m)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(n)\longrightarrow\mathscr{O}_X(m+n)$$

所定义的，并且乘法的结合性可由交换图表 (2.35.11.4) 推出。我们取 $\mathscr{S}'$ 是 $\mathscr{S}_X$ 的拟凝聚正分次 $\mathscr{O}_X$ 子代数层 $\mathscr{S}_X^{\geqslant}=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{O}_X(n)$。

最后，(3.3.2.3) 中所定义的同态 $\mathscr{S}\to q_*\mathscr{S}_X$ 显然把 $\mathscr{S}$ 映到 $q_*\mathscr{S}_X^{\geqslant}$ 之中，从而定义了一个典范 q 态射

(8.6.1.2)
$$\alpha:\ \mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{S}_X^{\geqslant}\ 。$$

我们令

$$\textbf{(8.6.1.3)}\quad C_X = \operatorname{Spec}\mathscr{S}_X^{\geqslant}\ ,\qquad \widehat{C}_X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}_X^{\geqslant}[\mathbf{z}]\ ,\qquad X' = \operatorname{Proj}\mathscr{S}_X^{\geqslant}\ ,$$

并且用 E_X 和 $\widehat{E}_X$ 分别来标记去顶仿射锥和去顶射影锥；以 $\varepsilon_X : X \to C_X$，$i_X : C \to \widehat{C}_X$，$j_X : X' \to \widehat{C}_X$，$p_X : \widehat{E}_X \to X$，$\pi_X : E_X \to X'$ 来标记 (8.3) 中所定义的诸典范态射。

命题 (8.6.2) — 结构态射 $u : X' \to X$ 是一个**同构**，态射 $\operatorname{Proj}\alpha$ 是处处有定义的，并且等于 u。态射 $\operatorname{Proj}(\widehat{\alpha}) : \widehat{C}_X \to \widehat{C}$ 是处处有定义的，并且它在 $\widehat{E}_X$ 和 E_X 上的限制分别是映到 $\widehat{E}$ 和 E 上的**同构**。最后，如果用 u 把 X' 等同于 X，则态射 p_X 和 π_X 分别等同于 X 概形 $\widehat{E}_X$ 和 E_X 的结构态射。

易见可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec}A$ 是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$；于是 X 是诸仿射开集 X_f 的并集，其中 f 跑遍 S_+ 的齐次元的集合，并且 X_f 的环就是 $S_{(f)}$。进而由 (8.2.7.1) 知，我们有

$$\textbf{(8.6.2.1)}\qquad \Gamma(X_f, \mathscr{S}_X^{\geqslant}) = S_f^{\geqslant}\ 。$$

从而 $u^{-1}(X_f) = \operatorname{Proj}S_f^{\geqslant}$。然而若 $f \in S_d$ $(d > 0)$，则 $\operatorname{Proj}S_f^{\geqslant}$ 典范同构于 $\operatorname{Proj}S_f^{\geqslant}$ (2.4.7)，另一方面，在映射 $T \mapsto f/1$ 下，$(S_f^{\geqslant})^{(d)} = (S^{(d)})_f^{\geqslant}$ 可以等同于 $S_{(f)}[T]$ (2.2.1)；由此可知 (3.1.7)，结构态射 $u^{-1}(X_f) \to X_f$ 是一个同构，故得第一个陈言。为了证明第二个，注意到 $\operatorname{Proj}\alpha$ 的限制 $u^{-1}(X_f) \cap G(\alpha) \to X = \operatorname{Proj}S$ 对应着 S 到 $S_f^{\geqslant}$ 的典范映射 $x \mapsto x/1$ (2.6.2)；由此首先可以导出 $G(\alpha) = X'$，其次，有见于 $u^{-1}(X_f) = (u^{-1}(X_f))_{f/1}$，故由 (2.8.1.1) 知，$u^{-1}(X_f)$ 在 $\operatorname{Proj}\alpha$ 下的像包含在 X_f 中，并且若把 $\operatorname{Proj}\alpha$ 在 $u^{-1}(X_f)$ 上的限制看作是一个映到 $X_f = \operatorname{Spec}S_{(f)}$ 中的态射，则它与 u 的限制相同。最后，把公式 (8.3.5.4) 应用到 p_X 上，可以表明 $p_x^{-1}(u^{-1}(X_f)) = \operatorname{Spec}(S_f^{\geqslant})_{f/1}^{\leqslant}$，并且根据 (8.5.4.1)，这个开集就是 $p^{-1}(X_f) = \operatorname{Spec}S_f^{\leqslant}$ 在 $\operatorname{Proj}(\widehat{\alpha})$ 下的逆像。有见于 (8.2.3.2)，$\operatorname{Proj}(\widehat{\alpha})$ 在 $p_X^{-1}(u^{-1}(X_f))$ 上的限制对应着 (8.2.7.2) 的逆同构，限制到 $S_f^{\leqslant}$ 上就得到第三个陈言，最后一个陈言可由定义立得。

还可以注意到，由交换图表 (8.5.3.2) 知，$\operatorname{Proj}(\widehat{\alpha})$ 在 C_X 上的限制与态射 $\operatorname{Spec}(\alpha)$ 无异。

推论 (8.6.3) — 作为 X 概形，$\widehat{E}_X$ 典范同构于 $\operatorname{Spec}\mathscr{S}_X^{\leqslant}$，并且 E_X 典范同构于 $\operatorname{Spec}\mathscr{S}_X$。

我们知道态射 p_X 和 π_X 都是仿射的 (8.3.5 和 8.3.6)，故只需 (根据 (1.3.1)) 对于 $Y = \operatorname{Spec}A$ 是仿射的并且 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$ 的情形进行证明即可。此时第一个陈言缘自典范同构 (8.2.7.2) $(S_f^{\geqslant})_{f/1}^{\leqslant} \xrightarrow{\sim} S_f^{\leqslant}$ 的存在性以及这些同构与 f 到 fg (f 和 g 都是 S_+ 中的齐次元) 的限制运算是相容的这个事实。同样的，把公式 (8.3.6.2) 应用到 π_X 上可

以表明。对于 S_+ 中的任意齐次元 f，均有 $\pi_X^{-1}(u^{-1}(X_f)) = \operatorname{Spec}(S_f^{\geqslant})_{f/1}$，从而第二个陈言缘自典范同构 (8.2.7.2) $(S_f^{\geqslant})_{f/q} \xrightarrow{\sim} S_f$ 的存在性。

于是 $\widehat{C}_X$ 作为 X 概形可以由两个在 X 上仿射的概形 $C_X = \operatorname{Spec}\mathscr{S}_X^{\geqslant}$ 和 $\widehat{E}_X = \operatorname{Spec}\mathscr{S}_X^{\leqslant}$ 黏合而成，并且它们的交集是开集 $E_X = \operatorname{Spec}\mathscr{S}$ 。

推论 (8.6.4) — 假设 $\mathscr{O}_X(1)$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，并且 $\mathscr{S}_X$ 同构于 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathscr{O}_X(1))^{\otimes n}$（例如当 $\mathscr{S}$ 可由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的时候 (3.2.5 和 3.2.7) 就是如此）。则去顶射影锥 $\widehat{E}$ 可以等同于 X 上的 1 秩向量丛 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(-1))$，并且去顶仿射锥 E 可以等同于该向量丛在零截面的补集上诱导的子概形。在这个等同下，典范收缩 $\widehat{E} \to X$ 可以等同于 X 概形 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(-1))$ 的结构态射。最后，存在一个典范 Y 态射 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(1)) \to C$，它在 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(1))$ 的零截面的补集上的限制是一个从该补集映到去顶仿射锥 E 上的同构。

事实上，若令 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(1)$，则 $\mathscr{S}_X^{\geqslant}$ 与 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L})$ 是等同的，从而有见于 (8.6.3)，$\widehat{E}_X$ 可以典范等同于 $\mathbf{V}(\mathscr{L}^{-1})$，并且 $\mathscr{C}_X$ 可以典范等同于 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$。态射 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C$ 是 $\operatorname{Proj}(\widehat{\alpha})$ 的限制，从而推论中的陈言都是 (8.6.2) 的特殊情形。

注意到 C 的顶点概形的底空间在态射 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(1)) \to C$ 下的逆像就是 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(1))$ 的零截面的底空间 (8.5.5)；然而一般来说 C 和 $\mathbf{V}(\mathscr{O}_X(1))$ 的这两个子概形并不是同构的。下面我们就来研究这个问题。

8.7 投影锥的暴涨

(8.7.1) 在 (8.6.1) 的条件下，令 $r = \operatorname{Proj}(\widehat{\alpha})$，则依照 (8.5.1.3) 和 (8.5.3.2)，我们有一个交换图表

(8.7.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X\circ\varepsilon_X"] \arrow[d, "q"'] & \widehat{C}_X \arrow[d, "r"] \\ Y \arrow[r, "i\circ\varepsilon"'] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$
。

进而依照 (8.6.2)，r 在零截面的补集 $\widehat{C}_X - i_X(\varepsilon_X(X))$ 上的限制是一个映到零截面的补集 $\widehat{C} - i(\varepsilon(Y))$ 上的同构。为简单起见，假设 Y 是仿射的，$\mathscr{S}$ 是有限型的，并且是由 $\mathscr{S}_1$ 所生成的，则 X 在 Y 上是射影的，并且 $\widehat{C}_X$ 在 X 上是射影的 (5.5.1)，从而 $\widehat{C}_X$ 在 Y 上是射影的 (5.5.5, (ii))，当然在 $\widehat{C}$ 上也是射影的 (5.5.5, (v))。于是我们得到一个射影 Y 态射 $r : \widehat{C}_X \to \widehat{C}$（它在 C_X 上的限制是一个射影 Y 态射 $C_X \to C$），它把 X 收缩到 Y 中，并且在 X 的补集上的限制是一个映到 Y 的补集上的同构。从而我们得到 C_X 和 C 之间的一个关系，这个关系类似于暴涨概形和它的源概形之间的关系 (8.1.3)。我们现在要具体地展示出，C_X 可以等同于一个分次 $\mathscr{O}_C$ 代数层的齐次谱。

(8.7.2) 沿用 (8.6.1) 的记号，对于每个 $n \geqslant 0$，考虑分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathscr{S}$ 的拟凝聚理想层

(8.7.2.1) $$\mathscr{S}_{[n]} = \bigoplus_{m \geqslant n} \mathscr{S}_m ,$$

则易见

(8.7.2.2) $$\mathscr{S}_{[0]} = \mathscr{S} , \qquad \mathscr{S}_{[n]} \subset \mathscr{S}_{[m]} \qquad \text{对于 } m \leqslant n ,$$

(8.7.2.3) $$\mathscr{S}_{[n]}\mathscr{S}_{[m]} \subset \mathscr{S}_{[m+n]} 。$$

考虑 $\mathscr{S}_{[n]}$ 的附随 $\mathscr{O}_C$ 模层，它是 $\mathscr{O}_C = \widetilde{\mathscr{S}}$ 的一个拟凝聚理想层 (1.4.4)

(8.7.2.4) $$\mathscr{I}_n = (\mathscr{S}_{[n]})^{\sim} 。$$

使用 (1.4.4) 和 (1.4.8.1) 就可以由 (8.7.2.2) 和 (8.7.2.3) 导出下面的公式

(8.7.2.5) $$\mathscr{I}_0 = \mathscr{O}_C , \qquad \mathscr{I}_n \subset \mathscr{I}_m \qquad \text{对于 } m \leqslant n ,$$

(8.7.2.6) $$\mathscr{I}_n\mathscr{I}_m \subset \mathscr{I}_{n+m} 。$$

从而 (8.1.1) 的条件得到满足，故可引入拟凝聚 $\mathscr{O}_C$ 代数层

(8.7.2.7) $$\mathscr{S}^{\natural} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{I}_n = \Big(\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{S}_{[n]}\Big)^{\sim} 。$$

命题 (8.7.3) — *存在一个典范 C 同构*

(8.7.3.1) $$h \ : \ C_X \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Proj} \mathscr{S}^{\natural} 。$$

首先假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，故有 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 S 是一个正分次 A 代数，并且 $C = \operatorname{Spec} S$。此时定义 (8.2.7.4) 表明，在 (8.2.6) 的记号下，我们有 $\mathscr{S}^{\natural} = (S^{\natural})^{\sim}$。为了定义 (8.7.3.1)，考虑一个齐次元 $f \in S_d$ $(d > 0)$ 和对应的元素 $f^{\natural} \in S^{\natural}$ (8.2.6)；从而 S 同构 (8.2.7.3) 定义了一个 C 同构

(8.7.3.2) $$\operatorname{Spec} S_f^{\geqslant} \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Spec} S^{\natural}_{(f^{\natural})} 。$$

然而在 (8.6.2) 的记号下，若 $v: C_X \to X$ 是结构态射，则由 (8.6.2.1) 知，$v^{-1}(X_f) = \operatorname{Spec} S_f^{\geqslant}$ 。另一方面，我们有 $\operatorname{Spec} S^{\natural}_{(f^{\natural})} = D_+(f^{\natural})$，因而 (8.7.3.2) 定义了一个同构 $v^{-1}(X_f) \to D_+(f^{\natural})$ 。进而，若 $g \in S_e$ $(e > 0)$，则图表

$$\begin{array}{ccc} v^{-1}(X_{fg}) & \xrightarrow{\sim} & D_+(f^{\natural}g^{\natural}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v^{-1}(X_f) & \xrightarrow{\sim} & D_+(f^{\natural}) \end{array}$$

是交换的，这可由同构 (8.2.7.3) 的定义立得。最后，根据定义 S_+ 是由那些齐次元 f 所生成的，从而由 (8.2.10, (iv)) 和 (2.3.14) 知，诸 $D_+(f^{\natural})$ 构成 $\operatorname{Proj} S^{\natural}$ 的一个覆盖，并且诸 $v^{-1}(X_f)$ 构成 C_X 的一个覆盖，因为诸 X_f 构成 X 的一个覆盖；从而在这种情形下，我们就定义了同构 (8.7.3.1)。

为了在一般情形下证明 (8.7.3)，只需证明若 U, U' 是 Y 的两个仿射开集，满足 $U' \subset U$，它们的环分别是 A 和 A'，并且 $\mathscr{S}|_U = \widetilde{S}$, $\mathscr{S}|_{U'} = \widetilde{S'}$，则图表

(8.7.3.3)
$$\begin{array}{ccc} C_{U'} & \longrightarrow & \operatorname{Proj} S'^{\natural} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_U & \longrightarrow & \operatorname{Proj} S^{\natural} \end{array}$$

是交换的。然而 S' 可以典范等同于 $S \otimes_A A'$，从而 $S'^{\natural}$ 可以等同于

$$S^{\natural} \otimes_S S' = S^{\natural} \otimes_A A' 。$$

从而我们有 $\operatorname{Proj} S'^{\natural} = \operatorname{Proj} S^{\natural} \times_U U'$ (2.8.10)；同样的，若 $X = \operatorname{Proj} S$, $X' = \operatorname{Proj} S'$，则有 $X' = X \times_U U'$ 和 $\mathscr{S}_{X'} = \mathscr{S}_X \otimes_{\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{U'}$ (3.5.4)，换句话说 $\mathscr{S}_{X'} = j^*\mathscr{S}_X$，其中 j 是投影 $X' \to X$ 。因而 (1.5.2) 我们有 $C_{U'} = C_U \times_X X' = C_U \times_U U'$，此时 (8.7.3.3) 的交换性是显然的。

注解 (8.7.4) — (i) (8.7.3) 的最后部分的推导可以立即推广到下面的情形。设 $g: Y' \to Y$ 是一个态射，$\mathscr{S}' = g^*\mathscr{S}$, $X' = \operatorname{Proj} \mathscr{S}'$；则我们有一个交换图表

(8.7.4.1)
$$\begin{array}{ccc} C_{X'} & \longrightarrow & \operatorname{Proj} \mathscr{S}'^{\natural} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_X & \longrightarrow & \operatorname{Proj} \mathscr{S}^{\natural} \end{array} 。$$

另一方面，设 $\varphi: \mathscr{S}'' \to \mathscr{S}$ 是分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的一个同态，并假设若 $X'' = \operatorname{Proj} \mathscr{S}''$，则 $u = \operatorname{Proj}(\varphi): X \to X''$ 是处处有定义的；则我们还有一个 Y 态射 v :

$C \to C''$（其中 $C'' = \operatorname{Spec} \mathscr{S}''$），满足 $\mathscr{A}(v) = \varphi$，且由于 φ 是一个分次代数层同态，故由 φ 可以导出一个分次代数层的 v 态射 $\psi : \mathscr{S}''^{\natural} \to \mathscr{S}^{\natural}$ (1.4.1)。进而，由 (8.2.10, (iv)) 以及 φ 上的前提条件易见，$\operatorname{Proj} \psi$ 是处处有定义的。最后，有见于 (3.5.6.1)，我们有一个典范 u 态射 $\mathscr{S}_{X''} \to \mathscr{S}_X$，故得 (1.5.6) 一个态射 $w : C_{X''} \to C_X$。据此，图表

(8.7.4.2)
$$\begin{array}{ccc} C_{X''} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Proj} \mathscr{S}^{\natural} \\ {\scriptstyle w}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \operatorname{Proj}\psi} \\ C_X & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Proj} \mathscr{S}^{\natural} \end{array}$$

是交换的，因为可以归结到 Y 是仿射概形的情形，并可立即验证。

(ii) 注意到依照 (8.7.2.5) 和 (8.7.2.6)，对任意 $m > 0$，均有 $\mathscr{I}_1^m \subset \mathscr{I}_m \subset \mathscr{I}_1$。然则根据定义，$\mathscr{I}_1 = (\mathscr{S}_+)^{\sim}$，从而 $\mathscr{I}_1$ 在 C 中定义了闭子概形 $\varepsilon(Y)$ ((1.4.10) 和 (8.3.2))；由此可知，对任意 $m > 0$，$\mathscr{O}_C / \mathscr{I}_m$ 的支集都包含在顶点概形 $\varepsilon(Y)$ 的底空间之中；从而在去顶仿射锥 E 的逆像上，结构态射 $\operatorname{Proj} \mathscr{S}^{\natural} \to C$ 成为一个同构（这也是缘自 (8.7.3) 和 (8.7.1)）。进而，若把 C 典范等同于 $\widehat{C}$ 的一个开集 (8.3.3)，则显然可以把 $\mathscr{O}_C$ 的理想层 $\mathscr{I}_m$ 延拓为 $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 的理想层 $\mathscr{J}_m$，只需令它们在 $\widehat{C}$ 的开集 $\widehat{E}$ 上与 $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 重合即可。于是若令 $\mathscr{T} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}_m$，它是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 代数层，则可以把同构 (8.7.3.1) 延拓为一个 $\widehat{C}$ 同构

(8.7.4.3) $$\widehat{C}_X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} \mathscr{T} \quad 。$$

事实上，由上面所述知，在 $\widehat{E}$ 上 $\operatorname{Proj} \mathscr{T}$ 可以典范等同于 $\widehat{E}$，从而我们可以定义同构 (8.7.4.3)，使它在 E 上重合于典范同构 $\widehat{E}_X \to \widehat{E}$ (8.6.2)；易见这个同构在 $\widehat{E}$ 上与 (8.7.3.1) 是重合的。

推论 (8.7.5) — 假设存在 $n_0 > 0$，使得

(8.7.5.1) $$\mathscr{S}_{n+1} = \mathscr{S}_1 \mathscr{S}_n \qquad 当\ n \geqslant n_0\ 时。$$

则 C_X 的顶点子概形（同构于 X）就是 C 的顶点子概形（同构于 Y）在典范态射 $r : C_X \to C$ 下的逆像。反过来，若这个性质成立，并进而假设 Y 是 Noether 的，且 $\mathscr{S}$ 是有限型的，则存在 $n_0 > 0$ 使得 (8.7.5.1) 是成立的。

第一个陈言在 Y 上是局部性的，故可假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，此时 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 S 是一个正分次 A 代数。于是由 (8.2.12) 就可以推出结论，因为我们有 $\operatorname{Proj}(S^{\natural} \otimes_S S_1) = C_X \times_C \varepsilon(Y)$（依据 (8.7.3.1) 中的等同），也就是说，这个概形是 $\varepsilon(Y)$ 在 C_X 中的逆像 (**I**, 4.4.1)。如果 Y 是 Noether 仿射的，并且 S 是有限型的，则逆命题也是缘

自 (8.2.12)。若 Y 是 Noether 的 (未必是仿射的)，并且 $\mathscr{S}$ 是有限型的，则 Y 有一个由 Noether 仿射开集 U_i 组成的有限覆盖，此时由上面所述知，对任意 i，均可找到一个整数 n_i，使得当 $n \geqslant n_i$ 时均有 $\mathscr{S}_{n+1}|_{U_i} = (\mathscr{S}_1|_{U_i})(\mathscr{S}_n|_{U_i})$；从而诸 n_i 中的最大者就满足 (8.7.5.1)。

(8.7.6) 现在考虑在仿射锥 C 上顶点子概形 $\varepsilon(Y)$ 暴涨后的 C 概形 Z；则根据定义 (8.1.3)，这就是概形 $\operatorname{Proj}\big(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{S}_+^n\big)$；典范含入

(8.7.6.1) $$\iota\ :\ \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{S}_+^n\ \longrightarrow\ \mathscr{S}^\natural$$

定义了 (借助 (8.7.3) 中的等同) 一个典范的笼罩性 C 态射

(8.7.6.2) $$G(\iota)\ \longrightarrow\ Z\ ,$$

其中 $G(\iota)$ 是 C_X 的一个开集 (3.5.1)；注意到 $G(\iota)\ \neq\ C_X$ 的可能性是存在的，例如取 $Y\ =\ \operatorname{Spec} K$，其中 K 是一个域，再取 $\mathscr{S}\ =\ \widetilde{S}$，其中 $S\ =\ K[\mathbf{y}]$，并且 $\mathbf{y}$ 是一个次数为 2 的未定元；于是若以 R_n 来标记集合 $(S_+)^n$，并把它看作是 $S_{[n]} = S_n^\natural$ 的一个子集，则 $S_+^\natural$ 并不等于由诸 R_n 的并集所生成的理想在 $S_+^\natural$ 中的根 (参考 (2.3.14))。

推论 (8.7.7) — *假设存在 $n_0 > 0$ 使得*

(8.7.7.1) $$\mathscr{S}_n\ =\ \mathscr{S}_1^n\qquad \text{当 } n \geqslant n_0 \text{ 时。}$$

则典范态射 (8.7.6.2) 是处处有定义的，并且是一个同构 $C_X \xrightarrow{\sim} Z$。反过来，若这个性质成立，并进而假设 Y 是 Noether 的，$\mathscr{S}$ 是有限型的，则存在 n_0 使得 (8.7.7.1) 成立。

事实上，第一个陈言在 Y 上是局部性的，从而可由 (8.2.14) 推出；逆命题也可以由此得出，方法与 (8.7.5) 中的相同。

注解 (8.7.8) — 由于条件 (8.7.7.1) 蕴涵着 (8.7.5.1)，故我们看到，如果前者成立，则不仅 C_X 可以等同于在仿射锥 C 上顶点 (同构于 Y) 暴涨后的概形，而且 C_X 的顶点 (同构于 X) 可以等同于 C 的顶点 Y 的逆像闭子概形。进而，由条件 (8.7.7.1) 可以推出：在 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$ 上，诸 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{O}_X(n)$ 都是可逆的 (3.2.5 和 3.2.9)，并且我们有 $\mathscr{O}_X(n) = \mathscr{L}^{\otimes n}$，其中 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(1)$ (3.2.7 和 3.2.9)；从而根据定义 (8.6.1.1)，C_X 就是 X 上的向量丛 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$，并且它的顶点就是该向量丛的零截面。

8.8 丰沛层和收缩

(8.8.1) 设 Y 是一个概形，$f : X \to Y$ 是一个拟紧分离态射，$\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛

的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。考虑正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层

(8.8.1.1)
$$\mathscr{S} = \mathscr{O}_Y \oplus \bigoplus_{n\geqslant 1} f_*(\mathscr{L}^{\otimes n}) \quad 。$$

它是拟凝聚的 (**I**, 9.2.2, a))。我们有一个分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层的典范同态

(8.8.1.2)
$$\tau \ : \ f^*\mathscr{S} \longrightarrow \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n} \quad ,$$

它在次数 $\geqslant 1$ 处与典范同态 $\sigma : f^*f_*(\mathscr{L}^{\otimes n}) \to \mathscr{L}^{\otimes n}$ 是重合的，且在次数为 0 处是恒同。于是 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的这个条件表明 (4.6.3 和 3.6.1)，对应的 Y 态射

(8.8.1.3)
$$r = r_{\mathscr{L},\tau} \ : \ X \longrightarrow P = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$$

是处处有定义的，并且是一个笼罩性开浸入，同时对任意 $n\in\mathbb{Z}$，均有

(8.8.1.4)
$$r^*(\mathscr{O}_P(n)) = \mathscr{L}^{\otimes n} \quad 。$$

命题 (8.8.2) — 设 $C = \operatorname{Spec}\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{S}$ 所定义的仿射锥；若 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的，则有一个典范 Y 态射

(8.8.2.1)
$$g \ : \ V = \mathbf{V}(\mathscr{L}) \longrightarrow C$$

使得图表

(8.8.2.2)
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbf{V}(\mathscr{L}) & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[\varepsilon]{} & C & \xrightarrow[\psi]{} & Y \end{array}$$

是交换的，其中 ψ 和 π 都是结构态射，j 和 ε 是典范浸入，分别把 X 和 Y 映到 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面和 C 的顶点概形上。进而，g 在 $\mathbf{V}(\mathscr{L})-j(X)$ 上的限制是一个映到 $\mathscr{S}$ 所对应的去顶仿射锥 E 中的开浸入

(8.8.2.3)
$$\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X) \longrightarrow E = C - \varepsilon(Y) \quad 。$$

在 (8.8.1) 的记号下，设 $\mathscr{S}_P^{\geqslant} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{O}_P(n)$，并设 $C_P = \operatorname{Spec}\mathscr{S}_P^{\geqslant}$。我们知道 (8.6.2)，存在一个典范态射 $h = \operatorname{Spec}(\alpha) : C_P \to C$，使得图表

(8.8.2.4)
$$\begin{array}{ccc} C_P & \longrightarrow & P \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \xrightarrow[\psi]{} & Y \end{array}$$

是交换的；进而，若 $\varepsilon_P : P \to C_P$ 是典范浸入，则图表

(8.8.2.5)
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varepsilon_P} & C_P \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow[\varepsilon]{} & C \end{array}$$

是交换的 (8.7.1.1)，最后，h 在去顶仿射锥 E_P 上的限制是一个同构 $E_P \xrightarrow{\sim} E$ (8.6.2)。另一方面，由 (8.8.1.4) 知，我们有

$$r^*(\mathscr{S}_P^{\geqslant}) = \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L})$$

因而存在一个典范 P 态射 $q : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C_P$，此时交换图表

(8.8.2.6)
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(\mathscr{L}) & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ C_P & \longrightarrow & P \end{array}$$

把 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 等同于纤维积 $C_P \times_P X$ (1.5.2)；由于 r 是开浸入，从而 q 也是如此 (**I**, 4.3.2)。进而根据 (8.5.2)，q 在 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X)$ 上的限制把该概形映到 E_P 中，并且图表

(8.8.2.7)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbf{V}(\mathscr{L}) \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ P & \xrightarrow[\varepsilon_P]{} & C_P \end{array}$$

是交换的（(8.5.1.3) 的特殊情形）。于是若取 g 是合成态射 $h \circ q$，则 (8.8.2) 中的陈言可由这些事实立得。

注解 (8.8.3) — 进而假设 Y 是一个 *Noether* 概形，f 是一个紧合态射。则由于 r 也是紧合的 (5.4.4)，从而是闭的，并且它是一个笼罩性开浸入，从而必然是一个同构 $X \xrightarrow{\sim} P$。我们将在第 III 章 (**III**, 2.3.5.1) 看到，此时 $\mathscr{S}$ 必然是一个有限型 $\mathscr{O}_Y$ 代数层。由此可知，$\mathscr{S}^\natural$ 是一个有限型 $\mathscr{S}_0^\natural$ 代数层 (8.2.10, (i) 和 8.7.2.7)；由于 C_P 可以 C 同构于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}^\natural$ (8.7.3)，故我们看到态射 $h : C_P \to C$ 是射影的；由于态射 r 是一个同构，故而 $q : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C_P$ 也是如此，由此可知，态射 $g : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C$ 是射影的。进而，由于 h 在 E_P 上的限制是一个映到 E 上的同构，并且 q 是一个同构，从而 g 的限制 (8.8.2.3) 是一个同构 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X) \xrightarrow{\sim} E$。

若进而假设 $\mathscr{L}$ 是 f 极丰沛的，则我们将在第 III 章 (**III**, 2.3.5.1) 看到，存在一个整数 $n_0 > 0$，使得对所有 $n \geqslant n_0$ 都有 $\mathscr{S}_n = \mathscr{S}_1^n$。于是由 (8.7.7) 知，$\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 可以等同

于在仿射锥 C 上顶点子概形 (等同于 Y) 暴涨后的概形 Z，并且 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面 (等同于 Y) 就是 C 的顶点子概形 Y 的逆像。

上面的某些结果在去掉 Noether 条件后仍然是成立的：

推论 (8.8.4) — 设 y 是一个概形 (相应的，拟紧分离概形)，$f : X \to Y$ 是一个紧合态射，$\mathscr{L}$ 是一个 f 丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则态射 (8.8.2.1) 是紧合 (相应的，射影) 的，并且它的限制 (8.8.2.3) 是一个同构。

为了证明 g 是紧合的，可以限于考虑 Y 是仿射的这个情形，从而只需考虑 Y 是拟紧分离概形的情形。使用 (8.8.3) 的方法可以证明 r 是一个同构 $X \xrightarrow{\sim} P$；从而 q 也是一个同构，且由于 h 在 E_P 上的限制是一个同构 $E_P \to P$，故我们看到 (8.8.2.3) 是一个同构。只消再证明 g 是射影的。

由于根据前提条件 f 是有限型的，故而可以把 (3.8.5) 应用到 (8.8.1.2) 的同态 τ 上：于是存在一个整数 $d > 0$ 和 $\mathscr{S}_d$ 的一个有限型拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 子模层 $\mathscr{E}$，使得若 $\mathscr{S}'$ 是 $\mathscr{E}$ 在 $\mathscr{S}$ 中所生成的 $\mathscr{O}_Y$ 子代数层，并且 $\tau' = \tau \circ q^*(\varphi)$ (φ 是典范含入 $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$)，则 $r' = r_{\mathscr{L},\tau'}$ 是一个浸入

$$X \longrightarrow P' = \operatorname{Proj}\mathscr{S}' \quad 。$$

进而，由于 φ 是单的，故知 r 还是一个笼罩性浸入 (3.7.6)；同理可证 r' 是一个映满的闭浸入；由于 r' 可以分解为 $X \xrightarrow{r} \operatorname{Proj}\mathscr{S} \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Proj}\mathscr{S}'$，其中 $\Phi = \operatorname{Proj}(\varphi)$，故知 Φ 也是一个映满的闭浸入。然而这就意味着 Φ 是一个同构；事实上，可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$, $\mathscr{S}' = \widetilde{S'}$，其中 S 是一个分次 A 代数，S' 是 S 的一个分次子代数。于是对任意齐次元 $t \in S'$，$S'_{(t)}$ 都是 $S_{(t)}$ 的一个子环；写出 $\operatorname{Proj}(\varphi)$ 的定义 (2.8.1)，我们看到问题归结为证明：若 B' 是环 B 的一个子环，并且对应于典范含入 $B' \to B$ 的态射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B'$ 是一个闭浸入，则这个态射必然是一个同构；然而这是缘自 (**I**, 4.2.3)。进而我们有 $\Phi^*(\mathscr{O}_{P'}(n)) = \mathscr{O}_P(n)$ (3.5.2, (ii) 和 3.5.4)，从而 $r^*(\mathscr{O}_{P'}(n))$ 同构于 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ (4.6.3)。令 $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}'^{(d)}$，于是 (3.1.8,(i)) X 可以典范等同于 $P'' = \operatorname{Proj}\mathscr{S}''$，并且 $\mathscr{L}'' = \mathscr{L}^{\otimes d}$ 可以典范等同于 $\mathscr{O}_{P''}(1)$ (3.2.9, (ii))。

据此，若 $C'' = \operatorname{Spec}\mathscr{S}''$，则 $\mathscr{S}^{\geqslant}_{P''} = \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{O}_{P''}(n)$ 可以等同于 $\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}''^{\otimes n}$，从而 $C_{P''} = \operatorname{Spec}\mathscr{S}^{\geqslant}_{P''}$ 可以等同于 $\mathbf{V}(\mathscr{L}'')$；另一方面，我们知道 (8.7.3) $C_{P''}$ 可以 C'' 同构于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}''^{\natural}$；根据 $\mathscr{S}''$ 的定义，$\mathscr{S}''^{\natural}$ 是由 $\mathscr{S}''^{\natural}_1$ 所生成的，并且 $\mathscr{S}''^{\natural}_1$ 在 $\mathscr{S}''^{\natural}_0 = \mathscr{S}''$ 上是有限型的 (8.2.10, (i) 和 (iii))，从而 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}''^{\natural}$ 在 C'' 上是射影的 (5.5.1)。现在考虑图

表

(8.8.4.1)
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{V}(\mathscr{L}) & \xrightarrow{g} & \operatorname{Spec}\mathscr{S} & = & C \\ {\scriptstyle u}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle v} & & \\ \mathbf{V}(\mathscr{L}'') & \xrightarrow[g'']{} & \operatorname{Spec}\mathscr{S}'' & = & C'' \end{array},$$

其中 g 和 g' 分别对应着 (1.5.6) 典范 j 态射

$$\mathscr{S} \longrightarrow \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n} \quad 和 \quad \mathscr{S}'' \longrightarrow \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}''^{\otimes n}$$

(3.3.2.3)（参看 (8.8.5)），v 对应着含入态射 $\mathscr{S}'' \to \mathscr{S}$，并且 u 对应着含入态射 $\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes md} \to \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n}$；易见 (3.3.2) 这个图表是交换的。我们刚才看到 g'' 是一个射影态射；另一方面，u 是一个有限态射。事实上，问题在 X 上是局部性的，故可假设 X 是仿射的，环为 A，并且 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$；此时只需注意到环 $A[T]$ 就是它的子环 $A[T]$ 上的一个有限型模（T 是未定元）。由于 Y 是一个拟紧分离概形，并且 C'' 在 Y 上是仿射的，故知 C'' 也是一个拟紧分离概形，因而 $g'' \circ u$ 是一个射影态射 (5.5.5, (ii))；根据 (8.8.4.1) 的交换性，$v\circ g$ 也是射影的，且由于 v 是仿射的，从而是分离的，故知 g 也是射影的 (5.5.5, (v))。

(8.8.5) 回到 (8.8.1) 的情形。我们将要看到，可以给出态射 $g : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C$ 的另一个定义，它对任意可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层 (不必是丰沛的) 都是有效的。为此考虑态射 τ (8.8.1.2) 所对应的 f 态射

(8.8.5.1)
$$\tau^\flat \ : \ \mathscr{S} \longrightarrow \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{L}^{\otimes n} \ ,$$

由此可以导出 (1.5.6) 一个态射 $g' : V \to C$，使得若 $\pi : V \to X$ 和 $\psi : C \to Y$ 都是结构态射，则图表

(8.8.5.2)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi} & V \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g'} \\ Y & \xleftarrow[\psi]{} & C \end{array} \qquad 和 \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & V \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g'} \\ Y & \xrightarrow[\varepsilon]{} & C \end{array}$$

都是交换的 (8.5.1.2 和 8.5.1.3)。我们现在要证明 (假设 $\mathscr{L}$ 是 f 丰沛的)，态射 g 和 g' 是相同的。

事实上，问题在 Y 上是局部性的，从而可以假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，并且 (由于 (8.8.1.3) 中的理由) 可以把 X 等同于 $P = \operatorname{Proj} S$ 的一个开集，这里 $S =$

$A \oplus \bigoplus_{n \geqslant 0} \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$；于是由 (8.8.1.4) 可以导出，对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 均有 $\Gamma(X, \mathscr{O}_P(n)) = \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$。有见于 $h = \operatorname{Spec}(\alpha)$ 的定义，其中 α 是典范 p 态射 $\widetilde{S} \to \mathscr{S}_P^{\geqslant}$ (8.6.1.2)，我们只需要验证 $\alpha^\sharp : p^* \widetilde{S} \to \mathscr{S}_P^{\geqslant}$ 在 X 上的限制与 τ 是相同的。有见于 (**0**, 4.4.3)，问题归结为证明典范同态 $\alpha_n : S_n \to \Gamma(P, \mathscr{O}_P(n))$ 与限制同态 $\Gamma(P, \mathscr{O}_P(n)) \to \Gamma(X, \mathscr{O}_P(n)) = \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ 的合成对任意 $n > 0$ 都是恒同；然则，这可由代数 S 及诸 α_n 的定义 (2.6.2) 立得。

命题 (8.8.6) — 假设（在 (8.8.5) 的记号下）若令 $f = (f_0, \lambda)$，则同态 $\lambda : \mathscr{O}_Y \to f_* \mathscr{O}_X$ 是一一的；于是：

(i) 若令 $g = (g_0, \mu)$，则 $\mu : \mathscr{O}_C \to g_* \mathscr{O}_V$ 是一个同构。

(ii) 若 X 是整（相应的，局部整且正规）的，则 C 是整（相应的，正规）的。

事实上，此时 f 态射 $\tau^\flat$

$$\tau^\flat \;:\; \mathscr{S} = \psi_* \mathscr{O}_C \;\longrightarrow\; f_* \pi_* \mathscr{O}_V \;=\; \psi_* g_* \mathscr{O}_V$$

是一个同构，并且 Y 态射 g 就是那个使得同态 $\mathscr{A}(g)$ (1.1.2) 恰好等于 $\tau^\flat$ 的态射。于是为了证明 μ 是一个 $\mathscr{O}_C$ 模层的同构，只需 (1.4.2) 证明 $\mathscr{A}(\mu) : \psi_* \mathscr{O}_C \to \psi_* g_* \mathscr{O}_V$ 是一个同构。然而根据定义 (1.1.2)，我们有 $\mathscr{A}(\mu) = \mathscr{A}(g)$，故得 (i) 的结论。

为了证明 (ii)，可以限于考虑 Y 是仿射的这个情形，从而 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$；$X$ 是整的这个条件表明，环 S 是整的 (**I**, 7.4.4)，从而 C 也是如此 (**I**, 5.1.4)。为了证明 C 是正规的，我们使用下面的引理：

引理 (8.8.6.1) — 设 Z 是一个正规整概形。则环 $\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)$ 是整且整闭的。

事实上，由 (**I**, 8.2.1.1) 知，$\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)$ 是有理函数域 $\mathrm{R}(Z)$ 中的一些整闭整环 $\mathscr{O}_z$ $(z \in Z)$ 的交集。

准此，现在首先证明 V 是局部整且正规的；为此可以限于考虑 $X = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，环 A 是整闭整环 (6.3.8)，并且 $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$ 的情形。此时 $V = \operatorname{Spec} A[T]$ 并且 $A[T]$ 是整且整闭的 ([24], p. 99)，这就证明了我们的陈言。另一方面，对于 C 的任意仿射开集 U，$g^{-1}(U)$ 都是拟紧的，因为态射 g 是拟紧的；由于 V 是局部整的，故知 $g^{-1}(U)$ 的诸连通分支都是 $g^{-1}(U)$ 中的开子概形，并且是整的，从而个数是有限的，且由于 V 是正规的，故知这些概形都是正规的 (6.3.8)。于是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_C)$（依照 (i)，它等于 $\Gamma(g^{-1}(U), \mathscr{O}_V)$）是有限个整闭整环的直合 (8.8.6.1)，这就表明 C 是正规的 (6.3.4)。

8.9 Grauert 丰沛性判别法：陈述

下面我们想要证明，(8.8.2) 中所证明的那些性质就是 f 丰沛 $\mathscr{O}_X$ 模层的本征性质，具体来说，我们要证明下面的判别法：

定理 (8.9.1) (Grauert 判别法) — 设 Y 是一个概形，$p : X \to Y$ 是一个拟紧分离态射，$\mathscr{L}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层。则为了使 $\mathscr{L}$ 是 p 丰沛的，必须且只需存在一个 Y 概形 C 和 C 的一个 Y 截面 $\varepsilon : Y \to C$ 以及一个 Y 态射 $q : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C$，具有下面的性质:

(i) 图表

(8.9.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}(\mathscr{L}) \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, "\varepsilon"'] & C \end{tikzcd}$$

是交换的，其中 j 是向量丛 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面。

(ii) q 在 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X)$ 上的限制是拟紧开浸入
$$\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X) \longrightarrow C\ ,$$
并且它的像与 $\varepsilon(Y)$ 不相交。

注意到若 C 在 Y 上是分离的，则在条件 (ii) 中可以省略掉关于开浸入的拟紧性假设；事实上，为了看出这个假设是其他性质的推论，可以限于考虑 Y 是仿射的这个情形，此时可以利用 (**I**, 5.5.1, (i) 和 5.5.10)。如果假设 X 是 Noether 的，则同样可以去掉这个拟紧性条件，因为此时 V 也是 Noether 的，从而可以利用 (**I**, 6.3.5)。

推论 (8.9.2) — 若态射 $p : X \to Y$ 是紧合的，则在 (8.9.1) 的结论中，可以假设 q 是紧合的，并且把"开浸入"换成"同构"。

直观上来说，(如果 $p : X \to Y$ 是紧合的) $\mathscr{L}$ 是 p 丰沛的当且仅当向量丛 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面可以"**收缩**"成基概形 Y 。一个特别重要的情形是 Y 是域的谱的情形，此时"收缩"作用把 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面收缩成一个点。

(8.9.3) 条件 (8.9.1) 的必要性以及推论 (8.9.2) 可由 (8.8.2) 和 (8.8.4) 立得。

为了证明 (8.9.1) 的充分性，我们考虑一个更一般的情形。(在 (8.8.2) 的记号下) 令
$$\mathscr{S}' = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}$$
和
$$V = \mathbf{V}(\mathscr{L}) = \operatorname{Spec} \mathscr{S}'\ 。$$

闭子概形 $j(X)$，也就是 $\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面，是由 $\mathscr{O}_V$ 的拟凝聚理想层 $\mathscr{J} = (\mathscr{S}'_+)^\sim$ 所定义的 (1.4.10)。这个 $\mathscr{O}_V$ 模层是可逆的，因为问题在 X 上是局部性的，并且只需

注意到多项式环 $A[T]$ 中的理想 $TA[T]$ 是一个单苇自由 $A[T]$ 模的事实。进而易见 (仍然是因为问题在 X 上的局部性)

$$\mathscr{L} \;=\; j^*\mathscr{J}$$

和

$$j_*\mathscr{L} \;=\; \mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \quad 。$$

另一方面，若

$$\pi \;:\; \mathbf{V}(\mathscr{L}) \;\longrightarrow\; X$$

是结构态射，则有 $\pi_*\mathscr{J} = \mathscr{S}'_+$ 和 $\pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) = \mathscr{L}$；从而我们有两个典范同态 $\mathscr{L} \to \pi_*\mathscr{J} \to \mathscr{L}$，第一个是典范含入 $\mathscr{L} \to \mathscr{S}'_+$，第二个是 $\mathscr{S}'_+$ 到 $\mathscr{S}'_1 = \mathscr{L}$ 上的典范投影，并且它们的合成是恒同。此外，可以把 $\pi_*\mathscr{J} = \mathscr{S}'_+ = \bigoplus_{n\geqslant 1}\mathscr{L}^{\otimes n}$ 典范嵌入乘积 $\prod_{n\geqslant 1}\mathscr{L}^{\otimes n} = \varprojlim_n \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1})$ 中 (因为 $\pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1}) = \mathscr{L}\oplus\mathscr{L}^{\otimes 2}\oplus\ldots\oplus\mathscr{L}^{\otimes n}$)，从而还有两个典范同态

(8.9.3.1)
$$\mathscr{L} \;\longrightarrow\; \varprojlim \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1}) \;\longrightarrow\; \mathscr{L}\;,$$

且它们的合成是恒同。

准此，我们可以证明 (8.9.1) 的下面一个推广：

命题 (8.9.4) — 设 Y 是一个概形，V 是一个 Y 概形，X 是 V 的一个闭子概形，并且定义 X 的理想层 $\mathscr{J}$ 是一个**可逆** $\mathscr{O}_V$ 模层；设 $j : X \to V$ 是典范含入，并且令 $\mathscr{L} = j^*\mathscr{J} = \mathscr{J}\otimes_{\mathscr{O}_V}\mathscr{O}_X$，从而 $j_*\mathscr{L} = \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$。假设结构态射 $p : X \to Y$ 是拟紧分离的，并且下面一些条件得到满足:

(i) 存在一个有限型 Y 态射 $\pi : V \to X$，满足 $\pi\circ j = 1_X$，因而 $\pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) = \mathscr{L}$。

(ii) 存在一个 $\mathscr{O}_X$ 模层同态 $\varphi : \mathscr{L} \to \varprojlim \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1})$，使得下面的合成是恒同

$$\mathscr{L} \xrightarrow{\;\varphi\;} \varprojlim \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1}) \xrightarrow{\;\alpha\;} \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \;\longrightarrow\; \mathscr{L}$$

其中 α 是典范同态。

(iii) 存在一个 Y 概形 C 和 C 的一个 Y 截面 ε 以及一个 Y 态射 $q : V \to C$，使得图表

(8.9.4.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\;j\;} & V \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ Y & \xrightarrow[\;\varepsilon\;]{} & C \end{array}$$

是交换的。

(iv) q 在 $W = V - j(X)$ 上的限制是一个映到 C 中的拟紧开浸入，并且它的像与 $\varepsilon(Y)$ 不相交。

则在这些条件下，$\mathscr{L}$ 是 p 丰沛的。

8.10 Grauert 丰沛性判别法：证明

引理 (8.10.1) — 设 $\pi : V \to X$ 是一个态射，$j : X \to V$ 是 V 的一个 X 截面，并且是一个闭浸入，$\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_V$ 的这样一个拟凝聚理想层，它定义了 j 的附随闭子概形。

(i) 对任意 $n \geqslant 0$，$\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$ 和 $\varprojlim \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1})$ 都是拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层，且我们有 $\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}) = \mathscr{O}_X$, $\pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) = j^*\mathscr{J}$ 。

(ii) 若 $X = \{\xi\} = \operatorname{Spec} k$，其中 k 是一个域，则 $\varprojlim \pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$ 可以同构于环 $\mathscr{O}_{j(\xi)}$ 在 $\mathfrak{m}_{j(\xi)}$ 进拓扑下的分离完备化。

(iii) 假设 $\mathscr{J}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_V$ 模层 (这蕴涵着

$$\mathscr{L} = j^*\mathscr{J} = \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$$

是一个可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层)，并且存在一个同态 $\varphi : \mathscr{L} \to \varprojlim \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1})$，使得合成同态 $\mathscr{L} \xrightarrow{\varphi} \varprojlim \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1}) \xrightarrow{\alpha} \pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$ (其中 α 是典范同态) 是恒同。于是若令 $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}$，则可以由 φ 典范地导出一个从 $\mathscr{S}$ 关于其典范滤解的完备化 (同构于乘积 $\prod_{n\geqslant 0} \mathscr{L}^{\otimes n}$) 到 $\varprojlim \pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$ 上的 $\mathscr{O}_X$ 代数层同构。

首先注意到 $\mathscr{O}_V$ 模层 $\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1}$ 的支集是 $j(X)$，并且 $\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1}$ 的支集包含在 $j(X)$ 中。在 (ii) 的情形下，$j(X)$ 是 V 的一个闭点 $j(\xi)$，且根据定义，$\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$ 就是 $\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1}$ 在点 $j(\xi)$ 处的茎条，也就是说，若令 $C = \mathscr{O}_{j(\xi)}$，并且用 $\mathfrak{m}$ 来标记 C 的极大理想，则它就是 C 模 $C/\mathfrak{m}^{n+1}$，此时陈言 (ii) 是显然的。

为了证明 (i)，注意到问题在 X 上是局部性的，从而可以限于考虑 X 是仿射的这个情形。设 U 是 V 的一个仿射开集；则 $j(X) \cap U$ 是 $j(X)$ 的一个仿射开集，从而 $U_0 = \pi(j(X) \cap U)$ (与 $j(X) \cap U$ 同构) 是 X 的一个仿射开集；对于 X 的任意仿射开集 $W_0 \subset U_0$，$W = \pi^{-1}(W_0) \cap U$ 都是 V 的一个仿射开集，因为 X 是分离的 (**I**, 5.5.10)；特别的，$U' = U \cap \pi^{-1}(U_0)$ 是 V 的一个仿射开集，并且显然有 $\pi(U') = U_0$ 和 $j(U_0) = j(X) \cap U$ 。据此，根据定义 $\gamma(W_0, \pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})) = \Gamma(\pi^{-1}(W_0), \mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$；然而 $\pi^{-1}(W_0)$ 的任何一个不落在 $j(W_0)$ 中的点都具有一个包含在 $\pi^{-1}(W_0)$ 中且与 $j(W_0)$ 不相交的开邻域，从而 $\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1}$ 在其上等于零，故而易见 $\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1}$ 在 $\pi^{-1}(W_0)$ 上的截面与它在 $j(W_0)$ 上的截面是一一对应的。换句话说，若 π' 是 π 在 U' 上的限制，则 $(\mathscr{O}_X|_{U_0})$ 模层 $\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})|_{U_0}$ 与 $\pi'_*((\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})|_{U'})$ 是相同的。由于 U' 和 U_0 都是仿射的，并且诸 U_0 覆盖了 X，故知 (**I**, 1.6.3) $\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$ 是拟凝聚的，

对于 $\pi_*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1})$ 的证明也是一样的。

最后，为了证明 (iii)，注意到 $\mathscr{S}$ 与 $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L})$ 无异；从而由 φ 可以典范地导出一个 $\mathscr{O}_X$ 代数层同态 $\psi:\mathscr{S}\to\varprojlim\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$ (1.7.4)；进而，这个同态把 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 映到 $\varprojlim_m \pi_*(\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1})$ 中，从而对于相应的拓扑是连续的，因而可以延拓为一个同态 $\widehat{\psi}:\widehat{\mathscr{S}}\to\varprojlim\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$。为了证明它是一个同构，可以，与 (i) 中的证明方法一样，把问题归结到 $X=\operatorname{Spec}A$, $V=\operatorname{Spec}B$ 都是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{J}=\widetilde{\mathfrak{J}}$，其中 $\mathfrak{J}$ 是 B 的一个理想；π 对应着一个含入 $A\to B$，它把 A 等同于 $\mathfrak{J}$ 在 B 中的补因子，并且 $\mathscr{L}$（相应的，$\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$）就是附随于 A 模 $L=\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$（相应的，$B/\mathfrak{J}^{n+1}$）的拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层。由于 $\mathscr{J}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_V$ 模层，故可进而假设 $\mathfrak{J}=Bt$，其中 t 在 B 中不是零因子。此时由关系式 $B=A\oplus Bt$ 可以导出，对任意 $n>0$ 均有

$$B \;=\; A\oplus At\oplus At^2\oplus\ldots\oplus At^n\oplus Bt^{n+1}\quad,$$

从而我们有一个从形式幂级数环 $A[[T]]$ 到 $C=\varprojlim B/\mathfrak{J}^{n+1}$ 上的典范 A 同构，它把 t 映到 T。另一方面，我们有 $L=A\bar{t}$，其中 $\bar{t}$ 是 $t \bmod Bt^2$ 的同余类，并且根据前提条件，同态 φ 把 $\bar{t}$ 映到一个与 $t \bmod Ct^2$ 同余的元素 $t'\in C$。由此可以通过对 n 进行归纳而导出

$$A\oplus At'\oplus\ldots\oplus At'^n\oplus Ct^{n+1} \;=\; A\oplus At\oplus\ldots\oplus At^n\oplus Ct^{n+1}\quad,$$

这就证明了同态 $\widehat{\psi}$ 对应着一个从 $\prod_{n\geqslant 0} L^{\otimes n}$ 到 C 上的同构。

引理 (8.10.2) — *在 (8.10.1) 的前提条件下，设 $g:X'\to X$ 是一个态射，$V'=V\times_X X'$，并且 $\pi':V'\to X'$, $g':V'\to V$ 都是典范投影，从而有交换图表*

$$\begin{tikzcd} V & V' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[from=u, "\pi"'] & X' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd},$$

于是 $j'=j\times 1_{X'}$ 是 V' 的一个 X' 截面，它是一个闭浸入，并且 $\mathscr{J}'=(g'^*\mathscr{J})\mathscr{O}_{V'}$ 是这样一个拟凝聚 $\mathscr{O}_{V'}$ 理想层，它定义了 j' 的附随闭子概形。进而，我们有 $\pi'_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1}) = g^*\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{n+1})$。最后，$\mathscr{J}'$ 是一个典范同构于 $g'^*\mathscr{J}$ 的 $\mathscr{O}_{V'}$ 模层，从而若 $\mathscr{J}$ 是可逆 $\mathscr{O}_V$ 模层，则 $\mathscr{J}'$ 也是可逆的。

j' 是闭浸入的事实可由 (**I**, 4.3.1) 得出，它是 V' 的一个 X' 截面的事实可由基扩张的函子性推出。进而，若 Z（相应的，Z'）是 V（相应的，V'）的附随于 j（相应的，j'）的闭子概形，则有 $Z'=g'^{-1}(Z)$ (**I**, 4.3.1)，于是第二个陈言缘自 (**I**, 4.4.5)。为了证明其余的陈言，可以按照 (8.10.1) 的方法，把问题归结到 X, V 和 X' 都是仿射的这个情形，此时 V' 也是仿射的；沿用 (8.10.1) 的证明中的记号，并设 $X'=\operatorname{Spec}A'$。

则我们有 $V' = \operatorname{Spec} B'$，其中 $B' = B \otimes_A A'$，并且 $\mathscr{J}' = \widetilde{\mathfrak{J}'}$，其中 $\mathfrak{J}' = \operatorname{Im}(\mathfrak{J} \otimes_A A')$。从而有 $B'/\mathfrak{J}'^{n+1} = (B/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_A A'$；进而，由于 $\mathfrak{J}$ 是 B（作为 A 模）的一个直和因子，故知 $\mathfrak{J} \otimes_A A'$ 是 B'（作为 A' 模）的一个直和因子，从而可以典范等同于 $\mathfrak{J}'$。

推论 (8.10.3) — 假设 (8.10.1) 的前提条件得到满足，并进而假设 π 是有限型的，且 $\mathscr{J}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_V$ 模层。则对任意 $x \in X$，纤维 $\pi^{-1}(x)$ 在点 $j(x)$ 处的局部环都是一个 1 维正则环（从而是整的），并且它的完备化可以同构于形式幂级数环 $\boldsymbol{k}(x)[[T]]$（T 是未定元）；进而，$\pi^{-1}(x)$ 中只有一个不可约分支包含 $j(x)$。

由于 $\pi^{-1}(x) = V \times_X \operatorname{Spec} \boldsymbol{k}(x)$，故可利用 (8.10.2) 把问题归结到 X 是域 K 的谱的情形。由于 π 是有限型的 (**I**, 6.3.4, (iv))，故知 $\mathscr{O}_{j(x)}$ 是一个 Noether 局部环。从而在 $\mathfrak{m}_{j(x)}$ 进拓扑下是分离的 (**0**, 7.3.5)；于是由 (8.10.1, (ii) 和 (iii)) 知，这个环的完备化可以同构于 $K[[T]]$，因而 $\mathscr{O}_{j(\xi)}$ 是正则的，并且是 1 维的 ([1], p. 17-01, 定理 1)；最后，因为 $\mathscr{O}_{j(\xi)}$ 是整的，从而 $j(x)$ 只能落在 V 的（有限个）不可约分支中的唯一一个之中 (**I**, 5.1.4)。

推论 (8.10.4) — 假设 (8.10.1) 的前提条件得到满足，并进而假设 $\mathscr{J}$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_V$ 模层。设 $W = V - j(X)$；对于 $\mathscr{O}_X$ 的任意拟凝聚理想层 $\mathscr{K}$，令 $\mathscr{K}_V = (\pi^*\mathscr{K})\mathscr{O}_V$ 和 $\mathscr{K}_W = \mathscr{K}_V|_W$。则 $\mathscr{K}_V$ 是 $\mathscr{O}_V$ 的具有下面这个性质的最大拟凝聚理想层: 它在 W 上的限制等于 $\mathscr{O}_W$。

事实上，按照 (8.10.1) 所示，问题在 X 和 V 上都是局部性的；从而可以沿用 (8.10.1) 的证明中的记号，并设 $\mathfrak{J} = Bt$，其中 t 在 B 中不是零因子。进而我们有 $W = \operatorname{Spec} B_t$，并且 $\mathscr{K} = \widetilde{\mathfrak{K}}$，其中 $\mathfrak{K}$ 是 A 的一个理想。故得 $(\pi^*\mathscr{K})\mathscr{O}_V = (\mathfrak{K}.B)^{\sim}$ (**I**, 1.6.9)，$\mathscr{K}_W = (\mathfrak{K}.B_t)^{\sim}$，并且 B 的那个在 B_t 中的典范像等于 $\mathfrak{K}.B_t$ 的最大理想就是 $\mathfrak{K}.B_t$ 的逆像，也就是说，它是由这样的 $s \in B$ 所组成的集合，即可以找到整数 $n > 0$ 使得 $t^n s \in \mathfrak{K}.B$。现在我们需要证明这个关系式就蕴涵着 $s \in \mathfrak{K}.B$，或等价的，t 在 $B/\mathfrak{K}.B = (A/\mathfrak{K}) \otimes_A B$ 中的典范像不是零因子，而这是缘自 (8.19.2)，应用到 $X' = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{K})$ 上。

推论 (8.10.5) — 假设 (8.10.2) 的前提条件得到满足，设 $W = V - j(X)$，x 是 X 的一点，$\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的一个拟凝聚理想层，z 是 $\pi^{-1}(x)$ 的那个包含 $j(x)$ 的不可约分支的一般点 (8.10.3)。

(i) 设 g 是 $\mathscr{O}_V$ 在 V 上的一个截面，且使得 $g|_W$ 成为 $\mathscr{K}_W$ 在 W 上的一个截面（记号取自 (8.10.4)）。则 g 是 $\mathscr{K}_V$ 的一个截面；进而若 $g(z) \neq 0$，并且对任意整数 $m > 0$，我们用 g_m^x 来标记 g 在 $\Gamma(X, \pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{m+1}))$ 中的典范像 g_m 的在点 x 处的芽，则可以找到一个整数 $m > 0$，使得 g_m^x 在

$$(\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{m+1}))_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \boldsymbol{k}(x)$$

中的像不等于零。

(ii) 进而假设 (8.10.1, (iii)) 中的条件得到满足。于是若 $\mathscr{K}_V$ 在 V 上有一个截面 g 满足 $g(z) \neq 0$，则可以找到一个整数 $n \geqslant 0$ 和 $\mathscr{K}.\mathscr{L}^{\otimes n} = \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n} \subset \mathscr{L}^{\otimes n}$ 的一个截面 f，使得 $f(x) \neq 0$。若 g 是 $\mathscr{J}$ 的一个截面，则可以取 $n > 0$。

(i) 根据前提条件，$g|_W$ 在 $\mathscr{O}_W$ 中所生成的理想层包含在 $\mathscr{K}_W$ 中，故由 (8.10.4) 知，g 在 $\mathscr{O}_V$ 中所生成的理想层包含在 $\mathscr{K}_V$ 中，换句话说，g 是 $\mathscr{K}_V$ 的一个截面。为了证明第二个陈言，仍然可以假设 X 和 V 都是仿射的，并沿用 (8.10.4) 的记号；此时纤维 $\pi^{-1}(x)$ 是仿射的，环为 $B' = B \otimes_A \boldsymbol{k}(x)$，并且在 B' 中有一个不是零因子的元素 t'，使得 $B' = B \oplus B't'$。由于 $j(x)$ 是 z 的一个特殊化，并且 $g(z) \neq 0$，从而必然有 $g_{j(x)} \neq 0$。然而 $\mathscr{O}_{j(x)}$ 是一个分离局部环 (8.10.3)，从而可以嵌入它的完备化之中，于是 g 在这个完备化中也不是 0。然则，该完备化可以同构于 $\varprojlim_n (B'/B't'^{n+1})$ (8.10.3)；从而若 $g' = g \otimes 1 \in B'$，则可以找到一个整数 m，使得 $g' \in B't'^{m+1}$，或者说，g' 在 $B'/B't'^{m+1}$ 中的像 g'_m 不是 0。而由于 g'_m 就是 g^x_m 的像，从而我们的陈言得证。

(ii) 依照 (8.10.1, (iii))，$\pi_*(\mathscr{O}_V/\mathscr{J}^{m+1})$ 可以同构于诸 $\mathscr{L}^{\otimes k}$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$ 的直和；我们以 f_k 来标记 g_m 在该同构下所对应的 $\bigoplus_{k=0}^{m} \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes k})$ 中元素的第 k 个分量，它是 $\mathscr{L}^{\otimes k}$ 的一个整体截面。按照 (i) 的方法选出 m，则由 (i) 知，存在一个指标 k 使得 $f_k(x) \neq 0$。为了证明 f_k 是 $\mathscr{K}\mathscr{L}^{\otimes k}$ 的一个截面，只需考虑 X 和 V 都是仿射的这个情形，此时由 $g \in \mathfrak{K}.B$（记号取自 (8.10.4)）立得结论。最后一个陈言缘自下面的事实：条件 $g \in \Gamma(V, \mathscr{J})$ 蕴涵着 $f_0 = 0$。

(8.10.6) (8.9.4) 的证明 — 问题在 Y 上是局部性的 (4.6.4)；由于 ε 是一个 Y 截面，从而可以把 C 换成 $\varepsilon(Y)$ 的某个点的仿射开邻域 U，且使得 $\varepsilon(Y) \cap U$ 在 U 中是闭的。换句话说，可以假设 C 是仿射的，Y 是 C 的一个闭子概形（从而是仿射的），由 $\mathscr{O}_C$ 的一个拟凝聚理想层 $\mathscr{I}$ 所定义。此时由于 p 是拟紧分离的，故知 X 是一个拟紧分离概形，从而归结为证明 $\mathscr{L}$ 是丰沛的 (4.6.4)。再依照 (4.5.2, a)) 的判别法，只需证明下面这件事：对于 $\mathscr{O}_X$ 的任意拟凝聚理想层 $\mathscr{K}$ 和任意一个没有落在 $\mathscr{O}_X/\mathscr{K}$ 的支集中的点 $x \in X$，均可找到一个整数 $n > 0$ 和 $\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ 的一个整体截面 f，使得 $f(x) \neq 0$。

为此，令

$$\mathscr{K}_V = (\pi^*\mathscr{K})\mathscr{O}_V$$

和

$$\mathscr{K}_W = \mathscr{K}_V|_W, \quad \text{其中} \quad W = V - j(X) ;$$

由于 q 在 W 上的限制是一个映到 C 中的拟紧浸入，故由 (**I**, 9.4.2) 知，$\mathscr{K}_W$ 就是 $\mathscr{O}_V$ 的

某个拟凝聚理想层 $\mathscr{K}'_V$ 在 W 上的限制，并且这个 $\mathscr{K}'_V$ 具有下面的形状

$$\mathscr{K}'_V = (q^*\mathscr{K}_C)\mathscr{O}_V ,$$

其中 $\mathscr{K}_C$ 是 $\mathscr{O}_C$ 的一个拟凝聚理想层。进而，根据前提条件，$q^{-1}(Y) \subset j(X)$，并且 Y 是由理想层 $\mathscr{I}$ 所定义的，故知 $(q^*\mathscr{I})\mathscr{O}_V$ 在 W 上的限制与 $\mathscr{O}_V$ 在 W 上的限制是相同的，从而 $\mathscr{K}_W$ 也是 $q^*(\mathscr{I}\mathscr{K}_C)\mathscr{O}_V$ 在 W 上的限制，故可假设 $\mathscr{K}_C \subset \mathscr{I}$，于是有见于 (**I**, 4.4.6) 以及 (8.9.4.1) 的交换性，我们得到

(8.10.6.1) $$\mathscr{K}'_V \subset (q^*\mathscr{I})\mathscr{O}_V \subset \mathscr{J} 。$$

进而，由 (8.10.4) 可以推出

(8.10.6.2) $$\mathscr{K}'_V \subset \mathscr{K}_V 。$$

据此，由 (8.10.3) 知，$j(x)$ 只落在 $\pi^{-1}(x)$ 的唯一一个不可约分支中；设 z 是该分支的一般点，并且令 $z' = q(z)$。依照 (8.10.5)，问题归结为证明 (有见于 (8.10.6.1) 和 (8.10.6.2))：可以找到 $\mathscr{K}'_V$ 在 V 上的一个截面 g，使得 $g(z) \neq 0$。然则，根据前提条件，$\mathscr{K}$ 在 x 的某个开邻域上的限制等于 $\mathscr{O}_X$ 的限制；另一方面，由 (8.10.3) 知，我们有 $z \neq j(x)$，从而 $z \in W$，因而 $(\mathscr{K}_W)_z = \mathscr{O}_{V,z}$，故由定义知，$(\mathscr{K}_C)_{z'} = \mathscr{O}_{C,z}$。因为 C 是仿射的，从而可以找到 $\mathscr{K}_C$ 在 C 上的一个截面 g'，使得 $g'(z') \neq 0$，取 g 是 $\mathscr{K}'_V$ 的那个典范对应着 g' 的截面，则有 $g(z) \neq 0$，这就完成了证明。

注解 (8.10.7) — 我们不知道在 (8.9.4) 的陈述中条件 (ii) 是否可以省略。但无论如何，若不假设存在一个满足 $\pi \circ j = 1_X$ 的 Y 态射 $\pi : V \to X$，则结论是不能成立的。我们简要说明一下如何作一个反例出来，细节留待以后再讨论。取 $Y = \operatorname{Spec} k$，其中 k 是一个域，$C = \operatorname{Spec} A$，其中 $A = k[T_1, T_2]$。Y 截面 ε 对应于增殖同态 $A \to k$。我们以 C' 来标记在 C 上闭点 $a = \varepsilon(Y)$ 暴涨后的概形；设 D 是 a 在 C' 中的逆像，考虑 D 中的一个闭点 b，并以 V 来标记在 C' 上 b 暴涨后的概形；X 是 a 在结构态射 $q : V \to C$ 下的逆像，它是 V 的一个闭子概形。可以证明，X 是两个不可约分支 X_1, X_2 的并集，其中 X_1 是 b 在 V 中的逆像。易见 $\mathscr{O}_V$ 的定义了 X 的那个理想层 $\mathscr{J}$ 仍然是可逆的，但是可以证明 $j^*\mathscr{J} = \mathscr{L}$ (j 是典范含入 $X \to V$) 不是丰沛的，只需考虑 $\mathscr{L}$ 在 X_1 上的逆像的“次数”，假如 $\mathscr{L}$ 是丰沛的，则该次数必须 > 0，然而我们可以证明 (通过一个初等的相交数计算) 该次数等于 0。

8.11 收缩的唯一性

引理 (8.11.1) — 设 U, V 是两个概形，$h = (h_0, \lambda) : U \to V$ 是一个映满态射。假设:

1° $\lambda : \mathscr{O}_V \to h_*\mathscr{O}_U) = (h_0)_*(\mathscr{O}_U)$ 是一个同构。

2° V 的底空间可以等同于 U 的底空间在关系 $h_0(x) = h_0(y)$ 下的商空间（如果态射 h 是开的，或闭的 (例如紧合的)，则该条件总是成立的)。

则对任意概形 W，映射

(8.11.1.1) $$\mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W)$$

它把 V 到 W 的一个态射 $v = (v_0, \nu)$ 映到态射 $u = v \circ h = (u_0, \mu)$，都是一个从 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 到这样一些 u 的集合上的一一映射，这个 u 使得 u_0 在每个纤维 $h_0^{-1}(x)$ 上都是常值的。

易见若 $u = v \circ h$（从而 $u_0 = v_0 \circ h_0$），则 u_0 在每个集合 $h_0^{-1}(x)$ 上都是常值的。反过来，若 u 具有该性质，我们证明存在唯一一个 $v \in \mathrm{Hom}(V, W)$，使得 $u = v \circ h$。满足 $u_0 = v_0 \circ h_0$ 的连续映射 $u_0 : V \to W$ 的存在性和唯一性是缘自前提条件，因为 h_0 可以等同于 U 到 U/R 上的典范映射。另一方面，必要时把 V 换成一个同构的概形，可以假设 λ 是恒同；此时根据前提条件，μ 是这样一个同态 $\mu : \mathscr{O}_W \to (u_0)_*(\mathscr{O}_U) = (v_0)_*(h_0)_*(\mathscr{O}_U)$，它所对应的同态 $\mu^\sharp : u_0^*\mathscr{O}_W \to \mathscr{O}_U$ 在每根茎条上都是局部同态。由于 $(v_0)_*(h_0)_*(\mathscr{O}_U) = (v_0)_*(\mathscr{O}_V)$，从而必有 $\nu = \mu$，问题归结为证明对应的同态 $\nu^\sharp : v_0^*\mathscr{O}_W \to \mathscr{O}_V$ 在每根茎条上都是局部同态。然则，对任意 $y \in Y$，均可找到一个 $x \in U$ 使得 $y = h_0(x)$；令 $z = v_0(y) = u_0(x)$。则 (**0**, 3.5.5) 同态 $\mu_x^\sharp$ 可以分解为

$$\mu_x^\sharp \;:\; \mathscr{O}_x \xrightarrow{\nu_y^\sharp} \mathscr{O}_y \xrightarrow{\lambda_x^\sharp} \mathscr{O}_x \quad 。$$

根据前提条件，$\lambda_x^\sharp$ 和 $\mu_x^\sharp$ 都是局部同态；从而 $\lambda_x^\sharp$ 把 $\mathscr{O}_y$ 中的可逆元都映成 $\mathscr{O}_x$ 的可逆元；若 $\nu_y^\sharp$ 把 $\mathscr{O}_x$ 的某个不可逆元映成 $\mathscr{O}_y$ 的可逆元，则 $\mu_x^\sharp$ 将把 $\mathscr{O}_x$ 中的这个元素映成 $\mathscr{O}_x$ 的一个可逆元，这与前提条件矛盾，故得引理。

推论 (8.11.2) — 设 U 是一个整概形，V 是一个正规概形；则任何广泛闭且双有理的紧贴态射 $h : U \to V$ 都是一个同构。

若 $h = (h_0, \lambda)$，则根据前提条件，h_0 是单的和闭的，并且 $h_0(U)$ 在 V 中是稠密的，从而 h_0 是 U 到 V 上的一个同胚。于是为了证明这个推论，只需证明 $\lambda : \mathscr{O}_V \to (h_0)_*(\mathscr{O}_U)$ 是一个同构：因为这样就可以应用 (8.11.1) 来证明映射 (8.11.1.1) 是一一的，（每根纤维 $h_0^{-1}(x)$ 都只含一点）；从而 h 是一个同构。问题在 V 上显然是局部性的，故可假设 $V = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，并且它的环 A 是整闭整环 (8.8.6.1)；此时 h 对应着 (**I**, 2.2.4) 一个同态 $\varphi : A \to \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$，且问题归结为证明 φ 是一个同构。然则，若 K 是 A 的分式域，则根据前提条件，$\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ 以 K 为分式域，并且 A 是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ 的一个子环，因为 φ 是典范含入 (**I**, 8.2.7)。由于态射 h 满足 (7.3.11) 的条件，故知 $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ 是 A 在 K 中的相对整闭包的一个子环，从而根据前提条件，它和 A 是相同的。

注解 (8.11.3) — 我们将在第 III 章 (**III**, 4.4.11) 看到，如果 V 是一个局部 *Noether* 概形，则任何紧合且拟有限的态射 $h : U \to V$（特别的，满足 (8.11.2) 中条件的任何态射）都必然是有限的。从而在这种情形下，(8.11.2) 可由 (6.1.15) 推出。

(8.11.4) 下面我们要证明，在 Grauert 判别法 (8.9.1) 中，概形 C 和“收缩” q 本质上是唯一确定的。

引理 (8.11.5) — 设 Y 是一个概形，$p : X \to Y$ 是一个紧合态射，$\mathscr{L}$ 是一个 p 丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，C 是一个 Y 概形，$\varepsilon : Y \to C$ 是一个 Y 截面，$q : V = \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C$ 是一个 Y 态射，且使得图表 (8.9.1.1) 是交换的。进而假设在 $p = (p_0, \theta)$ 中，$\theta : \mathscr{O}_Y \to p_*\mathscr{O}_X$ 是一个同构。现在设 $\mathscr{S}' = \bigoplus_{n\geqslant 0} p_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$，$C' = \operatorname{Spec}\mathscr{S}'$，并设 $q' : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C'$ 是典范 Y 态射 (8.8.5)，则有唯一一个 Y 态射 $u : C' \to C$，使得 $q = u \circ q'$。

θ 上的前提条件表明，p 是映满的；依照 (8.8.4)，q' 在 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) = j(X)$ 上的限制是一个映到 $C' - \varepsilon'(Y)$ 上的同构（ε' 是 C' 的顶点截面），故由 (8.8.4) 知，q' 是紧合且映满的；进而依照 (8.8.6)，若令 $q' = (q'_0, \tau)$，则 $\tau : \mathscr{O}_{C'} \to q'_*(\mathscr{O}_V)$ 是一个同构。从而引理 (8.11.1) 中的前提条件得到满足，因而我们只需证明 q 在每根纤维 ${q'}^{-1}(z')$ ($z' \in C'$) 上都是常值的。然则对于 $z' \notin \varepsilon'(Y)$，这个条件很容易验证。另一方面，若 $z' \in \varepsilon'(Y)$，则有唯一一个 $y \in Y$ 满足 $z' = \varepsilon'(y)$，并且依照 (8.8.5.2) 的交换性以及 q' 把 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X)$ 映到 $C' - \varepsilon'(Y)$ 中的事实，我们有 ${q'}^{-1}(z') = j(p^{-1}(y))$；从而图表 (8.9.1.1) 的交换性就给出了我们的陈言。

推论 (8.11.6) — 在 (8.11.5) 的前提条件下，进而假设 q 是紧合的，并且 q 在 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X)$ 上的限制是一个映到 $C - \varepsilon(Y)$ 上的同构。则态射 u 是广泛闭的、映满的、和紧贴的，并且它在 $C' - \varepsilon'(Y)$ 上的限制是一个映到 $C - \varepsilon(Y)$ 上的同构。

由于 q' 是一个从 $\mathbf{V}(\mathscr{L}) - j(X)$ 到 $C' - \varepsilon'(Y)$ 上的同构 (8.8.4)，从而最后一个陈言可由 $q = u \circ q'$ 立得。进而，图表 (8.8.5.2) 和 (8.9.1.1) 的交换性表明，u 在 C' 的闭子概形 $\varepsilon'(Y)$ 上的限制是一个映到 C 的闭子概形 $\varepsilon(Y)$ 上的同构，由此立知，对任意 $z' \in \varepsilon'(Y)$，若令 $z = u(z')$，则 u 定义了一个从 $\boldsymbol{k}(z)$ 到 $\boldsymbol{k}(z')$ 上的同构。这些注解说明了 u 是一一的和紧贴的；进而，若 ψ 和 ψ' 是结构态射 $C \to Y$, $C' \to Y$，则有 $\psi' = \psi \circ u$，且由于 ψ' 是分离的 (1.2.4)，故知 u 也是如此 (**I**, 5.5.1, (v))。另一方面，我们在引理 (8.11.5) 的证明中已经看到，q' 是映满的；由于 $q = u \circ q'$ 是紧合的，故由 (5.4.3) 和 (5.4.9) 得知，u 是广泛闭的。

命题 (8.11.7) — 设 Y 是一个概形，X 是一个**整**概形，$p : X \to Y$ 是一个紧合态射，$\mathscr{L}$ 是一个 p 丰沛的可逆 $\mathscr{O}_X$ 模层，C 是一个**正规** Y 概形，$\varepsilon : Y \to C$ 是一个 Y 截面，$q : V = \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to C$ 是一个 Y 态射，且使图表 (8.9.1.1) 成为交换的。进而假设在 $p = (p_0, \theta)$ 中，$\theta : \mathscr{O}_Y \to p_*\mathscr{O}_X$ 是一个同构。现在设 $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} p_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$，$C' =$

$\operatorname{Spec}\mathscr{S}'$，并且 $q':\mathbf{V}(\mathscr{L})\to C'$ 是典范 Y 态射 (8.8.5)。则满足 $q=u\circ q'$ 的那个唯一的 Y 态射 $u:C'\to C$ 是一个同构。

由 (8.8.6) 知，C' 是整的；由于 u 是底空间上的一个同胚 $C'\to C$（因为根据 (8.11.6)，u 是一一的，并且是闭的），故知 C 是不可约的，从而是整的，又因为 u 在 C' 的一个非空开集上的限制是一个映到 C 的某个开集上的同构，故知 u 是双有理的。因为我们假设 C 是正规的，故只需应用 (8.11.2) 即可得到结论。

注解 (8.11.8) — (i) 注意到 C 是正规的这个条件蕴涵着 X 也是如此。事实上，此时 $C'=\operatorname{Spec}\mathscr{S}'$ 是正规的（因为它同构于 C），并且是整的（依据 (8.8.6)）；由此就可以说明 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 是正规的。事实上，问题在 Y 上是局部性的；若 Y 是仿射的，$\mathscr{S}'=\widetilde{S'}$，则环 $S'=\Gamma(C',\mathscr{S}')$ 是整且整闭的 (8.8.6.1)，从而对任意齐次元 $f\in S'_+$，分次环 S'_f 都是整且整闭的 ([13], t. I, p. 257 和 261)，因而它的 0 次项环 $S'_{(f)}$ 也是如此，因为 S'_f 和 $S'_{(f)}$ 的分式域的交集就等于 $S'_{(f)}$；这证明了我们的陈言 (6.3.4)。最后，由于 X 同构于 $\operatorname{Proj}\mathscr{S}'$ 的一个开子概形 (8.8.1)，故知 X 也是正规的。从而命题 (8.11.7) 也可以写成下面的形式：*若 X 是整且正规的，$p=(p_0,\theta):X\to Y$ 是一个紧合态射，并使得 $\theta:\mathscr{O}_Y\to p_*\mathscr{O}_X$ 是一个同构，则对任意 p 丰沛的 $\mathscr{O}_X$ 模层 $\mathscr{L}$，都只有唯一一种收缩 $V=\mathbf{V}(\mathscr{L})$ 的零截面的方式，使得收缩后的概形 C 是一个正规 Y 概形，并且收缩态射 $q:V\to C$ 是一个紧合 Y 态射。*

(ii) 如果 p 是紧合的，则条件 $p_*\mathscr{O}_X=\mathscr{O}_Y$ 只是一个辅助假设，并不对结果的普遍性构成真正的限制。事实上，若它不满足，则只需把 Y 换成 Y 概形 $Y'=\operatorname{Spec}p_*\mathscr{O}_X$ 并且把 X 看作是 Y' 概形即可。我们将在第 III 章, § 4 中讨论这个一般方法。

8.12 投影锥上的拟凝聚层

(8.12.1) 回到 (8.3.1) 中的记号和前提条件。设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚的分次 $\mathscr{S}$ 模层；为了避免误解，当把 $\mathscr{M}$ 看作是不分次的 $\mathscr{S}$ 模层的时候，我们用 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 来标记 $\mathscr{M}$ 的附随拟凝聚 $\mathscr{O}_C$ 模层 (1.4.3)，而当把 $\mathscr{M}$ 看作是分次 $\mathscr{S}$ 模层的时候，我们用 $\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M})$ 来标记 $\mathscr{M}$ 的附随拟凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层（换句话说，它就是我们在 (3.2.2) 中用 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 来表示的那个 $\mathscr{O}_X$ 模层）。我们再令

(8.12.1.1)
$$\mathscr{M}_X=\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(n))\ ;$$

拟凝聚分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{S}_X$ 就是 (8.6.1.1) 所定义的那个，并且 $\mathscr{M}_X$ 具有一个（拟凝聚）分次 $\mathscr{S}_X$ 模层的结构，它是由下面的典范同态所定义的 (3.2.6.1)

(8.11.1.2)
$$\mathscr{O}_X(m)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(n))\longrightarrow\mathscr{P}roj_0(\mathscr{S}(m)\otimes_{\mathscr{S}}\mathscr{M}(n))\longrightarrow\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(m+n))\ ,$$

借助交换图表 (2.5.11.4) 就可以验证这是一个模层结构。

若 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，则 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$ 且 $\mathscr{M}=\widetilde{M}$，其中 S 是一个分次 A 代数，M 是一个分次 A 模，此时依照定义和 (8.2.9.1)，对任意齐次元 $f\in S_+$，均有

(8.12.1.3) $$\Gamma(X_f,\mathscr{P}roj\,\widetilde{M}) \;=\; M_f \quad 。$$

现在考虑拟凝聚分次 $\widehat{\mathscr{S}}$ 模层

(8.12.1.4) $$\widehat{\mathscr{M}} \;=\; \mathscr{M}\otimes_{\mathscr{S}}\widehat{\mathscr{S}}$$

（$\widehat{\mathscr{S}}$ 是由 (8.3.1.1) 所定义的）；由此可以导出一个拟凝聚的分次 $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 模层 $\mathscr{P}roj_0(\widehat{\mathscr{M}})$，我们把它记为

(8.12.1.5) $$\mathscr{M}^{\square} \;=\; \mathscr{P}roj_0(\widehat{\mathscr{M}}) \quad 。$$

易见 (3.2.4) $\mathscr{M}^{\square}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个加性正合函子，并且与直和及归纳极限可以交换。

命题 (8.12.2) — 在 (8.3.2) 的记号下，我们有函子性的典范同构

(8.12.2.1) $$i^*(\mathscr{M}^{\square}) \;\xrightarrow{\sim}\; \widetilde{\mathscr{M}} \;, \qquad j^*(\mathscr{M}^{\square}) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}) \quad 。$$

事实上，依照 (3.2.3)，$i^*(\mathscr{M}^{\square})$ 可以典范等同于 $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathscr{S}}/(\mathbf{z}-1)\widehat{\mathscr{S}})$ 上的 $(\widehat{\mathscr{M}}/(\mathbf{z}-1)\widehat{\mathscr{M}})^{\sim}$；从而 (8.12.2.1) 中的第一个典范同构可由典范同构 $\widehat{\mathscr{M}}/(\mathbf{z}-1)\widehat{\mathscr{M}}\xrightarrow{\sim}\mathscr{M}$ 立得 (1.4.1)。另一方面，典范浸入 $j:X\to\widehat{C}$ 对应着典范同态 $\widehat{\mathscr{S}}\to\mathscr{S}$，它的核是 $\mathbf{z}\widehat{\mathscr{S}}$ (8.3.2)；于是8.12.2.1) 中的第二个同态是典范同态 (3.5.2, (ii)) 的一个特殊情形，因为此时我们有 $\widehat{\mathscr{M}}\otimes_{\widehat{\mathscr{S}}}\mathscr{S}=\mathscr{M}$；为了验证它是一个同构，可以限于考虑 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的这个情形，此时 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$，$\mathscr{M}=\widetilde{M}$；参照 (2.8.8)，问题归结为证明对 S_+ 中的任意齐次元 f，上述同态限制到 X_f 上都给出一个同构，然而这是显然的。

由于 (8.12.2.1) 的第一个同构的缘故，适当混用一下名词，我们也把 $\mathscr{M}^{\square}$ 称为 $\mathscr{O}_C$ 模层 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 的射影闭包（假定 $\mathscr{O}_C$ 模层 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 的定义中已经指明了 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$ 上的分次结构）。

(8.12.3) 在 (8.3.5) 的记号下，我们有一个函子性的典范同态

(8.12.3.1) $$p^*(\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M})) \;\longrightarrow\; \mathscr{M}^{\square}|_{\widehat{E}} \quad 。$$

事实上，这是 (3.5.6) 中的同态 $v^\sharp$ 的一个特殊情形。若 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，$\mathscr{S}=\widetilde{S}$，$\mathscr{M}=\widetilde{M}$，则参照 (2.8.8) 我们看到，(8.12.3.1) 在 $p^{-1}(X_f)=\widehat{C}_f$ 上的限制（f 是 S_+ 中的一个齐次元）对应着典范同态

(8.12.3.2) $$M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}S_f^{\leqslant} \;\longrightarrow\; M_f^{\leqslant}$$

这是有见于 (8.2.3.2) 和 (8.2.5.2)。

(8.12.4) 现在我们回到 (8.5.1) 中的前提条件和记号。于是由 (1.5.6) 知，对任意拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$，一方面我们有一个 $\mathscr{O}_{C'}$ 模层的典范同构

(8.12.4.1) $$\Phi^*\widetilde{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} \left(q^*\mathscr{M} \otimes_{q^*\mathscr{S}} \mathscr{S}'\right)^{\sim} 。$$

另一方面 (3.5.6) 表明我们有一个典范 $\operatorname{Proj}(\varphi)$ 态射

(8.12.4.2) $$\mathscr{P}roj_0\mathscr{M} \longrightarrow \left(\mathscr{P}roj_0\big(q^*\mathscr{M} \otimes_{q^*\mathscr{S}} \mathscr{S}'\big)\right)\Big|_{G(\varphi)}$$

和一个典范 $\widehat{\Phi}$ 态射

(8.12.4.3) $$\mathscr{P}roj_0\widehat{\mathscr{M}} \longrightarrow \left(\mathscr{P}roj_0\big(q^*(\widehat{\mathscr{M}}) \otimes_{q^*\widehat{\mathscr{S}}} \widehat{\mathscr{S}'}\big)\right)\Big|_{G(\widehat{\varphi})} 。$$

(8.12.5) 现在我们考虑 (8.6.1) 的情形，并沿用那里的记号；这相当于在上述情形中取 $Y' = X$，$q : X \to Y$ 是结构态射，并且 φ 是典范 q 态射 (8.6.1.2)。于是我们有一个典范同构

(8.12.5.1) $$q^*\mathscr{M} \otimes_{q^*\mathscr{S}} \mathscr{S}_X^{\geqslant} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_X^{\geqslant} ,$$

这里 $\mathscr{M}_X^{\geqslant} = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(n))$。事实上，可以限于考虑 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的这个情形，则 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$ 且 $\mathscr{M} = \widetilde{M}$，在每个仿射开集 X_f（f 是 S_+ 中的齐次元）上都定义出同构 (8.12.5.1)，再验证它们与由 f 到 f 的齐次倍元的限制运算是相容的。现在根据 (8.6.2.1)，(8.12.5.1) 的左边一项限制到 X_f 上就是 $\widetilde{M}' = ((M \otimes_A S_{(f)}) \otimes_{S\otimes_A S_{(f)}} S_f^{\geqslant})^{\sim}$；由于我们有一个从 $M \otimes_A S_{(f)}$ 到 $M \otimes_S (S \otimes_A S_{(f)}$ 上的典范同构，故可由此导出一个从 $\widetilde{M}'$ 到 $(M \otimes_S S_f^{\geqslant})^{\sim}$ 上的同构，且根据 (8.2.9.1)，后者可以典范同构于 (8.12.5.1) 的右边一项在 X_f 上的限制，并且满足所需要的相容条件。

在上面的推导过程中把 $\mathscr{M}$ 换成 $\widehat{\mathscr{M}}$，$\mathscr{S}$ 换成 $\widehat{\mathscr{S}}$，并把 $\mathscr{S}_X$ 换成 $(\mathscr{S}_X^{\geqslant})^{\wedge}$，则同样可以得到一个典范同构

(8.12.5.2) $$q^*(\widehat{\mathscr{M}}) \otimes_{q^*\widehat{\mathscr{S}}} (\mathscr{S}_X^{\geqslant})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\wedge} 。$$

若我们记得 (8.6.2) 结构态射 $u : \operatorname{Proj} \mathscr{S}_X^{\geqslant} \to X$ 是一个同构，则由上面所述可以导出一个典范 u 同构

(8.12.5.3) $$\mathscr{P}roj_0\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}_X^{\geqslant}) ,$$

它是 (8.12.4.2) 的一个特殊情形。事实上，在 (8.6.2) 的证明中的记号下，问题归结为证明对任意 $f \in S_d$，典范同态 $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} (S_f^{\geqslant})^{(d)} \to (M_f^{\geqslant})^{(d)}$ 都是一个同构，而这是显然的。

另一方面，把 (8.12.4.3) 应用到典范态射 $r = \mathrm{Proj}(\widehat{\alpha})$ 上，则由同构 (8.12.5.2) 又可以得到一个典范 r 态射

$$\textbf{(8.12.5.4)} \qquad \mathscr{M}^{\square} \longrightarrow (\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\square} \ 。$$

还记得 (8.6.2) 此时 r 在去顶锥 $\widehat{E}_X$ 和 E_X 上的限制分别是映到 $\widehat{E}$ 和 E 上的同构。进而：

命题 (8.12.6) — 典范 r 态射 (8.12.5.4) 在 $\widehat{E}_X$ 和 E_X 上的限制都是同构

$$\textbf{(8.12.6.1)} \qquad \mathscr{M}^{\square}|_{\widehat{E}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\square}|_{\widehat{E}_X} \ ,$$

$$\textbf{(8.12.6.2)} \qquad \mathscr{M}^{\square}|_{E} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\square}|_{E_X} \ 。$$

使用 (8.6.2) 的证明中的方法和记号，可以归结到 Y 是仿射概形的情形，再参照定义 (2.8.8)，问题归结为证明典范同态

$$\widehat{M}_{(f)} \otimes_{\widehat{S}_{(f)}} (S_f^{\geqslant})_{\widehat{(f/1)}} \longrightarrow (M \otimes_S S_f^{\geqslant})_{\widehat{(f/1)}}$$

是一个同构；然而依照 (8.2.3.2) 和 (8.2.5.2)，左边一项可以典范等同于 $M_f^{\leqslant} \otimes_{S_f^{\leqslant}} (S_f^{\geqslant})_{f/1}^{\leqslant}$，从而依照 (8.2.7.2)，又可以等同于 $M_f^{\leqslant}$，右边一项可以等同于 $(M_f^{\geqslant})_{f/1}^{\leqslant}$，从而依照 (8.2.9.2)，也可以等同于 $M_f^{\leqslant}$，故得 (8.12.6.1)，进而公式 (8.12.6.2) 缘自 (8.12.6.1) 和 (6.12.2.1)。

推论 (8.12.7) — 在 (8.6.3) 的等同下，$(\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\square}$ 在 $\widehat{E}_X$ 上的限制可以等同于 $(\mathscr{M}_X^{\leqslant})^{\sim}$，并且 $(\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\square}$ 在 E_X 上的限制可以等同于 $\widetilde{\mathscr{M}_X}$。

事实上，问题可以归结到仿射的情形，从而它是缘自 $(M_f^{\geqslant})_{f/1}^{\leqslant}$ 与 $M_f^{\leqslant}$ 的等同以及 $(M_f^{\geqslant})_{f/1}$ 与 M_f 的等同 (8.2.9.2)。

命题 (8.12.8) — 在 (8.6.4) 的前提条件下，典范同态 (8.12.3.1) 是一个同构。

有见于 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{S}_X^{\geqslant} \to X$ 是一个同构的事实 (8.6.2) 以及同构 (8.12.5.4) 和 (8.12.6.1)，问题归结为证明典范同态 $p_X^*(\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}_X^{\geqslant})) \to (\mathscr{M}_X^{\geqslant})^{\square}|_{E_X}$ 是一个同构，换句话说，可以归结到 $\mathscr{S}_1$ 是一个可逆 $\mathscr{O}_Y$ 模层并且 $\mathscr{S}$ 可由 $\mathscr{S}_1$ 生成的情形。此时在 (8.12.3) 的记号下，对于 $f \in S_1$，我们有 $S_f^{\leqslant} = S_{(f)}[1/f]$，并且典范同态 $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} S_f^{\leqslant} \to M_f^{\leqslant}$ 是一个同构，这是根据 $M_f^{\leqslant}$ 的定义。

(8.12.9) 现在我们考虑拟凝聚 $\mathscr{S}$ 模层

$$\mathscr{M}_{[n]} = \bigoplus_{m \geqslant n} \mathscr{M}_m$$

和 (在 (8.7.2) 的记号下) 拟凝聚分次 $\mathscr{S}^\natural$ 模层

(8.12.9.1) $$\mathscr{M}^\natural = \Big(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{M}_{[n]}\Big)^\sim ,$$

我们在 (8.7.3) 中已经看到，存在一个典范 C 同构 $h: C_X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj}\mathscr{S}^\natural$。进而：

命题 (8.12.10) — *存在一个典范 h 同构*

(8.12.10.1) $$\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}^\natural) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{M}}_X 。$$

与 (8.7.3) 的证明方法相同，并使用双重同构 (8.2.9.3) 来代替 (8.2.7.3)。细节留给读者。

8.13 子层和闭子概形的射影闭包

(8.13.1) 前提条件和记号与 (8.12.1) 相同，考虑 $\mathscr{M}$ 的一个拟凝聚 $\mathscr{S}$ 子模层 $\mathscr{N}$，*不必是分次的*。于是 $\mathscr{N}$ 的附随拟凝聚 $\mathscr{O}_C$ 模层 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 是 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 的一个 $\mathscr{O}_C$ 子模层。另一方面，我们在 (8.12.2.1) 看到，$\widetilde{\mathscr{M}}$ 可以等同于 $\mathscr{M}^\square$ 在 C 上的限制。由于典范含入 $i: C\to\widehat{C}$ 是一个仿射态射 (8.3.2)，当然也是拟紧的，故知*典范延拓* $(\widetilde{\mathscr{N}})^-$ (就是 $\mathscr{M}^\square$ 中的那个在 C 上诱导了 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 的最大 $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 子模层) 是一个*拟凝聚* $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 模层 (**I**, 9.4.2)。我们现在要借助某个分次 $\widehat{\mathscr{S}}$ 模层来给出它的一个具体描述。

(8.13.2) 为此，对任意整数 $n\geqslant 0$，考虑同态 $\bigoplus_{i\leqslant n}\mathscr{M}_i\to\mathscr{M}$，即在 Y 的任意开集 U 上，它把一族元素

$$(s_i) \in \bigoplus_{i\leqslant n}\Gamma(U,\mathscr{M}_i)$$

映到截面 $\sum_i s_i\in\Gamma(U,\mathscr{M})$。我们以 $\mathscr{N}'_n$ 来标记 $\mathscr{N}$ 在这个同态下的逆像，它是 $\bigoplus_{i\leqslant n}\mathscr{M}_i$ 的一个拟凝聚 $\mathscr{S}$ 子模层。现在考虑同态 $\bigoplus_{i\leqslant n}\mathscr{M}_i\to\widehat{\mathscr{M}}=\mathscr{M}[\mathbf{z}]$，它把 (s_i) 映到截面 $\sum_{i\leqslant n}s_i\mathbf{z}^{n-i}\in\Gamma(U,\widehat{\mathscr{M}_n})$，并设 $\mathscr{N}_n$ 是 $\mathscr{N}'_n$ 在该同态下的像；很容易验证 $\overline{\mathscr{N}}=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{N}_n$ 是 $\widehat{\mathscr{M}}$ 的一个 (拟凝聚) 分次 $\widehat{\mathscr{S}}$ 子模层；我们 $\overline{\mathscr{N}}$ 称为由 $\mathscr{N}$ 通过齐次化而导出的层 (借助“齐次化变元” $\mathbf{z}$)。注意到若 $\mathscr{N}$ 已然是 $\mathscr{M}$ 的一个分次 $\mathscr{S}$ 子模层，则 $\overline{\mathscr{N}}$ 可以等同于 $\widehat{\mathscr{N}}=\mathscr{N}[\mathbf{z}]$ 中的所有次数 $n\geqslant 0$ 的齐次分量 $\widehat{\mathscr{N}_n}$ 的直和。

命题 (8.13.3) — *$\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 模层 $\mathscr{P}roj_0(\overline{\mathscr{N}})$ 就是 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 在 $\widehat{C}$ 上的典范延拓 $(\widetilde{\mathscr{N}})^-$。*

依照典范延拓的定义 (**I**, 9.4.1)，问题在 Y 和 $\widehat{C}$ 上都是局部性的，从而可以假设 $Y=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的，此时 $\mathscr{S}=\widetilde{S}$, $\mathscr{M}=\widetilde{M}$ 且 $\mathscr{N}=\widetilde{N}$，其中 N 是 M 的一个未必

分次的 S 子模。进而 (8.3.2.6)，$\widehat{C}$ 是仿射开集 $\widehat{C}_{\mathbf{z}}=C$ 和诸 $\widehat{C}_f=\operatorname{Spec} S_f^{\leqslant}$（$f$ 是 S_+ 中的齐次元）的并集。从而只需证明： 1° $\mathscr{P}roj_0(\overline{\mathscr{N}})$ 在 C 上的限制就是 $\widetilde{\mathscr{N}}$； 2° $\mathscr{P}roj_0(\overline{\mathscr{N}})$ 在每个 $\widehat{C}_f$ 上的限制都是 N 在 $C\cap\widehat{C}_f=\operatorname{Spec} S_f$ 上的限制的典范延拓 (8.3.2.6)。为了证明第一点，注意到 $\mathscr{P}roj_0(\overline{\mathscr{N}})|_C$ 可以等同于 $(\overline{N}_{(\mathbf{z})})^{\sim}$ (8.3.2.4)；然则 $\overline{N}_{(\mathbf{z})}$ 可以典范等同 (2.2.5) 于 $\overline{N}$ 在 $\widehat{M}/(\mathbf{z}-1)\widehat{M}$ 中的像，并且通过 $\widehat{M}/(\mathbf{z}-1)\widehat{M}$ 到 M 上的典范同构 (8,2,5)，这个像可以等同于 N，这是依据 (8.13.2) 中所给出的 $\overline{N}$ 的定义。

为了证明第二点，注意到含入 $i:C\cap\widehat{C}_f\to\widehat{C}$ 对应着典范含入 $S_f^{\leqslant}\to S_f$ (8.3.2.6)；另一方面，我们有 $\Gamma(\widehat{C}_f,\mathscr{M}^{\square})=M_f^{\leqslant}$，$\Gamma(\widehat{C}_f,i_*\widetilde{N})=N_f$ 和 $\Gamma(\widehat{C}_f,i_*i^*(\mathscr{M}^{\square}))=M_f$（根据 (8.12.2.1)）。从而有见于 (**I**, 9.4.2)，问题归结为证明 $\overline{N}_{(f)}\subset\widehat{M}_{(f)}=M_f^{\leqslant}$ 可以典范等同于 N_f 在典范含入 $M_f^{\leqslant}\to M$ 下的逆像。事实上，设 $d=\deg(f)>0$，并假设 M_f 的一个元素 $(\sum\limits_{h\leqslant md}x_k)/f^m$（其中 $x_k\in M_k$）具有 y/f^m 的形状，其中 $y\in N$。给 y 和诸 x_k 都乘以适当的 f^h，则可以假设 $\sum\limits_{k\leqslant md}x_k=y$。然而在 (8.2.5.2) 的等同下，$(\sum\limits_{h\leqslant md}x_k)/f^m$ 对应着 $\sum\limits_{k\leqslant md}x_k\mathbf{z}^{md-k}/f^m$，这个元素确实落在 $\overline{N}_{(f)}$ 中，因为 $\sum\limits_{k\leqslant md}x_k\in N$；逆命题是显然的。

注解 (8.13.4) — (i) (8.13.3) 的一个最重要的应用是在 $\mathscr{M}=\mathscr{S}$ 的情形，从而 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 是 $\mathscr{O}_C$ 的一个任意的拟凝聚理想层 $\mathscr{J}$ (1.4.3)，一一对应着 C 的一个闭子概形 Z。此时 $\mathscr{J}$ 的典范延拓 $\overline{\mathscr{J}}$ 就是 $\mathscr{O}_{\widehat{C}}$ 的这样一个拟凝聚理想层，它在 $\widehat{C}$ 中定义了 Z 的概闭包 $\overline{Z}$ (**I**, 9.5.10)；并且命题 (8.13.3) 给出了一个借助 $\widehat{\mathscr{S}}=\mathscr{S}[\mathbf{z}]$ 的理想层来定义 $\overline{Z}$ 的典范方法。

(ii) 为了简单起见，假设 Y 是仿射的，并且沿用 (8.13.3) 的证明中的记号。对任意非零的 $x\in N$，设 $d(x)$ 是 x 在 M 中的诸齐次分量 x_i 的次数的最大值；则根据定义，$\overline{N}$ 就是 $\widehat{M}$ 中的由 0 和形如 $h(x,k)=\mathbf{z}^k\sum\limits_{i\leqslant d(x)}x_i\mathbf{z}^{d(x)-i}$ $(k\geqslant 0)$ 的元素所组成的子模；从而它作为 $\widehat{S}=S[\mathbf{z}]$ 上的模可由形如

$$h(x,0)\;=\;\sum_{i\leqslant d(x)}x_i\mathbf{z}^{d(x)-i}$$

的元素所生成。我们把 $h(x,0)$ 称为由 x 通过齐次化所导出的元素（借助“齐次化变元”$\mathbf{z}$）。但是 $h(x,0)$ 对于 x 不是加性的（当然也不是 S 线性的）。从而必须小心（即使 $M=S$）当 x 跑遍 S 模 N 的一个生成元组时，诸 $h(x,0)$ 未必构成分次 $\widehat{S}$ 模 $\overline{N}$ 的一个生成元组。然而如果 N 是一个单苇的自由 S 模（初等代数几何所考虑的情形），则情况会很好，因为若 t 是 N 的一个基底，则 $h(t,0)$ 可以生成 $\widehat{S}$ 模 $\overline{N}$。

8.14 关于分次 $\mathscr{S}$ 模层的附随层的补充

(8.14.1) 设 Y 是一个概形，$\mathscr{S}$ 是一个拟凝聚正分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$，$q : X \to Y$ 是结构态射（依照 (3.1.3)，它是分离的）。沿用 (8.12.1) 中的记号，则我们定义了一个从拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层范畴到拟凝聚分次 $\mathscr{S}_X$ 模层范畴的函子 $\mathscr{M}_X = \mathscr{P}roj\,\mathscr{M}$（关于 $\mathscr{M}$）；进而易见 (3.2.4) 这个函子是加性且正合的，并且与归纳极限可交换。

注意到由定义 (8.12.1.1) 立知，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有

(8.14.1.1) $$\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}(n) = (\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})(n) \ 。$$

(8.14.2) 我们首先把 (3.2.6) 中所定义的典范同态 λ 和 μ 扩展到形如 $\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}$ 的 $\mathscr{S}_X$ 模层上。为此，注意到依照 (2.1.2.1)，对任意 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ 和任意拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M},\mathscr{N}$，我们都有一个典范 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(8.14.2.1)
$$\lambda_{mn} : \mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(m)) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{P}roj_0(\mathscr{N}(n)) \longrightarrow \mathscr{P}roj_0((\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{N})(m+n)) \ ,$$

同样的，依照 (2.1.2.2)，也有一个典范 $\mathscr{O}_X$ 模层同态

(8.14.2.2)
$$\mu_{mn} : \mathscr{P}roj_0((\mathscr{H}om_{\mathscr{S}}(\mathscr{M},\mathscr{N}))(n-m)) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(m)), \mathscr{P}roj_0(\mathscr{N}(n))) \ 。$$

由此可以导出一个同态

$$\mu_k : \mathscr{P}roj_0((\mathscr{H}om_{\mathscr{S}}(\mathscr{M},\mathscr{N}))(k)) \longrightarrow (\mathscr{H}om_{\mathscr{S}_X}(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}, \mathscr{P}roj\,\mathscr{N}))_k \ ,$$

定义如下：对于 $u \in \Gamma(U, \mathscr{P}roj_0((\mathscr{H}om_{\mathscr{S}}(\mathscr{M},\mathscr{N}))(k)))$（$U$ 是 X 中的开集），同态 $\mu_k(u)$ 是这样一个分次 $\mathbb{Z}$ 模的 k 次同态 $\Gamma(U,\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}) \to \Gamma(U,\mathscr{P}roj\,\mathscr{N})$，它在每个 $\Gamma(U,\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(m)))$ 上都重合于 $\mu_{m,m+k}(u)$；进而，由 μ_{mn} 的定义 (2.5.12.1) 立知，$\mu_k(u)$ 实际上是分次 $\Gamma(U,\mathscr{S}_X)$ 模的一个 k 次同态，并且诸 μ_k 还定义了一个分次 $\mathscr{S}_X$ 模层的同态

(8.14.2.3) $$\mathscr{P}roj\,\mathscr{H}om_{\mathscr{S}}(\mathscr{M},\mathscr{N}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{S}_X}(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}, \mathscr{P}roj\,\mathscr{N}) \ 。$$

同样的，有见于结合性的图表 (2.5.11.4)，诸同态 (8.14.2.1) 给出一个分次 $\mathscr{S}_X$ 模层的同态

(8.14.2.4) $$\lambda : \mathscr{P}roj\,\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{S}_X} \mathscr{P}roj\,\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{P}roj(M \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{N}) \ 。$$

命题 (8.14.3) — 同态 (8.14.2.4) 是一一的；如果分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$ 是有限呈示的 (3.1.1)，则同态 (8.14.2.3) 也是一一的。

问题在 X 和 Y 上显然都是局部性的；从而可以假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，此时 $\mathscr{S} = \widetilde{S}$，$\mathscr{M} = \widetilde{M}$，$\mathscr{N} = \widetilde{N}$，其中 S 是一个正分次 A 代数，M 和 N 是两个分次 S 模。若 f 是 S_+ 中的一个齐次元，则诸同态 (8.14.2.1) 和 (8.14.2.2) 在仿射开集 $D_+(f)$ 上的限制对应着典范同态 (2.5.11.1) 和 (2.5.12.1)：

$$M(m)_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} \mathrm{N}_{(f)} \longrightarrow (M \otimes_S N)(m+n)_{(f)} \ ,$$

$$(\operatorname{Hom}_S(M,N))(n-m)_{(f)} \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S_{(f)}}(M(m)_{(f)}, N(n)_{(f)}) \ 。$$

参照这些同态的定义 (且有见于 (8.2.9.1)) ，可以看出 (8.14.2.4) 在 $D_+(f)$ 上的限制就对应着 ($\mathbf{0}$, 1.3.4) 中所定义的典范同态

$$M_f \otimes_{S_f} N_f \longrightarrow (M \otimes_S N)_f \ ,$$

并且我们知道后者是一个同构。同样的，(8.14.2.3) 在 $D_+(f)$ 上的限制对应着典范同态 ($\mathbf{0}$, 1.3.5)

$$(\operatorname{Hom}_S(M,N))_f \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S_f}(M_f, N_f) \ ,$$

注意到由于 M 是有限型的，故知模 $\operatorname{Hom}_S(M,N)$ ，即齐次 S 同态的子群的直和 (2.1.2)，重合于全体 S 模同态的集合。于是 M 是有限呈示的这个条件意味着 ($\mathbf{0}$, 1.3.5) 上述典范同态是一个同构。

命题 (8.14.4) — *若 U 是 X 的一个拟紧开集，则存在一个整数 d，使得对于 d 的任意倍数 n，$\mathscr{O}_X(n)|_U$ 都是可逆的，并且它的逆是 $\mathscr{O}_X(-n)|_U$ 。*

由于 U 是拟紧的，故可被有限个仿射开集 V_i 所覆盖，从而每个 $x \in U$ 都包含在某个形如 $D_+(f)$ 的仿射开集中，这里 f 是某个环 $\Gamma(V_i, \mathscr{S})$ 中的一个次数 > 0 的齐次元。由于 U 是拟紧的，故可被有限个这样的开集 $D_+(f_j)$ 所覆盖；设 d 是诸 f_j 的次数的一个公倍数。则依照 (2.5.17)，d 就是满足我们的要求。

(8.14.5) 在 (8.14.1) 的记号和前提条件下，我们在 (3.3.2) 中定义了下面的典范 $\mathscr{O}_Y$ 模层同态

(8.14.5.1) $$\alpha_n \ : \ \mathscr{M}_n \longrightarrow q_*(\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(n))) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \ 。$$

推广 (3.3.1) 中的记号，对任意分次 $\mathscr{S}_X$ 模层 $\mathscr{F}$ ，我们令

(8.14.5.2) $$\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} q_* \mathscr{F}_n \ 。$$

特别的，$\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{S}_X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} q_*(\mathscr{O}_X(n))$ 就是 (3.3.1.2) 中所定义的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{O}_X)$ ；易见 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ 是一个分次 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{S}_X)$ 代数层 ($\mathbf{0}$, 4.2.2)。如果在同态 (8.14.5.1) 中

取 $\mathscr{M}=\mathscr{S}$，则可以得到已经在 (3.3.2) 中定义过的分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层的同态

(8.14.5.3) $$\alpha\ :\ \mathscr{S}\ \longrightarrow\ \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{S}_X)\ ,$$

它使 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ 成为一个分次 $\mathscr{S}$ 模层；于是诸同态 (8.14.5.1) 定义了分次 $\mathscr{S}$ 模层的一个 (0 次) 同态

(8.14.5.4) $$\alpha\ :\ \mathscr{M}\ \longrightarrow\ \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})\ 。$$

(8.14.6) 一般的，对于一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}_X$ 模层 $\mathscr{F}$，我们并不清楚分次 $\mathscr{S}$ 模层是不是拟凝聚的。考虑 X 的一个开集 X'，并假设 q 在 X' 上的限制 $q':X'\to Y$ 是一个拟紧态射。由于 q' 还是分离的，故知对任意拟凝聚 $\mathscr{O}_{X'}$ 模层 $\mathscr{F}'$，$q'^*\mathscr{F}'$ 都是拟凝聚 $\mathscr{O}_Y$ 模层 (**I**, 9.2.2, b))。我们令

(8.14.6.1) $$\mathscr{S}_{X'}\ =\ \mathscr{S}_X|_{X'}\ =\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{O}_X(n)|_{X'}\ 。$$

并且对任意分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层 $\mathscr{F}'$，令

(8.14.6.2) $$\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}')\ =\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}q'^*\mathscr{F}'_n\ 。$$

于是上述注解表明，若 $\mathscr{F}'$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层，则 $\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}')$ 是一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层 (**I**, 9.6.1)。

此外，注意到典范含入 $j:X'\to X$ 是拟紧的，因为 $q'=q\circ j$ 是如此，并且 q 是分离的 (**I**, 6.6.4, (v))。因而对任意拟凝聚分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层 $\mathscr{F}'$，$\mathscr{F}=j_*\mathscr{F}'$ 都是拟凝聚分次 $\mathscr{S}_X$ 模层，并且由上述定义可知，

(8.14.6.3) $$\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}')\ =\ \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})\ 。$$

在同样的前提条件下 (关于 X')，对任意拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$，我们令

(8.14.6.4) $$\mathscr{P}roj'\mathscr{M}\ =\ (\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})|_{X'}\ ,$$

它是一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层。从而典范同态

$$\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}\ \longrightarrow\ j_*(\mathscr{P}roj'\mathscr{M})$$

(**0**, 4.4.3) 给出分次 $\mathscr{S}$ 模层的一个典范同态 $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})\to\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{P}roj'\mathscr{M})$，因而与 (8.14.5.4) 合成后就得到拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层的一个 (0 次) 函子性典范同态

(8.14.6.5) $$\alpha'\ :\ \mathscr{M}\ \longrightarrow\ \mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{P}roj'\mathscr{M})\ 。$$

(8.14.7) 沿用 (8.14.6) 中关于 X' 的前提条件，并设 $\mathscr{F}'$ 是一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层，从而 $\mathscr{P}roj'\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}')$ 也是拟凝聚分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层。我们现在要定义分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层的一个 (0 次) 函子性典范同态

(8.14.7.1) $$\beta' \ : \ \mathscr{P}roj'\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}') \longrightarrow \mathscr{F}' \quad 。$$

首先假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，$\mathscr{S} = \widetilde{S}$，其中 S 是一个正分次 A 代数；此时 $\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}') = \widetilde{M}$，其中 $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X', \mathscr{F}'_n)$ 是一个分次 S 模。设 $f \in S_d$ 满足 $D_+(f) \subset X'$；根据定义 (2.6.2)，$\alpha_d(f)$ 在 $D_+(f)$ 上的限制是 $\mathscr{O}_X(d)$ 在 $D_+(f)$ 上的这样一个截面，它对应着 $(S(d))_{(f)}$ 的元素 $f/1$，因而是可逆的；从而对任意 $n > 0$，$\alpha_d(f^n)$ 也是如此。由此立知，可以定义分次模的一个 (0 次) S_f 同态 $\beta_f : M_f \to \Gamma(D_+(f), \mathscr{F}')$，即把元素 $z/f^n \in M_f$ （其中 $z \in M$ ）对应到 $\mathscr{F}'$ 在 $D_+(f)$ 上的截面 $(z|_{D_+(f)})(\alpha_d(f^n)|_{D_+(f)})^{-1}$。进而，我们有一个对应着 (2.6.4.1) 的交换图表，故得这种情形下 β' 的定义。为了扩展到一般情形，只需考虑一个 A 代数 A' 和分次 A' 代数 $S' = S \otimes_A A'$，并使用类似于 (2.8.13.2) 的交换图表即可；细节留给读者。

命题 (8.14.8) — *若 X' 是 $X = \operatorname{Proj} \mathscr{S}$ 的一个开集，并使得 $q' : X' \to Y$ 是拟紧的，则 (8.14.7) 中所定义的同态 β' 是一一的。*

显然可以限于考虑 Y 是仿射的这个情形，并且问题归结为 (在 (8.14.7) 的记号下) 证明同态 $\beta_f : M_f \to \Gamma(D_+(f), \mathscr{F}')$ 是一个同构。然则，如果把 f 换成它的一个方幂，则 $D_+(f)$ 和 β_f 都不会改变；由于根据前提条件 X' 是拟紧的，从而依照 (8.14.4)，我们总可以假设层 $\mathscr{O}_X(d)$ 是可逆的。由于此时 X' 是一个分离概形 (因为 q' 是分离的)，故而这个命题与 (**I**, 9.3.1) 无异。

推论 (8.14.9) — *在 (8.14.8) 的前提条件下，任何拟凝聚分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层 $\mathscr{F}'$ 都同构于一个形如 $\mathscr{P}roj'\mathscr{M}$ 的分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层。其中 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层。进而若 $\mathscr{F}'$ 是有限型的，并假设 Y 是一个拟紧分离概形或者具有 Noether 底空间的概形，则可以假设 $\mathscr{M}$ 是有限型的。*

可由 (8.14.8) 推出这个结果，方法与由 (3.4.4) 推出 (3.4.5) 完全平行，细节留给读者。

命题 (8.14.10) — *在 (8.14.7) 的前提条件下，设 $\mathscr{M}$ 是一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层，$\mathscr{F}'$ 是一个拟凝聚分次 $\mathscr{S}_{X'}$ 模层；则合成同态*

(8.14.10.1) $$\mathscr{P}roj'\mathscr{M} \xrightarrow{\mathscr{P}roj'\alpha'} \mathscr{P}roj'\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{P}roj'\mathscr{M}) \xrightarrow{\beta'} \mathscr{P}roj'\mathscr{M} \ ,$$

(8.14.10.2) $$\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}') \xrightarrow{\alpha'} \mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{P}roj'\mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}')) \xrightarrow{\mathbf{\Gamma}'_*(\beta')} \mathbf{\Gamma}'_*(\mathscr{F}')$$

都是恒同同构。

问题在 Y 上是局部性的，并且证明方法与 (2.6.5) 中的相同；细节留给读者。

注解 (8.14.11) — 我们将在第 III 章 (**III**, 2.3.1) 看到，如果 Y 是局部 *Noether* 的，并且 $\mathscr{S}$ 是一个有限型的拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层 (此时可以取 $X' = X$)，则对任意满足 (**TF**) 条件的拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{M}$，同态 α (8.14.5.4) 都是 (**TN**) 一一的。

注解 (8.14.12) — (8.14.4) 中的情况是下述结果的特殊情形。设 X 是一个环积空间，$\mathscr{S}$ 是一个 (正或负次数的) 分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层；假设存在一个整数 $d > 0$，使得 $\mathscr{S}_d$ 和 $\mathscr{S}_{-d}$ 都是可逆的，并且典范同态

(8.14.12.1)
$$\mathscr{S}_d \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{S}_{-d} \longrightarrow \mathscr{O}_X$$

是一个同构 (从而 $\mathscr{S}_{-d}$ 可以等同于 $\mathscr{S}_d^{-1}$)。此时我们称分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\mathscr{S}$ 是周期的，并且周期为 d。这个名称来自于下面的性质：在上述前提条件下，对任意分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{F}$ 和任意整数 $n \in \mathbb{Z}$，典范同态

(8.14.12.2)
$$\mathscr{S}_d \otimes \mathscr{F}_n \longrightarrow \mathscr{F}_{n+d}$$

都是同构。事实上，问题在 X 上是局部性的，从而可以假设 $\mathscr{S}_d$ 具有一个可逆整体截面 s，它的逆 s' 是 $\mathscr{S}_{-d}$ 的一个截面。此时我们有一个同态 $\mathscr{F}_{n+d} \to \mathscr{S}_d \otimes \mathscr{F}_n$，它把截面 $z \in \Gamma(U, \mathscr{F}_{n+d})$ 映到 $\mathscr{S}_d \otimes \mathscr{F}_n$ 在 U 上的截面 $(s|_U) \otimes (s'|_U)z$，该同态就是 (8.14.12.2) 的逆，故得我们的陈言。于是对任意 $k \in \mathbb{Z}$，我们都有一个典范同构

$$(\mathscr{S}_d)^{\otimes k} \otimes \mathscr{F}_n \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{n+kd} \ ,$$

因而，只要知道了 $\mathscr{S}_0$ 模层 $\mathscr{F}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant d-1)$ 和典范同态

$$\mathscr{S}_i \otimes \mathscr{F}_j \longrightarrow \mathscr{F}_{i+j} \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant d-1) \ ,$$

分次 $\mathscr{S}$ 模层 $\mathscr{F}$ 就完全确定了。(当 $i + j \geqslant d$ 时，取 $\mathscr{F}_{i+j} = \mathscr{S}_d \otimes_{\mathscr{S}_0} \mathscr{F}_{i+j-d}$)。自然，为了使这些同态能够在诸 $(\mathscr{S}_d)^{\otimes k} \otimes \mathscr{F}_i$ $(k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant i \leqslant d-1)$ 的直和上定义出一个 $\mathscr{S}$ 模层的结构，还需要它们满足结合性条件，我们就不明写了。

在 $d = 1$ 的情形 (这就是 (3.3) 中所考虑的情形)，则我们可以说，分次 $\mathscr{S}$ 模层的范畴 (相应的，拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层的范畴，此处 X 是概形并且 $\mathscr{S}$ 是拟凝聚的) 可以等价于任意 (相应的，拟凝聚) $\mathscr{S}_0$ 模层的范畴；正是在这个意义下，我们可以把这一小节的内容看作是 §3 的推广。进而我们看到，在适当的有限性条件下，这一小节的结果 (连同 (8.14.11)) 在某种程度上把对于概形上的拟凝聚分次代数层及其 "模 (**TN**) " 分次模层的研究归约为对一类特殊的代数层，即周期代数层的研究 (从而 $\mathscr{M}$ 满足 (**TN**) 条件 (3.4.2) 意味着 $\mathscr{M} = 0$)。

注解 (8.14.13) — 在 (8.14.1) 的前提条件下，设 d 是一个 > 0 的整数；则有一个从 X 到 $X^{(d)} = \operatorname{Proj} \mathscr{S}^{(d)}$ 上的典范 Y 同构 h (3.1.10)。对任意拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模

层 $\mathscr{M}$ 和任意满足 $0 \leqslant k \leqslant d-1$ 的整数 k，我们还有一个典范 h 同构 (在 (3.1.1) 的记号下)

$$(8.14.13.1)\qquad (\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})^{(d,k)} \xleftarrow{\sim} \mathscr{P}roj\,\mathscr{M}^{(d,k)}\ 。$$

首先假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，$\mathscr{S} = \widetilde{S}$, $\mathscr{M} = \widetilde{M}$，其中 S 是一个正分次 A 代数，M 是一个分次 S 模。我们知道对任意 $f \in S_e$ $(e > 0)$，h 都把 $D_+(f)$ 映到 $D_+(f^d)$ 上，并且它对应着典范同构 $S_{(f^d)} \to S_{(f)}$ (2.2.2)。于是 (8.14.13.1) 在 $D_+(f^d)$ 上的限制对应着典范双重同构 $M_{f^d} \xrightarrow{\sim} M_f$，限制到 M_{f^d} 的次数与 k 同余 $(\operatorname{mod} d)$ 的元素上。读者可以自行验证，这些同构与从 f 到 f 的齐次倍元 fg 的变换是相容的，类似的，它们也与从 S 到分次 A' 代数 $S' = S \otimes_A A'$ (其中 A' 是一个 A 代数) 的变换是相容的。特别的，我们得到一个 h 同构

$$(8.14.13.2)\qquad (\mathscr{S}^{(d)})_{X^{(d)}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{S}_X)^{(d)}\ ，$$

它保持乘法结构，并且使 (8.14.13.1) 成为一个从分次 $(\mathscr{S}^{(d)})_{X^{(d)}}$ 模层到分次 $(\mathscr{S}_X)^{(d)}$ 模层的 h 双重同构。同样的，我们有一个 h 同构

$$(8.14.13.3)\qquad \mathscr{P}roj_0(\mathscr{S}^{(d,k)}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_X(nd+k)\ 。$$

它使 (3.2.9, (ii)) 中的结果更为完整。

由同构 (8.14.13.1) 显然可以导出一个分次 $\mathscr{S}^{(d)}$ 模层的同构

$$(8.14.13.4)\qquad \mathbf{\Gamma}_*^{(d)}(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}^{(d,k)}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{\Gamma}_*((\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})^{(d,k)})\ ，$$

其中 $\mathbf{\Gamma}_*^{(d)}$ 对应着结构态射 $q^{(d)} : X^{(d)} \to Y$；容易验证，典范同态 α (8.14.5.4) 和 $X^{(d)}$ 上的相应同态 $\alpha^{(d)}$ 构成一个交换图表

$$(8.14.13.5)\qquad \begin{tikzcd} & \mathscr{M}^{(d,k)} \arrow[dl, "\alpha^{(d)}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \mathbf{\Gamma}_*^{(d)}(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M}^{(d,k)}) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbf{\Gamma}_*((\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})^{(d,k)}) \end{tikzcd}\ ，$$

证明方法是先归结到 Y 仿射的情形，再计算 $M^{(d,k)}$ 的同一个元素在 $\alpha^{(d)}$ 和 α 下的像到开集 $D_+(f^d)$ 和 $D_+(f)$ 上的限制 (这里的记号与上面相同)。

命题 (8.14.14) — *设 Y 是一个拟紧概形，$\mathscr{S}$ 是一个有限型拟凝聚分次 $\mathscr{O}_Y$ 代数层，$\mathscr{M}$ 是一个满足* **(TF)** *条件的拟凝聚分次 $\mathscr{S}$ 模层；再设 $X = \operatorname{Proj}\mathscr{S}$。则 $\mathscr{S}_X$ 是一个周期分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层 (8.14.12)，并可找到 $\mathscr{S}_X$ 的一个周期 d，使得诸 $(\mathscr{P}roj\,\mathscr{M})^{(d,k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant d-1)$ 都是有限型 $(\mathscr{S}_X)^{(d)}$ 模层。*

事实上，(3.1.10) 表明，存在一个 d 使得 $\mathscr{S}^{(d)}$ 可由 $\mathscr{S}_d = (\mathscr{S}^{(d)})_1$ 所生成，并且后者是一个有限型 $\mathscr{S}_0$ 模层。从而为了证明第一个陈言，依照 (8.14.13.2)，可以限于考虑 $d = 1$ 的情形，此时命题缘自 (3.2.7)。进而，依照 (8.14.13.1)，第二个陈言可由 (2.1.6, (iii)) 和 (3.4.3) 推出。