关于曲面的一般研究 (I)

Karl Friedrich Gauss

(于 1827 年 10 月 8 日提交给皇家学会)

编者按 Gauss (高斯) 的这篇论文是关于曲面的几何性质研究的开创性论文. 在本文中, 高斯奠定了曲面论的基础, 并得出了曲面微分几何中最重要的定理. 对于欲了解微分几何和数学史的读者, 本文无疑是极有价值的文献.

由于原文较长, 我们将分两期刊出.

1.

当研究涉及到空间中很多个不同直线的方向时, 如果我们引进一个半径为单位长度, 以任意点为中心的辅助球面, 并假定用球面上不同的点表示不同的直线的方向 (该方向与以球面上的点为端点的半径平行), 那么, 我们的研究将获得高度的明晰和简单. 由于空间中每一点的位置是由 3 个坐标所决定的, 也就是由空间的点到 3 个互相垂直的固定平面的距离所决定的, 因而, 我们首先有必要考虑垂直于这些平面的轴的方向. 我们用 (1) 、(2) 、(3) 表示球面上表示这些方向的点. 其中的任意一个点到另外两个点中的任意一个的距离为 $\pi/2$ 大圆; 并且, 我们假定坐标轴的方向为相应的坐标增加的方向.

2.

我们把这类问题中经常用到的一些命题集中在一起, 这对我们的研究是会有好处的.

Ⅰ. 两条相交直线的夹角由球面上相应于直线的方向的球面上两点的弧长来度量.

Ⅱ. 任意一个平面的定向可以由与该平面平行的平面交球面所得到的大圆的定向来表示.

Ⅲ. 两个平面的夹角等于和这两个平面相应的球面的大圆之间的球面角. 因此, 也可以由这两个大圆的极点间的弧长来度量. 用同样的方法, 一条直线与一个平面的倾斜角可以由沿球面上相应于直线的方向与球面的交点作垂直于与平面定向相同的大圆所截得的弧长来度量.

Ⅳ. 设 x, y, z; x', y', z' 分别表示两个点的坐标, r 是它们之间的距离, L 表示球面上相应于从第 1 点到第 2 点的直线方向的点, 那么我们有 1),2)

$$x' = x + r\cos(1)L,$$
$$y' = y + r\cos(2)L,$$
$$z' = z + r\cos(3)L.$$

Ⅴ. 一般地, 从这立即可以得出

$$\cos^2(1)L + \cos^2(2)L + \cos^2(3)L = 1,$$

原题: General Investigations of Curved Surfaces. 译自: Astérisque, Vol.62 (1979), p.1–81.

1) 下文中 $(n)L$ 表示 (n) 与 L 间的弧长, 这里 $n = 1, 2, 3$.—— 校注

2) 原文中绝大部分公式都没有标点符号、译文中对公式已加上适当的标点符号.—— 编注

如果 L' 表示球面上的另一任意的点，那么也有

$$\cos(1)L\cdot\cos(1)L'+\cos(2)L\cdot\cos(2)L'+\cos(3)L\cdot\cos(3)L'=\cos LL'.$$

VI. **定理** 如果 L,L',L'',L''' 表示球面上的 4 个点，并且 A 表示由弧 $LL',L''L'''$ 在其交点处所成的交角，那么我们有

$$\cos LL''\cdot\cos L'L'''-\cos LL'''\cdot\cos L'L''=\sin LL'\cdot\sin L''L'''\cdot\cos A.$$

证明 设 A 也表示交点本身，且设

$$AL=t,\ AL'=t',\ AL''=t'',\ AL'''=t''',$$

那么，我们有

$$\begin{aligned}\cos LL''&=\cos t\cos t''+\sin t\sin t''\cos A,\\ \cos L'L'''&=\cos t'\cos t'''+\sin t'\sin t'''\cos A,\\ \cos LL'''&=\cos t\cos t'''+\sin t\sin t'''\cos A,\\ \cos L'L''&=\cos t'\cos t''+\sin t'\sin t''\cos A.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\cos LL''\cdot\cos L'L'''-\cos LL'''\cdot\cos L'L''\\ &\quad=\cos A(\cos t\cos t''\sin t'\sin t'''+\cos t'\cos t'''\sin t\sin t''\\ &\qquad-\cos t\cos t'''\sin t'\sin t''-\cos t'\cos t''\sin t\sin t''')\\ &\quad=\cos A(\cos t\sin t'-\sin t\cos t')(\cos t''\sin t'''-\sin t''\cos t''')\\ &\quad=\cos A\cdot\sin(t'-t)\cdot\sin(t'''-t'')\\ &\quad=\cos A\cdot\sin LL'\cdot\sin L''L'''.\end{aligned}$$

但是，由于从点 A 出发的每一个大圆都有两个分支，这两个分支在该点形成两个角，他们的和等于 180°. 而我们的分析表明，所考虑的分支，在某种意义上说他们的方向是从 L 到 L'，以及从 L'' 到 L'''；并且由于大圆相交于两点，显然地这两个点中的任何一个都可以被选择加以考虑. 代替角 A，我们也可以考虑大圆的对极之间的弧 (在这里弧 LL', $L''L'''$ 是一部分). 但是，明显地，如果现在选择大圆的对极之间的弧，那么可以同样地替代这些弧的结果；这就是说，当我们考虑从 L 到 L'，以及从 L'' 到 L''' 之间的弧，两弧或者都在对极的右边，或者都在左边.

VII. 设 L,L',L'' 是球面上的 3 个点，为了简洁，令

$$\begin{aligned}&\cos(1)L=x,&&\cos(2)L=y,&&\cos(3)L=z,\\ &\cos(1)L'=x',&&\cos(2)L'=y',&&\cos(3)L'=z',\\ &\cos(1)L''=x'',&&\cos(2)L''=y'',&&\cos(3)L''=z'',\end{aligned}$$

以及

$$xy'z''+x'y''z+x''yz'-xy''z'-x'yz''-x''y'z=\Delta.$$

设 λ 表示大圆的极点 (在这里弧 LL' 是劣弧)，这一极点相对于这条弧的位置正如点 (1)

关于弧 (2)(3) 那样. 那么，由前面的定理我们有

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda \cdot \sin(2)(3) \cdot \sin LL'.$$

由于 $(2)(3) = 90^\circ$,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda \cdot \sin LL'.$$

同样地，有

$$zx' - z'x = \cos(2)\lambda \cdot \sin LL',$$
$$xy' - x'y = \cos(3)\lambda \cdot \sin LL'.$$

分别以 x'', y'', z'' 乘以这些方程并相加，由 V 中的第 2 个定理，我们得到

$$\Delta = \cos \lambda L'' \cdot \sin LL'.$$

现在有 3 种情形必须加以区别：第 1, 当 L'' 位于大圆上，而 LL' 是这个大圆的劣弧，我们有 $\lambda L'' = 90^\circ$, 因此, $\Delta = 0$. 如果 L'' 不在大圆上，第 2 种情形将是 L'' 位于 λ 的同一侧；第 3 种情形是当它们位于对极的两端. 在后两种情形，点 L, L', L'' 将形成一个球面三角形，而在第 2 种情形这些点将具有和点 (1), (2), (3) 同样的顺序，第 3 种情形则为相反的顺序.

将这个三角形的 3 个角简单地用 L, L', L'' 表示. 在球面上从点 L'' 作垂直线到边 LL' 于 p. 我们有：

$$\sin p = \sin L \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin L'L''$$

和

$$\lambda L'' = 90^\circ \mp p,$$

上面的符号适合于第 2 种情形，而下面的符号适合于第 3 种情形. 由此可以得到：

$$\pm\Delta = \sin L \cdot \sin LL' \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin LL' \cdot \sin L'L'' = \sin L'' \cdot \sin LL'' \cdot \sin L'L''.$$

然而，明显地第 1 种情形可以认为包含于第 2 或第 3 种情形之中，并且很容易看出表达式 $\pm\Delta$ 表示了由点 L, L', L'' 以及球面的中心所形成的锥体的体积的 6 倍. 最后，由此显然地有表达式 $\pm\frac{1}{6}\Delta$ 表示任意锥体的体积，这个锥体由坐标系的原点以及球面上的 3 点组成，这 3 个点的坐标是 x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''.

3.

如果从 A 点到曲面上与 A 点相距无穷小距离的点的所有直线的方向，与通过点 A 的同一个平面上的直线方向的偏斜为无穷小，那么我们就称一个曲面在一点 A 处具有连续的曲率. 这个平面就称为过点 A 的曲面的切平面. 如果这个条件对某一点不满足 (假如发生这种情况，如锥面的顶点), 那么曲率的连续性在这点中断. 下面的研究将限制在这样的曲面，或这样的曲面的一部分，即具有连续的曲率而无处中断. 注意到由于在奇点处曲率的连续性中断了，且必导致不确定的解，因而，我们用于确定切平面的位置的方法在奇点处将失去意义.

4.

利用 A 点处的切平面的法线方向 (这一方向也称之为 A 点处的曲面的法向) 来确定切平面的定向，这对于切平面的定向的研究会是很方便的. 我们将用相应的辅助球面上的点 L 表示这一法方向，并设

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z;$$

用 x, y, z 表示点 A 的坐标. 又设 $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ 为曲面上另一点 A' 的坐标; ds 为从点 A 到点 A' 的无穷小距离; 最后，设 λ 为球面上与线元素 AA' 的方向相应的点. 那么我们有

$$dx = ds \cdot \cos(1)\lambda, \quad dy = ds \cdot \cos(2)\lambda, \quad dz = ds \cdot \cos(3)\lambda,$$

并且，由于 $\lambda L = 90^\circ$,

$$X \cos(1)\lambda + Y \cos(2)\lambda + Z \cos(3)\lambda = 0.$$

联立这些等式，我们得到

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

有两种一般的方法来定义一个曲面. 第 1 种 方法是利用坐标 x, y, z 之间的方程，我们可以假定这一方程已经归约为形式 $W = 0$, 这里 W 是未定元 x, y, z 的一个函数. 设函数 W 的全微分为:

$$dW = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

在曲面上，我们有

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

因此,

$$P \cos(1)\lambda + Q \cos(2)\lambda + R \cos(3)\lambda = 0.$$

由于这个方程 (以及我们上面得到的方程) 必定对曲面上所有线元 ds 的方向都成立，我们很容易看出: X, Y, Z 必定分别成比例于 P, Q, R, 因此，由于

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

我们有

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

或者

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

第 2 种 方法是将坐标表示为两个变量 p, q 的函数形式. 假设这些函数的微分给出

$$dx = a\,dp + a'\,dq,$$
$$dy = b\,dp + b'\,dq,$$
$$dz = c\,dp + c'\,dq.$$

用这些值替换上述已经给出的公式，我们得到

$$(aX+bY+cZ)dp+(a'X+b'Y+c'Z)dq=0.$$

由于这个方程必须不依赖于微分 dp, dq 的值而成立，显然地我们有

$$aX+bY+cZ=0,\quad a'X+b'Y+c'Z=0.$$

从这里我们看出，X, Y, Z 将分别成比例于数量

$$bc'-cb',\quad ca'-ac',\quad ab'-ba',$$

因此，为简洁，若令

$$\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}=\Delta,$$

我们有

$$X=\frac{bc'-cb'}{\Delta},\quad Y=\frac{ca'-ac'}{\Delta},\quad Z=\frac{ab'-ba'}{\Delta},$$

或者

$$X=\frac{cb'-bc'}{\Delta},\quad Y=\frac{ac'-ca'}{\Delta},\quad Z=\frac{ba'-ab'}{\Delta},$$

把这两种方法联合起来，有 *第 3 种* 方法，在这种方法中，其中的一个坐标，比如说 z，由另外两个坐标 x, y 的函数的形式表示．这种方法明显地仅是第 1 或第 2 种方法的特殊情形．如果我们设

$$dz=t\,dx+u\,dy,$$

我们有

$$X=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Y=\frac{-u}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Z=\frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}},$$

或者

$$X=\frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Y=\frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Z=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}.$$

5.

在上文所得到的两个解，明显地给出球面上相对的两点，或相反的两个方向．这正如我们所期望的，因为法向可以从曲面的两侧方向作出．如果我们希望区分出曲面上相互接界的这两个区域，并且称其中一侧为外部区域而另一侧为内部区域，则利用第 2 节 (VII) 的定理，我们可以指定这两个法向的每一个以一个合适的解，而且同时可以建立一个区别两个区域的标准．

在第 1 种方法中，这一标准是用量 W 的符号来区别的．事实上，一般地说，曲面将空间划分为两个区域，在其中一个区域内 W 保持正值，而在另一个区域中 W 变成负值．事实上，从这个定理很容易看出，如果 W 在朝外的区域取正值，并且如果假定法向向外，则我们取第 1 个解．而且，在任何情况下，容易决定是否同样的法则对于在整个曲面上 W 的符号都成立，或者是对于不同的部分有不同的规则．只要系数 P, Q, R 有有限值，并且不同时为零．连续性的法则告诉我们 W 的符号将保持不变．

如果我们按照第 2 种方法，我们可以想象曲面上的两族曲线．其中一族曲线是 p 为变量而 q 为常数；另一族曲线是 q 为变量而 p 为常数．这些曲线关于外部区域的相对位置将决定必须采用两个解中的哪一个．事实上，无论何时，3 条线 (即当 p 增加时从点 A 出发的曲线分支，当 q 增加时，从点 A 出发的曲线分支，以及朝向外区域的法线) 的相对位置就象从坐标系的原点出发的各自独立的 x,y,z 轴一样 (例如，如果对于前述的 3 条线或者对于后面所述的 3 条轴，我们可以设想第 1 条指向左方，第 2 条指向右方，第 3 条指向上), 则取第 1 个解．但当这 3 条线的相对位置与 x,y,z 轴的相对位置相反时，则第 2 个解将成立．

在第 3 种方法中，将会看到，当 z 取得一个正的增量，x 和 y 保持常数，点将穿过区域的外部或穿向区域的内部．对于前一情形，由于法向朝外，第 1 个解成立；后一情形第 2 个解成立．

6.

正如通过把曲面的法线方向平移到球面上，得到曲面上的每一个确定的点与球面上一个确定的点相对应，对于任意的曲线或图形，我们也可以用与前者相应的球面上的曲线或图形来表示．用这种方法来比较相互对应的两个图形，其中的一个可以看成是另一个的像．有两点必须予以考虑，其一是只考虑数量，而另一点是 (不考虑其数量关系) 只考虑其位置．

这第 1 点将是某些思想的基础，这些思想引进曲面的理论中看来是非常明智的．因此，对于曲面上含于有限区域的部分，我们指定一个总曲率 (或曲率积分) (total or integral curvature), 它由与曲面上相对应的球面上图形的面积表示．从这个曲率积分必定会区分出某种特定曲率，这种曲率我们称之为曲率测度 (measure of curvature). 后者涉及到曲面上的一个点，并且可以表示为一个商数，这一商数为关于这一点的面积元素的曲率积分除以这一点的面积元素本身；因此它表示曲面上的无穷小面积和相应的附属球面上的无穷小面积之比．这些观念的运用将证明是非常合理的，正如我们所希望的，我们将在下面解释．关于专门用语，我们已经特别地考虑到尽量避免多义性．基于这个原因，我们不认为严格地沿袭在平面曲线理论中通常所接受的术语的类比是有益处的．根据旧的术语，曲率测度应该称为曲率，而总曲率，则称为放大率 (amplitude). 但是，假如它们更有意义，并且更不容易导致误解，那么我们为什么不自由地选择词语呢？

球面上一个图形的位置可以与曲面上相应图形的位置相似，或者与之相反．前者是这样的情形，当曲面上从同一点出发的两条不同方向的曲线 (当不是相反方向) 的位置关系与球面上相应曲线的位置关系相似，这也就是说，在右方的曲线在球面上相应的曲线也在右方；后者则是相反的情形成立．我们将通过曲率测度的正或负的符号来区别这两种情形．但是，明显地，这种区别仅当我们在每个曲面上选定一侧，并假定图形在这一侧上．在辅助球面上，我们将利用外侧的表面，也就是从中心向外的方向；在曲面上，我们利用我们已经考虑过的外侧表面，更确切地说，那个表面是被认为是引出法向的那一侧．因为，明显地，如果曲面上的图形和法向两者都变到相反的一侧，只要相应的像被表

示在球面的同一侧，那么关于图形的相似性就没有什么变化.

我们指定的依据无穷小图形位置的曲率测度的正负号，也可以推广到曲面上的一个有限图形的整体曲率. 然而，如果我们希望讨论一般的情形，那么一些解释将是必要的. 在这里我们仅作简单的介绍. 只要曲面上的图形使得其上的不同的点相应于辅助球面上不同的点，则这一定义不需要更多的解释. 但是每当这个条件不满足时，那么对于球面上图形的特定的部分就有必要考虑两次或更多次. 从相似的或相反的位置，可以增加面积的总量，或者是面积可能部分地或完全地相互抵消. 在这种情形，最简单的方法是假定把曲面分成很多小块，使得每一小块满足上述条件；指定每一小块上的曲率积分，规定其绝对值为相应的辅助球面上的相应图形的面积，而符号由这个图形的位置确定；最后，指定整个图形的整体曲率为相应的单个小块的整体曲率总和. 所以，一般地，一个图形的曲率积分等于 $\int k\,d\sigma$. 这里 $d\sigma$ 表示图形的面积元素，k 为任意一点的曲率测度. 关于这一积分的几何表示的要点归结为如下的问题. 曲面上图形的边界 (在第 3 节的限制下) 将总是相应于球面上的一条闭曲线. 如果后者本身没有自相交，那么这条闭曲线将把整个的球面分成两个部分，其中的一个部分与曲面上的图形相对应；并且它的面积 (取正值或负值，根据它的边界相应于它自身的位置是相似于或相反于曲面上图形的位置) 将表示曲面上图形的整体曲率. 但是若这条曲线自相交一次或多次，都将变成一个复杂的图形，然而对于这种情形，也可以和没有结点的图形一样合理地指定一个确定的面积；而且可以适当地解释这个面积为一个曲率积分的值. 然而，从这一非常一般的观点看来，我们必须留有对这些图形的理论另一种更为扩展情形解释的空间.

7.

现在，我们将找出一个表达一个曲面上的任意点的曲率测度的公式. 设 $d\sigma$ 表示这一曲面的面积元素；那么 $Zd\sigma$ 表示坐标 x,y 平面上这一元素的投影的面积；因此，如果 $d\Sigma$ 是球面上相应的元素的面积，$Zd\Sigma$ 就是向同一平面的投影的面积. 事实上，Z 的符号的正或负表示投影的位置与被投影图形的元素的位置是相同或相反. 明显地，这些投影在数量上具有相同的比率，并且在元素本身的位置上也具有相同的关系. 现在，让我们考虑曲面上的三角形元素，并假设形成它们的投影的 3 个点的坐标为

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x+dx, & y+dy, \\ x+\delta x, & y+\delta y, \end{array}$$

那么这个三角形的面积的两倍可用下列公式表示为

$$dx\cdot\delta y-dy\cdot\delta x,$$

并且这个公式取正或负的形式取决于从第 1 个点到第 2 个点的边与第 1 个点到第 3 个点的边的位置是相同或相反于坐标系的 x 轴与 y 轴的位置.

用同样的方法，如果 3 个点的坐标形成球面上相应的元素的投影，以球面的中心为

原点，得到 3 个点的坐标为：

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X+dX, & Y+dY, \\ X+\delta X, & Y+\delta Y. \end{array}$$

这个投影的面积的两倍可以用下式表达：

$$dX\cdot\delta Y-dY\cdot\delta X.$$

这个公式的符号的确定方式同上. 因此，曲面上在该点的曲率测度为：

$$k=\frac{dX\cdot\delta Y-dY\cdot\delta X}{dx\cdot\delta y-dy\cdot\delta x}.$$

现在，如果我们假定曲面的类别按照第 4 节中的第 3 种方法所定义，X 和 Y 将取量 x,y 的函数的形式. 因此，我们有

$$\begin{aligned} dX&=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial X}{\partial y}\cdot dy, & \delta X&=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\delta y,\\ dY&=\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot dy, & \delta Y&=\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\delta y. \end{aligned}$$

当用这些值替换，上述的表达式就变成

$$k=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

令 (如上)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=t,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=u,$$

以及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=T,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=U,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=V,$$

或者

$$dt=T dx+U dy,\quad du=U dx+V dy.$$

从上面已经给出的公式，我们有

$$X=-tZ,\quad Y=-uZ,\quad (1+t^2+u^2)Z^2=1,$$

因此

$$\begin{gathered} dX=-Z\,dt-t\,dZ,\\ dY=-Z\,du-u\,dZ,\\ (1+t^2+u^2)dZ+Z(t\,dt+u\,du)=0, \end{gathered}$$

或者

$$\begin{aligned} dZ&=-Z^3(t\,dt+u\,du),\\ dX&=-Z^3(1+u^2)dt+Z^3\,tu\,du,\\ dY&=+Z^3\,tu\,dt-Z^3(1+t^2)\,du. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial X}{\partial x} = Z^3(-(1+u^2)T + tu\,U), \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = Z^3(-(1+u^2)U + tuV),$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Z^3(tu\,T - (1+t^2)U), \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = Z^3(tu\,U - (1+t^2)V).$$

用这些值替换上述的公式，那么上述的公式变成

$$k = Z^6(TV-U^2)(1+t^2+u^2) = Z^4(TV-U^2) = \frac{TV-U^2}{(1+t^2+u^2)^2}.$$

8.

通过选择适当的坐标系的原点和坐标轴，我们可以容易地使得数量 t, u, U 的值在一特定的点为零. 事实上，如果以该点的切平面作为 $xy-$平面，那么前面两个条件将得到满足. 进一步，如果原点以 A 点本身代替，则明显地，坐标 z 的表达式就取形式

$$z = \frac{1}{2}T^\circ x^2 + U^\circ xy + \frac{1}{2}V^\circ y^2 + \Omega,$$

这里 Ω 是高于二次的项. 现在让 x 和 y 轴旋转一个角度 M, 使得

$$\tan 2M = \frac{2U^\circ}{T^\circ - V^\circ}.$$

容易看出，必然地得到一个以下形式的方程

$$z = \frac{1}{2}Tx^2 + \frac{1}{2}Vy^2 + \Omega.$$

这样第 3 个条件也得到满足. 有了这些准备，显然有

Ⅰ. 如果曲面被一个经过法线和 x 轴的平面所截，得到一条平面曲线，则该曲线在点 A 处的曲率半径等于 $1/T$, 正负号表示曲线是凸或者是凹向 z 轴为正的一侧的区域.

Ⅱ. 用同样的方法得到 $1/V$ 表示平面曲线在点 A 处的曲率半径，这个平面曲线是曲面与经过 y 轴和 z 轴的平面的交线.

Ⅲ. 令 $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. 方程变形为:

$$z = \frac{1}{2}(T\cos^2\phi + V\sin^2\phi)r^2 + \Omega.$$

从这里我们可以看出，如果截线是由过 A 点的法线，并且与 x 轴成角度 ϕ 的平面所截得，我们将有一个平面曲线，它在点 A 处的曲率半径为

$$\frac{1}{T\cos^2\phi + V\sin^2\phi}.$$

Ⅳ. 因此，当 $T = V$ 成立时，在所有法平面上的曲率半径都将相等. 但是，如果 T 和 V 不相等时，很明显地，由于对角度 ϕ 的任意值, $T\cos^2\phi + V\sin^2\phi$ 的值介于 T 和 V 之间，在第Ⅰ和第Ⅱ部分所考虑的主截线的曲率半径提供了曲率的极 (大，小) 值；这就是说，如果 T 和 V 有相同的符号，其中之一为曲率的最大值，而另一个为最小值. 另一方面，如果 T 和 V 的符号相反，则其中之一有最大凸曲率，而另一个有最大的凹曲率. 这些结果包含了杰出的 Euler 首次证明了的关于曲面的曲率的几乎所有的结果.

V．曲面上在点 A 处的曲率测度取非常简单的形式

$$K = TV.$$

因此，我们有：

定理 任何曲面上的任意一点处的曲率测度都等于一个分数，它的分子为单位 1，分母是法截线的曲率半径的两个极值的乘积．

同时，显然有：曲率测度对于凹－凹或者凸－凸曲面 (这个区别是非本质的) 为正，但对于凹－凸曲面为负．如果曲面由相应于这两种情形的部分所组成，那么在分隔这两种情形的曲线上，其曲率测度应该为零．后面，我们将对曲率测度处处为零的曲面的性质作仔细的研究．

9.

在第 7 节的最后给出的曲率测度的一般公式，由于它只包含 5 个量，所以是所有情形中最简单的．事实上，我们将得到一个更加复杂的公式，它包含有 9 个量，如果我们愿意运用表示曲面的第 1 种方法．保留第 4 节中记号，同样，令

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = R',$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \cdot \partial z} = P'', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial z} = Q'', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial y} = R'',$$

那么

$$\begin{aligned} dP &= P'dx + R''dy + Q''dz, \\ dQ &= R''dx + Q'dy + P''dz, \\ dR &= Q''dx + P''dy + R'dz, \end{aligned}$$

现在，由于 $t = -P/R$，通过微分我们发现有

$$R^2 dt = -RdP + PdR = (PQ'' - RP')dx + (PP'' - RR'')dy + (PR' - RQ'')dz,$$

或者，用下面的方程

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

消去 dz：

$$R^3 dt = (-R^2P' + 2PRQ'' - P^2R')dx + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dy.$$

用同样的方法，我们得到

$$R^3 du = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dx + (-R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R')dy.$$

从这里我们推断出

$$\begin{aligned} R^3T &= -R^2P' + 2PRQ'' - P^2R', \\ R^3U &= PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'', \\ R^3V &= -R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R'. \end{aligned}$$

以这些值替代第 7 节中的公式，我们得到曲率测度 k 的下列对称公式

$$(P^2+Q^2+R^2)^2k = P^2(Q'R'-P''^2)+Q^2(P'R'-Q''^2)+R^2(P'Q'-R''^2)$$
$$+2QR(Q''R''-P'P'')+2PR(P''R''-Q'Q'')+2PQ(P''Q''-R'R'').$$

10.

事实上，如果我们按照曲面的第 2 种定义方法，我们将会得到一个更加复杂的公式，这个公式包含了 15 个量．然而推导出这个公式仍是非常重要的．保留第 4 节中的记号，让我们设

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}=\alpha,\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial p\cdot\partial q}=\alpha',\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=\alpha'',$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}=\beta,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial p\cdot\partial q}=\beta',\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}=\beta'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\gamma,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial p\cdot\partial q}=\gamma',\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\gamma'',$$

并且让我们简单地记

$$bc'-cb'=A,\quad ca'-ac'=B,\quad ab'-ba'=C,$$

首先我们看到

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

或者

$$dz=-\frac{A}{C}dx-\frac{B}{C}dy.$$

因此，由于 z 可以看成是 x,y 的一个函数，我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=t=-\frac{A}{C},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=u=-\frac{B}{C}.$$

那么，从公式

$$dx=a\,dp+a'dq,\qquad dy=b\,dp+b'dq$$

我们有

$$C\,dp=b'dx-a'dy\qquad C\,dq=-b\,dx+a\,dy.$$

由此，我们得到关于 t,u 的全微分

$$C^3dt=\left(A\frac{\partial C}{\partial p}-C\frac{\partial A}{\partial p}\right)(b'dx-a'dy)+\left(C\frac{\partial A}{\partial q}-A\frac{\partial C}{\partial q}\right)(b\,dx-a\,dy),$$
$$C^3du=\left(B\frac{\partial C}{\partial p}-C\frac{\partial B}{\partial p}\right)(b'dx-a'dy)+\left(C\frac{\partial B}{\partial q}-B\frac{\partial C}{\partial q}\right)(b\,dx-a\,dy),$$

如果我们用下列这些公式替换

$$\frac{\partial A}{\partial p}=c'\beta+b\gamma'-c\beta'-b'\gamma,$$
$$\frac{\partial A}{\partial q}=c'\beta'+b\gamma''-c\beta''-b'\gamma'.$$
$$\frac{\partial B}{\partial p}=a'\gamma+ca'-a\gamma'-c'a,$$

$$\frac{\partial B}{\partial q} = a'\gamma' + ca'' - a\gamma'' - c'a',$$
$$\frac{\partial C}{\partial p} = b'a + a\beta' - ba' - a'\beta,$$
$$\frac{\partial C}{\partial q} = b'a' + a\beta'' - ba'' - a'\beta',$$

如果我们注意到以此种方式得到的微分 dt, du 的值必须分别地 (不依赖于微分 dx, dy) 等于数量 $Tdx + Udy$, $Udx + Vdy$, 在一些充分明显的变换之后，我们将发现

$$\begin{aligned}
C^3T = {} & \alpha Ab'^2 + \beta Bb'^2 + \gamma Cb'^2 \\
& - 2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' \\
& + \alpha'' Ab^2 + \beta'' Bb^2 + \gamma'' Cb^2, \\
C^3U = {} & -\alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' \\
& + \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\
& - \alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab, \\
C^3V = {} & \alpha Aa'^2 + \beta Ba'^2 + \gamma Ca'^2 \\
& - 2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' \\
& + \alpha'' Aa^2 + \beta'' Ba^2 + \gamma'' Ca^2,
\end{aligned}$$

因此，为了简单起见，如果我们令

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \tag{1}$$

$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \tag{2}$$

$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D''. \tag{3}$$

我们有

$$\begin{aligned}
C^3T &= Db'^2 - 2D'bb' + D''b^2, \\
C^3U &= -Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab, \\
C^3V &= Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.
\end{aligned}$$

在一系列计算之后，从这里我们发现

$$C^6(TV - U^2) = (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2)C^2.$$

因此，曲率测度的公式为

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$

11.

用刚刚发现的公式，我们将要建立另外一个公式. 这个公式可以认为是曲面理论中应用最广泛的公式. 让我们引进下列记号:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= E, \\
aa' + bb' + cc' &= F, \\
a'^2 + b'^2 + c'^2 &= G,
\end{aligned}$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = m, \tag{4}$$
$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m', \tag{5}$$
$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'', \tag{6}$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n, \tag{7}$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n', \tag{8}$$
$$a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'', \tag{9}$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta.$$

让我们从方程 1, 4, 7 中消去量 β, γ, 这只要在这些方程中分别乘以 $bc' - cb', b'C - c'B, cB - bC$, 并相加. 这样我们就得到:

$$\begin{aligned}&(A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha \\ &= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC).\end{aligned}$$

这一方程很容易变成

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

同样地，从同样的方程中消去 α, γ, 或者 α, β, 得到:

$$\begin{aligned}BD &= \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE), \\ CD &= \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE),\end{aligned}$$

这 3 个方程分别乘以 $\alpha'', \beta'', \gamma''$ 并相加，我们得到

$$DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE). \tag{10}$$

如果我们以同样的方法处理方程 2, 5, 8, 我们得到

$$\begin{aligned}AD' &= \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E), \\ BD' &= \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E), \\ CD' &= \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E).\end{aligned}$$

当这些方程分别乘以 α', β', γ' 后并相加，又可以得到

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

联立这个方程和 (10) 式给出

$$\begin{aligned}DD'' - D'^2 = &(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\Delta \\ &+ E(n'^2 - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm'').\end{aligned}$$

显然，我们有

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 2m,\ \frac{\partial E}{\partial q} = 2m',\ \frac{\partial F}{\partial p} = m' + n,\ \frac{\partial F}{\partial q} = m'' + n',\ \frac{\partial G}{\partial p} = 2n',\ \frac{\partial G}{\partial q} = 2n'',$$

或者

$$m=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p},\qquad m'=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\qquad m''=\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$
$$n=\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\qquad n'=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},\qquad n''=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}.$$

然而，很容易看出，我们有

$$\begin{aligned}&\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2\\=&\frac{\partial n}{\partial q}-\frac{\partial n'}{\partial p}=\frac{\partial m''}{\partial p}-\frac{\partial m'}{\partial q}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\end{aligned}$$

如果我们将这些不同的表达式代入上一节所导出的曲率测度的公式，我们得到下面的公式. 它仅包含数量 E,F,G 以及它们的一阶和二阶的微商

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)^2k=&E\left(\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}+\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right)\\&+F\left(\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+4\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right)\\&+G\left(\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right)\\&-2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right).\end{aligned}$$

12.

由于我们总有

$$dx^2+dy^2+dz^2=Edp^2+2Fdp\cdot dq+Gdq^2,$$

很显然

$$\sqrt{Edp^2+2Fdp\cdot dq+Gdq^2}$$

是曲面上的线元素的一般表达式. 在前一节所详细阐述的分析向我们表明，为了求出曲率测度，不需要坐标 x,y,z 作为未定元 p,q 的函数的有限公式；仅仅有任意线元素的量值的一般表达式就足够了. 让我们开始进入这个非常重要的定理的一些应用.

假设我们的曲面可以展开到另一个曲面上 (弯曲的或者是平直的), 使得对于前一曲面上的每一点 (由坐标 x,y,z 所确定) 将对应于后一曲面上的一个确定的点 (它们的坐标为 x',y',z'). 明显地，坐标 x',y',z' 也可以看成是未定元 p,q 的函数，因此对于其线元素 $\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$, 我们有一个表达式

$$\sqrt{E'dp^2+2F'dpdq+G'dq^2},$$

这里 E',F',G' 仍表示 p,q 的函数. 但是从一个曲面展开到另一个曲面上的这一观念，显然地有在两个曲面上相应的元素必然相等. 因此，我们有恒等式

$$E=E',\quad F=F',\quad G=G'.$$

因此，前一节中的公式本身就导出了如下的绝妙定理 (egregium theorema)

定理 *如果一曲面可以展开到另一曲面上，那么曲率测度在每一对应点处保持不变.*

明显地，曲面的任何一个有限部分在展开到另一曲面后将保持相同的整体曲率.

曲面可展到一个平面上构成了特殊的情形，迄今为止，几何学家们的注意力一直限于此种情形. 我们的理论立即表明这种曲面在每一点处的曲率测度等于零. 因此，如果这些曲面是按照第 3 种方法定义的，我们就得到，在曲面的每一点处都有：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

尽管该结果事实上不久前已为人所知，但是通常来说 (至少就我们所知) 却还没有如我们所希望的那样被严格地给予证明.

13.

在上一节中所探求的命题导致从新的观点来研究曲面. 这个观点本身在几何学方面值得仔细研究，那就是，我们不将曲面视为体的边界，而是视其为一个柔软但不能被拉伸的，其中一个维度消失了的体. 那么曲面的一部分性质依赖于它的形状，而另一部分性质是绝对的，那就是无论曲面本身怎样弯曲总是保持不变. 从我们所给出的这些表达式的意义上来说，曲率测度和整体曲率是属于最后我们所说的性质，对它们的研究开辟了几何学上新的富有成果的领域. 其次是关于短程线的研究. 我们将对于短程线研究的主要部分留到后面的章节. 按这个观点，对平面和可以展成为平面的曲面 (例如圆柱面，圆锥面等), 基本上可以看作相同的；按照这个观点，对于曲面的一般表达式来说，现在的出发点是公式

$$\sqrt{Edp^2+2Fdp\cdot dq+Gdq^2}.$$

它表达了弧长元素和两个变数 p,q 间的关系. 但是在继续进一步研究之前，我们先介绍一下在一个给定的曲面上的关于最短路径 (测地线) 的理论的要点.

14.

空间的曲线一般地由如下方式给出，即它的不同点的坐标 x,y,z 由一个单变量的函数形式给出，这个单变量我们称之为 w. 从一个任意的初始点到坐标为 x,y,z 的点的这样一条曲线的弧长由下列积分表示

$$\int dw\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

如果我们假定这条曲线的位置经过一个无穷小的变分，那么不同的点的坐标获得变分 $\delta x,\delta y,\delta z$, 整个的弧长的变分变成

$$\int\frac{dx\cdot d\delta x+dy\cdot d\delta y+dz\cdot d\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

这个表达式我们可以变为如下形式

$$\frac{dx\cdot\delta x+dy\cdot\delta y+dz\cdot\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$
$$-\int\left(\delta x\cdot d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\delta y\cdot d\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\delta z\cdot d\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right).$$

我们知道，在曲线是它的端点之间的最短路径的情形时，积分号内的表达式必须为零. 由于这曲线必须在给定的曲面上，而曲面是由方程

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

定义的. 变分 $\delta x,\delta y,\delta z$ 也必须满足方程

$$P\delta x+Q\delta y+R\delta z=0.$$

根据熟悉的规则，从上式，立即可以得出下列微分

$$d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad d\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad d\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

必然分别地成比例于数量 P,Q,R. 设 dr 为曲线上的弧长元素；λ 表示与这一元素的方向相应的辅助球面上的点；L 为与曲面上的法线方向相应的辅助球面上的点；最后，设 ξ,η,ζ 为点 λ 的坐标，X,Y,Z 为点 L 的关于球面中心的坐标. 那么我们有

$$dx=\xi dr,\quad dy=\eta dr,\quad dz=\zeta dr.$$

从这些等式我们看出，上面的微分变成 $d\xi,d\eta,d\zeta$. 并且由于量 P,Q,R 成比例于 X,Y,Z，那么最短路线的特征可以由下列方程表示：

$$\frac{d\xi}{X}=\frac{d\eta}{Y}=\frac{d\zeta}{Z}.$$

然而，很容易地看出

$$\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}$$

等于球面上的微小弧长 (这一弧长度量了弧长元素 dr 的起点与终点处切线方向之间的角度)，如果 ρ 表示最短路线在这一点的曲率半径，那么它等于 dr/ρ. 这样我们有：

$$\rho d\xi=Xdr,\quad \rho d\eta=Ydr,\quad \rho d\zeta=Zdr.$$

15.

考虑从曲面上一给定点 A 出发的一组无数条的最短线，并假设我们是通过角来区别这些曲线的，这个角是由我们选定的作为它们当中的第一条曲线的第一个线元素与它们中的每一条曲线的第一个线元素构成的. 设 ϕ 是那个角，或者更一般地，是那个角的函数，并且 r 表示这样的一条最短线上的从点 A 到坐标为 x,y,z 的点的弧长. 由于变量 r,ϕ 的确定的值对应于曲面上确定的点，坐标 x,y,z 可以看成是 r,ϕ 的函数. 我们将保留记号 $\lambda,L,\xi,\eta,\zeta,X,Y,Z$ 与上文中相同的意思，这个记号用于任意一条最短线中的任意点.

具有相同弧长 r 的所有的最短线的端点在另一条曲线上，它的长度 (从一个任意起点开始度量) 我们记它为 v. 这样 v 可以看成是未定元 r,ϕ 的一个函数，如果记 λ' 为球面

上相应于元素 dv 的方向的点，并且 ξ', η', ζ' 表示相应于球面中心的这一点的坐标，我们有：

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \xi' \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \eta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \phi} = \zeta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi}.$$

从这组方程以及方程

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \eta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \zeta.$$

我们有

$$\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi}.$$

设 S 表示这一方程的最左端的项，它将仍然是 r, ϕ 的一个函数，对 S 关于 r 求微分给出

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial r} &= \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \cdot \partial\left(\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right) \Big/ \partial\phi \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

但是

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

因此它的微分等于零；如果 ρ 表示曲线 r 的曲率半径，由前一节我们有

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{X}{\rho}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{Y}{\rho}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{Z}{\rho}.$$

这样，由于 λ' 明显地位于极为 L 的大圆上，我们有

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0.$$

从这一点我们看出 S 是独立于 r 的，因此 S 仅是 ϕ 的一个函数．但是对于 $r = 0$ 我们显然有 $v = 0$, 因此 $\partial v/\partial\phi = 0$, 和 $S = 0$ 不依赖于 ϕ. 因此，一般地，我们必然地有 $S = 0$, 所以 $\cos\lambda\lambda' = 0$, 即 $\lambda\lambda' = 90°$. 从这里得到下面的

定理 *在一个曲面上，如果作从同一初始点出发的具有相同弧长的一族最短线，那么连接它们的端点的曲线将正交于最短线族中的每一条线.*

我们已经考虑了从最短线的基本性质推断出这个定理；但是这个定理的真实性通过下列的推理不需要任何的计算可以被显然地证明．设 AB, AB' 是在 A 点处有一个无穷小的角度且具有相同长度的两条最短线，并假设在由线元素 BB' 与最短线 BA 和 $B'A$ 所成的两个角中，有一个角与直角相差一个有限的量．那么，由连续性法则，可知其中一个角大于直角而另一个则小于直角．假设在顶点 B 处的角等于 $90° - \omega$, 在线 AB 上取一点 C, 使得

$$BC = BB' \cdot \operatorname{cosec}\omega,$$

那么，由于无穷小三角形 $BB'C$ 可以认为是平面图形，我们有

$$CB' = BC \cdot \cos\omega.$$

因此

$$AC+CB'=AC+BC\cos\omega=AB-BC\cdot(1-\cos\omega)=AB'-BC\cdot(1-\cos\omega),$$

即从 A 点 (经过 C 点的) 到 B' 点的路线小于最短线 (AB'). 证毕.

16.

与上一节中的定理相联系，我们叙述如下：*如果从一个曲面上的任意一条曲线上的不同点出发，向同一侧作与该曲线成直角且具有相同弧长的一组最短线，那么连结这组最短线的另一端点的曲线将正交于这一组最短线中的每一条.* 这个定理的证明与上一节的分析相似，除了 ϕ 表示给定曲线上的从任意点作得的弧长以外而无须什么变化；更确切地说，是这个弧长的函数. 由此所有的推理在这里将仍然成立，经过这样的修改，那么对于 $r=0$ 时，$S=0$ 现在就包含在假设本身之中了. 而且，这个定理比上一节中的定理更一般了. 因为，如果我们把给定的曲线取成是以点 A 为中心画出的无穷小的圆的话，那么我们可以认为它包含了第一个定理. 最后，在这里我们也可以以几何的考虑代替分析，而在这儿我们将不花时间予以分析，因为它们足够的明显了. (未完待续)

(陈惠勇 译　苏阳 校)

****

(上接 70 页) 在世界各地数学系的公告栏上都可以看到 AMS 推出的宣传材料 “数学瞬间”, 它们已经被翻译成多种语言.

问题的第 2 部分是：什么面临着风险？事实上，数学正面临着沉溺于它自己的成功的危险，因为当它成功时，大家就想抓住它、控制它和指挥它. 对于应用数学，这可能比纯数学更加真实，但肯定存在某些力量，它们可能会夺走我们自己安排研究计划的自由. 它们无处不在却难以察觉；它们的增强就象悄然上升的水面，因此年复一年地很少引起人们的注意，反而很受大家的欢迎，因为它们的到来往往附带以好消息，但是却也附带着坏事情. 这确实非常危险，我想这值得我们思考.

Notices: 在哪些地方您能看到这些力量在起作用？

Glimm: 它们作用于各个部门. 我想在很大程度上数学家处于外围，所以他们可能并没有注意到这些力量. 但是在它们确实产生影响的地方，都有联邦基金部门和大学行政部门在整个科学结构上的合作. 目前这其中的绝大部分还没有到达数学界，但是它们离数学已经相当近了，因此开始考虑这一问题并不为时过早.

Notices: 您说过数学家可能失去制定他们自己研究计划的自由, 这将会怎样发生？

Glimm: 在纯数学中还没有这样的事, 但是在更应用的一些的科学中, 这却是事实. 现在进行科学研究的花费比前更大，因此只有得到支持这种科学的联邦部门的许可，研究才能够得以进行，而这些部门都有他们自己的方式来决定支持什么或不支持什么. 一般说来，这一系统中的其他人倾向于与大潮流同游.

(张会平 译　陆柱家 校)

关于曲面的一般研究 (II)

Karl Friedrich Gauss

(于 1827 年 10 月 8 日提交给皇家学会)

17.

我们回到公式

$$\sqrt{E\,dp^2+2F\,dp\cdot dq+G\,dq^2}.$$

这个公式一般地表达了曲面上一个线元素的量值. 首先, 我们研究系数 E, F, G 的几何意义. 在第 5 节中, 我们已经说过, 可以假定位于曲面上的两个曲线族: 第 1 族是沿着每一曲线上 p 为变量, 而 q 为常数; 第 2 族是 q 为变量, 而 p 为常数. 曲面上的任何一点可以看成是第 1 族曲线中的一条曲线与第 2 族中的一条曲线的交点; 那么邻近这一点相应于一个变分 dp 的第 1 族曲线的线元素将等于 $\sqrt{E}\cdot dp$, 而相应于变分 dq 的第 2 族曲线的线元素将等于 $\sqrt{G}\cdot dq$. 最后, 记这两个线元素之间的夹角为 ω, 容易看出我们有

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

再者, 曲面的面积元素取平行四边形的形式, 这个平行四边形由第 1 族曲线中的两条曲线 (相应于 q, $q+dq$) 和第 2 族曲线中的两条曲线 (相应于 p, $p+dp$) 组成, 面积元素为

$$\sqrt{EG-F^2}dp\cdot dq.$$

曲面上的任意一条曲线, 若不属于这两族曲线, 则可以由以下方式确定: 假定 p, q 是一个新的变量的函数, 或者它们中的一个是另一个的函数. 设 s 表示这样一条曲线的弧长, 这个弧长从一任意的初始点开始度量, 并且每一方向都选择 s 为正的. 设 θ 表示角, 这个角是由线元素

$$ds=\sqrt{E\,dp^2+2F\,dp\cdot dq+G\,dq^2}$$

与从线元素的初始点所作出的第 1 族曲线所成的角. 为了不引起混淆, 我们假定这个角是由从 p 的值增加的第 1 族曲线的方向所度量的, 并且是沿着 q 的值也增加的方向取正值. 作了这些规定, 很容易看出

$$\cos\theta\cdot ds=\sqrt{E}\cdot dp+\sqrt{G}\cdot\cos\omega\cdot dq=\frac{E\,dp+F\,dq}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\theta\cdot ds=\sqrt{G}\cdot\sin\omega\cdot dq=\frac{\sqrt{EG-F^2}\cdot dq}{\sqrt{E}}.$$

译自: Astérisque, Vol.62 (1979), p.1–81, General Investigations of Curved Surfaces, Karl Friedrich Gauss.

18.

现在我们将研究这条曲线是最短线的条件. 由于它的长度 s 可以用积分表示为

$$s=\int\sqrt{E\,dp^2+2F\,dp\cdot dq+G\,dq^2},$$

为了达到最小值的条件，要求由曲线位置的一个无穷小变化所引起的这个积分的变分为零. 为此，如果我们把 p 看成是 q 的函数，那么在这种情形计算变得更加简单. 如果这个变分用记号 δ 表示，通过计算，我们有

$$\begin{aligned}\delta s&=\int\frac{\left(\dfrac{\partial E}{\partial p}\cdot dp^2+2\dfrac{\partial F}{\partial p}\cdot dp\cdot dq+\dfrac{\partial G}{\partial p}\cdot dq^2\right)\delta p+(2E\,dp+2F\,dq)d\delta p}{2ds}\\&=\frac{E\,dp+F\,dq}{ds}\cdot\delta p+\int\delta p\cdot\left(\frac{\dfrac{\partial E}{\partial p}\cdot dp^2+2\dfrac{\partial F}{\partial p}\cdot dp\cdot dq+\dfrac{\partial G}{\partial p}\cdot dq^2}{2ds}-d\cdot\frac{E\,dp+F\,dq}{ds}\right),\end{aligned}$$

并且我们知道，包含在积分号下括号里的式子一定与 δp 地等于零. 这样我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial p}\cdot dp^2+2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot dp\cdot dq+\frac{\partial G}{\partial p}\cdot dq^2&=2ds\cdot d\cdot\frac{E\,dp+F\,dq}{ds}\\&=2ds\cdot d\cdot\sqrt{E}\cdot\cos\theta\\&=\frac{ds\cdot dE\cdot\cos\theta}{\sqrt{E}}-2ds\cdot d\theta\cdot\sqrt{E}\cdot\sin\theta\\&=\frac{(Edp+Fdq)dE}{E}-\sqrt{EG-F^2}\cdot dp\cdot d\theta\\&=\left(\frac{Edp+Fdq}{E}\right)\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial p}\cdot dp+\frac{\partial E}{\partial q}\cdot dq\right)-2\sqrt{EG-F^2}\cdot dq\cdot d\theta.\end{aligned}$$

这就给出了一条曲线为最短线的条件方程:

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}\cdot d\theta=&\frac{1}{2}\cdot\frac{F}{E}\cdot\frac{\partial E}{\partial p}\cdot dp+\frac{1}{2}\cdot\frac{F}{E}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot dq+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot dp\\&-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot dp-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\cdot dq,\end{aligned}$$

这个式子也可以写成

$$\sqrt{EG-F^2}\cdot d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{F}{E}\cdot dE+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot dp-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot dp-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\cdot dq.$$

从这个方程，再利用方程

$$\cot\theta=\frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{dp}{dq}+\frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}$$

可以消去角 θ, 而导出一个关于 p,q 的二阶微分方程. 然而，这个式子将变得更加复杂并且较之前面的方程更少应用.

19.

如果变量 p,q 这样选择，使得第 1 族曲线与第 2 族曲线处处正交，那么我们在第 11 节和第 18 节所导出的关于曲率测度和在最短线方向的变分的一般公式就会变得非常简

单；换句话说，在这种情形下，一般地我们有 $\omega = 90^\circ$ 或者 $F = 0$. 于是曲率测度的公式变为：

$$4E^2G^2k = E\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial q} + E\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 + G\cdot\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p} + G\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 - 2EG\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right),$$

角 θ 的变分公式变为

$$\sqrt{EG}\cdot d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot dp - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\cdot dq.$$

在所有具有正交条件的不同情形中，最重要的一种情形是两族曲线之一的所有曲线(例如第 1 族曲线) 为最短线. 在这种情形下对固定的 q, 角 θ 等于零，因此由刚给出的角 θ 的变分方程，我们必有 $\partial E/\partial q = 0$, 或者说系数 E 必须独立于 q; 换句话说，E 必须或者是一个常数或者仅为 p 的一个函数. 最简单的情形是把 p 看成第 1 族曲线中每一条曲线的弧长，当第 1 族曲线中的所有曲线交于一点时，该弧长从这点开始度量；或者是，如果 (第 1 族曲线) 没有公共的交点，则从第 2 族曲线中的任何一条曲线开始度量. 有了这些约定，很明显地，现在 p 和 q 表示在第 15, 16 节中用 r 和 ϕ 表示的相同的量，并且 $E = 1$. 由此，前面的两个公式变成：

$$4G^2k = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - 2G\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial p^2},$$

$$\sqrt{G}\cdot d\theta = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\cdot dq,$$

或者，令 $\sqrt{G} = m$, 则

$$k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}, \qquad d\theta = -\frac{\partial m}{\partial p}\cdot dq.$$

一般地说， m 是 p, q 的一个函数，mdq 是第 2 族曲线中任一条曲线的弧长元素的表达式. 但是在那种所有 p 曲线从同一点出发的情形，明显地，对于 $p = 0$ 我们必有 $m = 0$. 而且，在我们讨论的情形，我们将把 q 本身看成角度，这个角度由第 1 族曲线中的任何一条曲线的元素与这一族曲线中任意选定的一条的线元素构成. 那么由于对 p 的一个无穷小值, 第 2 族曲线 (这可以看成是以 p 为半径的一个圆) 的一条曲线的线元素等于 $p\,dq$, 对无穷小的 p 值我们有 $m = p$, 因此对于 $p = 0$, $m = 0$ 成立，并且 $\partial m/\partial p = 1$.

20.

我们暂时停下，转而研究另一种情形. 在这种情形里，一般地我们假定 p 表示从一个固定点 A 到曲面上的任意一点的最短线的弧长，而 q 表示这条曲线的弧长元素与从点 A 出发的另一条给定的最短线的弧长元素构成的角. 设 B 为后一条曲线上的一个定点 (这里 $q = 0$), C 为曲面上的另一定点 (在这里我们简单地用 A 记 q 的值). 我们假设用一条最短线连结 B, C 两点，其弧长是从 B 开始度量的. 一般地，我们按照第 18 节的记法把它记为 s; 并且，就象在同一节中的记法，我们记 θ 为元素 ds 与 dp 所成的角；最后，我们记在点 B, C 的角度 θ 的值分别为 θ°, θ'. 因此我们有曲面上由最短线构成的一个三角形. 这个三角形在点 B, C 的角度我们简单地用同样的字母表示，那么 B 等于 $180^\circ - \theta$, 而 C 等于 θ'. 但是，从我们的分析可以容易地看出，所有的角度都假定是表达为数量而

不是度数，用这种方式角 $57°17'45''$ 对应于长度等于半径的一段圆弧．以这个角度为单位，我们令

$$\theta^\circ = \pi - B, \qquad \theta' = C,$$

这里 2π 表示 (单位) 球的 (大) 圆的周长．现在我们考察这个三角形的曲率积分，它等于

$$\int k\, d\sigma,$$

$d\sigma$ 表示这个三角形的面积元素．由于这个元素可以表示为 $mdp \cdot dq$, 因此，我们必须推广这个积分 1)

$$\iint k \cdot mdp \cdot dq$$

到整个的三角形区域上．让我们从关于 p 的积分开始，因为

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial p^2},$$

所以关于位于第 1 族曲线间的面积 (相应的第 2 个未定元的值为 $q, q+dq$) 的曲率积分的值为

$$dq \cdot \left(\text{常数} - \frac{\partial m}{\partial p} \right).$$

由于这个曲率积分对于 $p=0$ 时必须为零，积分常数必须等于 $p=0$ 时 $\partial m/\partial p$ 的值，换句话说，等于 1. 因此，我们有

$$dq \cdot \left(1 - \frac{\partial m}{\partial p} \right),$$

这里，对于 $\partial m/\partial p$ 必须取相应于这一区域上线 CB 的端点处的值．但是，在这条线上，由前一节我们有

$$\frac{\partial m}{\partial q} \cdot dq = -d\theta,$$

因此我们的表达式变成为 $dq + d\theta$. 现在通过从 $q=0$ 到 $q=A$ 的第 2 次积分，我们得到曲率积分为

$$A + \theta' - \theta^\circ,$$

或者

$$A + B + C - \pi.$$

曲率积分等于相应于这个三角形区域的辅助球面上那一部分的面积，取正号或负号取决于三角形区域位于曲面上的部分是凹 - 凹还是凹 - 凸的．单位面积取边长为单位长度 (球的半径) 的正方形的面积，整个球面的面积等于 4π. 由此可知，与三角形相应的辅助球面上相应部分的面积与整个球面的面积之比就等于 $\pm(A+B+C-\pi)$ 与 4π 之比．这个定理，如果我们没有搞错的话，应该被认为是曲面理论中最优美的定理，可以表述为如下的

1) 原文把此积分误为 $\iint mdp \cdot dq$.—— 译注

定理 在一个由凹 - 凹曲面上的最短线构成的三角形的内角之和与 180° 之间的盈余，或者在一个由凹 - 凸曲面上的最短线构成的三角形的内角之和与 180° 之间的亏量，等于在法向映射下球面上相应于三角形的映像部分的面积，如果球面的面积取为 720°.

更一般地，在一个每条边都是由最短线构成的任意的 n 边形中，则 n 边形内角和与直角的 $(2n-4)$ 倍之间的盈余，或者与直角的 $(2n-4)$ 倍之间的亏量 (取决于曲面的性质)，等于球面映射下相应于多边形的球面映像部分的面积，如果整个球面的面积取为 720°. 这一结果可以通过对多边形进行三角剖分，由前面的定理立即得到.

21.

让我们再一次给予符号 p, q, E, F, G, ω 以前面所赋予的一般意义，并进一步假设曲面的类型以相同的方式由另两个变量 p', q' 定义，在这种情形线元素一般地可表达为

$$\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2}.$$

由此对于曲面上的任何点，这个点由确定的变量 p, q 的值所定义，它将对应于变量 p', q' 确定的值，因此这个值可以看成是 p, q 的函数. 通过微分它们，假设我们得到

$$dp' = \alpha\, dp + \beta\, dq,$$
$$dq' = \gamma\, dp + \delta\, dq.$$

现在，我们将研究系数 α, β, γ, δ 的几何意义.

我们可以假定在曲面上有 4 族曲线，它们相应于 p, q, p', q' 各自独立地为常数. 如果通过相应于变量 p, q, p', q' 的值的某确定点，我们假设属于这 4 族曲线的 4 条曲线已作出，这些线的元素相应于正的增量 dp, dq, dp', dq' 是

$$\sqrt{E}\cdot dp, \quad \sqrt{G}\cdot dq, \quad \sqrt{E'}\cdot dp', \quad \sqrt{G'}\cdot dq'.$$

由这些元素的方向与一任意固定方向所成的角度，我们记之为 M, N, M', N', 按照使得 $\sin(N-M)$ 为正的方式来度量. 假定第 4 个角关于第 3 个角的位置使得 $\sin(N'-M')$ 也是为正 (这是可以做到的). 有了这些约定，如果我们考虑与第 1 个点相距一无穷小位移的另一个点，并且相应的变量值为 $p+dp$, $q+dq$, $p'+dp'$, $q'+dq'$, 则不难看出，一般地，不依赖于增量 dp, dq, dp', dq' ，我们有

$$\sqrt{E}dp\sin M + \sqrt{G}dq\sin N = \sqrt{E'}dp'\sin M' + \sqrt{G'}dq'\sin N'.$$

因为这些表达式中的每一个恰是这个新的点与方向角起始线间的距离. 但是，由上面引进的记号，我们有：

$$N - M = \omega.$$

以同样的方式我们令

$$N' - M' = \omega',$$

同时令

$$N - M' = \psi,$$

那么可以把刚刚发现的等式改变为下面的形式:

$$\begin{aligned}&\sqrt{E}\cdot dp\cdot\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}\cdot dq\cdot\sin(M'+\psi)\\=&\sqrt{E'}\cdot dp'\cdot\sin M'+\sqrt{G'}\cdot dq'\cdot\sin(M'+\omega),\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&\sqrt{E}\cdot dp\cdot\sin(N'-\omega-\omega'+\psi)+\sqrt{G}\cdot dq\cdot\sin(N'-\omega'+\psi)\\=&\sqrt{E'}\cdot dp'\cdot\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}\cdot dq'\cdot\sin N',\end{aligned}$$

并且由于上述的方程明显地不依赖于初始方向，这个方向可以任意地选择. 那么，令第 2 个公式中的 $N'=0$, 或第 1 个公式中的 $M'=0$, 我们得到下列方程组:

$$\begin{aligned}\sqrt{E'}\cdot\sin\omega'\cdot dp'&=\sqrt{E}\cdot\sin(\omega+\omega'-\psi)\cdot dp+\sqrt{G}\cdot\sin(\omega'-\psi)\cdot dq,\\\sqrt{G'}\cdot\sin\omega'\cdot dq'&=\sqrt{E}\cdot\sin(\psi-\omega)\cdot dp+\sqrt{G}\cdot\sin\psi\cdot dq,\end{aligned}$$

并且由于这个方程组必须等价于方程组:

$$\begin{aligned}dp'&=\alpha\,dp+\beta\,dq,\\dq'&=\gamma\,dp+\delta\,dq.\end{aligned}$$

因而方程组确定了系数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, 我们有

$$\alpha=\sqrt{\frac{E}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'},\qquad\beta=\sqrt{\frac{G}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'},$$
$$\gamma=\sqrt{\frac{E}{G'}}\cdot\frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'},\qquad\delta=\sqrt{\frac{G}{G'}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}.$$

这 4 个等式，联立以下等式

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}},\qquad\cos\omega'=\frac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$
$$\sin\omega=\sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}},\qquad\sin\omega'=\sqrt{\frac{E'G'-F'^2}{E'G'}},$$

可以写成

$$\begin{aligned}\alpha\sqrt{E'G'-F'^2}&=\sqrt{EG'}\cdot\sin(\omega+\omega'-\psi),\\\beta\sqrt{E'G'-F'^2}&=\sqrt{GG'}\cdot\sin(\omega'-\psi),\\\gamma\sqrt{E'G'-F'^2}&=\sqrt{EE'}\cdot\sin(\psi-\omega),\\\delta\sqrt{E'G'-F'^2}&=\sqrt{GE'}\cdot\sin\psi.\end{aligned}$$

由于通过替换

$$\begin{aligned}dp'&=\alpha\,dp+\beta\,dq,\\dq'&=\gamma\,dp+\delta\,dq.\end{aligned}$$

三项式

$$E'dp'^2+2F'dp'dq'+G'dq'^2$$

变换成为

$$Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2,$$

我们很容易地得到

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

并且反过来，后一个三项式必然可以通过下列替换变换为前一个三项式：

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)dp = \delta dp' - \beta dq', \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

我们发现

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot E',$$

$$-E\beta\delta + F(\alpha\delta + \beta\gamma) - G\alpha\gamma = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot F',$$

$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot G'.$$

22.

从前面的一般讨论，我们进入一个非常广阔的应用领域．在这里我们取 p', q' 为在第 15 节中用 r, ϕ 表示的数量，同时保持 p, q 的最一般的意义．我们在这里也将以这样的方式运用 r, ϕ，即对于曲面上的任意点，r 为从一个固定的点到该点的最短线的距离，而 ϕ 是这一点处的 r 的线元素与一个固定方向的夹角．由此我们有

$$E' = 1, \quad F' = 0, \quad \omega' = 90°.$$

我们令

$$\sqrt{G'} = m,$$

那么，任意的线元素等于

$$\sqrt{dr^2 + m^2 d\phi^2}.$$

因此，在前文中导出的关于 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的 4 个等式就给出

$$\sqrt{E} \cdot \cos(\omega - \psi) = \frac{\partial r}{\partial p}, \tag{1}$$

$$\sqrt{G} \cdot \cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q}, \tag{2}$$

$$\sqrt{E} \cdot \sin(\psi - \omega) = m \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p}, \tag{3}$$

$$\sqrt{G} \cdot \sin\psi = m \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q}, \tag{4}$$

但是，上一节中的最后一个方程以及倒数第 2 个方程给出

$$EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F \cdot \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2, \tag{5}$$

$$\left(E \cdot \frac{\partial r}{\partial q} - F \cdot \frac{\partial r}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q} = \left(F \cdot \frac{\partial r}{\partial q} - G \cdot \frac{\partial r}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p}. \tag{6}$$

作为 p, q 的函数，数量 r, ϕ, ψ 和 m (如果需要的话) 必定可以由这些方程所确定．事实上，方程 (5) 的积分给出 r；r 解出后，积分方程 (6) 可以求出 ϕ；并且，可以从方程 (1)、(2) 中的一个解出 ψ 本身．最后，可以从方程 (3)、(4) 中的一个或另一个解得 m.

方程 (5),(6) 的积分必然会引入两个任意的函数. 我们将很容易地理解它们的意义，如果我们记得这些方程并不只限于我们所考虑的情形. 当 r, ϕ 具有第 16 节中更普遍的意义时，方程仍成立. 此时，r 是正交于一个固定的但却是任意的曲线的最短线的弧长，而 ϕ 是这一固定曲线的部分弧长的一个任意函数，这一部分是任意最短线与一个任意固定点之间的截线. 一般的解决必须包括所有这些一般的方法. 而任意的函数成为确定的函数，仅当任意曲线和任意函数 (这里 ϕ 必须表示出) 成为确定的. 在我们的情形，可以考虑一个无穷小圆，它的圆心取为度量距离 r 的起点，并且 ϕ 表示圆周上的部分除以半径的商. 由此容易看到方程 (5), (6) 对于我们这个情形是充分的，如果假定未被确定的函数满足条件：r 和 ϕ 满足初始点和与这个点相距一个无穷小距离的点的条件.

此外，关于方程 (5), (6) 的积分本身，我们知道，它可以约化为常微分方程的积分. 然而，这个积分经常会非常复杂以至于这种化简可以得到的东西很少. 相反，当仅考虑曲面的一个有限的部分时，展开为级数序列是没有困难的，而且这对于实际需要是足够的了；并且这个公式成为解决很多重要问题的一个丰富的源泉. 但是，在此为了说明这种方法的本质，我们将仅详细阐述一个简单的例子.

23.

现在，我们将考虑下列情形，在这里所有 p 为常数的曲线是正交于 $\phi = 0$ 的曲线的最短线，其中 $\phi = 0$ 的曲线可以看成是横坐标轴. 设 A 是对应于 $r = 0$ 的点, D 是横坐标轴上的任意一点, $AD = p$, B 是正交 AD 于点 D 的最短线上的任意一点，且 $BD = q$, 因而 p 可以看成是点 B 的横坐标, q 是纵坐标. 我们假设横坐标在与 $\phi = 0$ 相应的轴的一侧为正向，而 r 则总认为是正的. 我们让纵坐标在角 ϕ 为 $0°$ 到 $180°$ 之间的区域为正向.

由第 16 节的定理，我们有

$$\omega = 90°, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

并且令

$$\sqrt{E} = n.$$

因此，n 将是 p, q 的函数，使得对于 $q = 0$ 时，它必等于一个单位. 利用第 18 节的公式于我们的情形表明，无论在怎样的最短线上必有

$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp,$$

这里 θ 表示这条最短线上的线元素与 q 为常数的曲线的线元素之间的夹角. 现在，由于横轴本身是一条最短线，并且由于在其上任何地方我们都有 $\theta = 0$, 我们看到对于 $q = 0$ 必然处处有

$$\frac{\partial n}{\partial q} = 0.$$

因此，我们得到，如果 n 展开为关于 q 的级数，那么这个级数必有如下形式：

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \cdots,$$

这里 f, g, h 等等是 p 的函数，我们令:

$$f = f^\circ + f'p + f''p^2 + \cdots,$$
$$g = g^\circ + g'p + g''p^2 + \cdots,$$
$$h = h^\circ + h'p + h''p^2 + \cdots.$$

或者

$$\begin{aligned} n = 1 + f^\circ q^2 + f'pq^2 + f''p^2q^2 + \cdots \\ + g^\circ q^3 + g'pq^3 + \cdots \\ + h^\circ q^4 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

24.

在我们的情形，第 22 节的方程给出:

$$n \sin\psi = \frac{\partial r}{\partial p}, \quad \cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q}, \quad -n\cos\psi = m \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad \sin\psi = m \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q},$$
$$n^2 = n^2\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2, \qquad n^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial q} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p} = 0.$$

有了这些方程 (其中第 5 及第 6 个方程包含于其它方程之中), r, ϕ, ψ, m, 或者这些量的任意的函数可以展开为级数. 我们将在此建立那些特别值得我们注意的级数展开.

由于对于无穷小的 p, q 的值我们必须有

$$r^2 = p^2 + q^2,$$

关于 r^2 的级数将开始于项 $p^2 + q^2$. 利用方程

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 = 4r^2,$$

通过待定系数法我们得到高阶的项.[1] 由此我们有

$$\begin{aligned} r^2 = p^2 + \frac{2}{3}f^\circ p^2q^2 + \frac{1}{2}f'p^3q^2 + \left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^{\circ 2}\right)p^4q^2 + \cdots \\ + q^2 \qquad + \frac{1}{2}g^\circ p^2q^3 + \frac{2}{5}g'p^3q^3 + \cdots \\ + \left(\frac{2}{5}h^\circ - \frac{7}{45}f^{\circ 2}\right)p^2q^4 + \cdots. \end{aligned} \qquad [1]$$

那么从公式

$$r \sin\psi = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\partial(r^2)}{\partial p},$$

我们有,

$$\begin{aligned} r\sin\psi = p - \frac{1}{3}f^\circ pq^2 - \frac{1}{4}f'p^2q^2 - \left(\frac{1}{5}f'' + \frac{8}{45}f^{\circ 2}\right)p^3q^2 + \cdots \\ - \frac{1}{2}g^\circ pq^3 - \frac{2}{5}g'p^2q^3 + \cdots \\ - \left(\frac{3}{5}h^\circ - \frac{8}{45}f^{\circ 2}\right)pq^4 + \cdots. \end{aligned} \qquad [2]$$

1) 我们认为在此给出这个计算并不必要. 而且计算过程可以通过某些技巧而简化.—— 原注

从公式

$$r\cos\psi=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(r^2)}{\partial q},$$

我们有,

$$\begin{aligned}r\cos\psi=q+\frac{2}{3}f^\circ p^2q+\frac{1}{2}f'p^3q+\left(\frac{2}{5}f''-\frac{4}{45}f^{\circ 2}\right)p^4q+\cdots\\+\frac{3}{4}g^\circ p^2q^2+\frac{3}{5}g'p^3q^2+\cdots\\+\left(\frac{4}{5}h^\circ-\frac{14}{45}f^{\circ 2}\right)p^2q^3+\cdots.\end{aligned}\tag{3}$$

这些公式给出角度 ψ. 对角 ϕ 的计算, 用同样的方法, $r\cos\phi$ 和 $r\sin\phi$ 的级数展开可以用以下偏微分方程非常优美地得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(r\cos\phi)}{\partial p}=n\cos\phi\cdot\sin\psi-r\sin\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial p},\\&\frac{\partial(r\cos\phi)}{\partial q}=\cos\phi\cdot\cos\psi-r\sin\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q},\\&\frac{\partial(r\sin\phi)}{\partial p}=n\sin\phi\cdot\sin\psi+r\cos\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial p},\\&\frac{\partial(r\sin\phi)}{\partial q}=\sin\phi\cdot\cos\psi+r\cos\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q},\\&n\cos\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial p}=0.\end{aligned}$$

联立这些方程得到

$$\begin{aligned}\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\cos\phi)}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial(r\cos\phi)}{\partial q}=r\cos\phi,\\\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\sin\phi)}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial(r\sin\phi)}{\partial q}=r\sin\phi.\end{aligned}$$

从这两个方程, $r\cos\phi$ 和 $r\sin\phi$ 的级数展开可以容易地得到, 它们的首项显然分别为 p,q. 这些级数为

$$\begin{aligned}r\cos\phi=p+\frac{2}{3}f^\circ pq^2+\frac{5}{12}f'p^2q^2+\left(\frac{3}{10}f''-\frac{8}{45}f^{\circ 2}\right)p^3q^2+\cdots\\+\frac{1}{2}g^\circ pq^3+\frac{7}{20}g'p^2q^3+\cdots\\+\left(\frac{2}{5}h^\circ-\frac{7}{45}f^{\circ 2}\right)pq^4+\cdots.\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}r\sin\phi=q-\frac{1}{3}f^\circ p^2q-\frac{1}{6}f'p^3q-\left(\frac{1}{10}f''-\frac{7}{90}f^{\circ 2}\right)p^4q+\cdots\\-\frac{1}{4}g^\circ p^2q^2-\frac{3}{20}g'p^3q^2+\cdots\\-\left(\frac{1}{5}h^\circ-\frac{13}{90}f^{\circ 2}\right)p^2q^3+\cdots.\end{aligned}\tag{5}$$

联立方程 [2], [3], [4], [5], 可以导出 $r^2\cos(\psi+\phi)$ 的级数展开，而且从这里 (除以级数 [1]) 可以得出 $\cos(\psi+\phi)$ 的级数展开，由此可以得到角 $\psi+\phi$ 本身的一个级数展开. 然而，这个级数可以用下列方法更加优美地获得. 通过微分本节开头引进的第 1 和第 2 个方程，我们得到

$$\sin\psi\cdot\frac{\partial n}{\partial q}+n\cos\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p}=0,$$

而这个方程联合下列方程

$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial p}=0$$

给出方程

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial q}+\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(\psi+\phi)}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial(\psi+\phi)}{\partial q}=0.$$

利用待定系数法，从这个等式，并且注意到级数的首项必定是 $\pi/2$ (半径认为等于 1, 2π 表示这个圆的周长), 我们可以容易地导出 $\psi+\phi$ 的级数展开.

$$\begin{aligned}\psi+\phi=\frac{1}{2}\pi-f^\circ pq-\frac{2}{3}f'p^2q-\left(\frac{1}{2}f''-\frac{1}{6}f^{\circ 2}\right)p^3q+\cdots\\ -g^\circ pq^2-\frac{3}{4}g'p^2q^2+\cdots\\ -\left(h^\circ-\frac{1}{3}f^{\circ 2}\right)pq^3+\cdots.\end{aligned}\qquad[6]$$

看来展开三角形 ABD 的面积为一个级数也值得. 关于这个推导，我们可用下列条件方程，这个方程可以容易地从非常明显的几何考虑导出，在这里 S 表示所需的面积:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n\,dq,$$

积分从 $q=0$ 开始. 利用待定系数法，从这个等式我们得到

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{2}pq-\frac{1}{12}f^\circ p^3q-\frac{1}{20}f'p^4q-\left(\frac{1}{30}f''-\frac{1}{60}f^{\circ 2}\right)p^5q+\cdots\\ -\frac{1}{12}f^\circ pq^3-\frac{3}{40}g^\circ p^3q^2-\frac{1}{20}g'p^4q^2+\cdots\\ -\frac{7}{120}f'p^2q^3-\left(\frac{1}{15}h^\circ+\frac{2}{45}f''+\frac{1}{60}f^{\circ 2}\right)p^3q^3+\cdots\\ -\frac{1}{10}g^\circ pq^4-\frac{3}{40}g'p^2q^4+\cdots\\ -\left(\frac{1}{10}h^\circ-\frac{1}{30}f^{\circ 2}\right)pq^5+\cdots.\end{aligned}\qquad[7]$$

25.

在前面的公式中，考虑由最短线构成的直角三角形，现在我们着手讨论一般的情形. 设 C 是同一条最短线 DB 上的另一点，在这一点上 p 保持与点 B 相同的值，并且 q',r',ϕ',ψ',S' 与点 B 处的 q,r,ϕ,ψ,S 具有相同的含义. 那么由此在点 A,B,C 之间有一个三角形，它们的角我们记它为 A,B,C, 与其相对的边记为 a,b,c, 并且面积记为 σ. 我

们分别用 α,β,γ 记在点 A,B,C 处的曲率测度. 那么假设 (这是允许的) 量 $p,q,q-q'$ 为正的，我们有

$$A=\phi-\phi',\qquad B=\psi,\qquad C=\pi-\psi',$$
$$a=q-q',\qquad b=r',\qquad c=r,\qquad\qquad \sigma=S-S'.$$

我们首先将面积 σ 表示为一级数. 通过改变 [7] 中每一个涉及 B 的量为与 C 有关的量，我们得到一个关于 S' 的公式. 从这我们有 (精确到六阶的量) 公式

$$\begin{aligned}\sigma=\frac{1}{2}p(q-q')\Big(1-\frac{1}{6}f^{\circ}(p^2+q^2+qq'+q'^2)\\-\frac{1}{60}f'p(6p^2+7q^2+7qq'+7q'^2)\\-\frac{1}{20}g^{\circ}(q+q')(3p^2+4q^2+4q'^2)\Big).\end{aligned}$$

由级数 [2], 也就是

$$c\sin B=p\Big(1-\frac{1}{3}f^{\circ}q^2-\frac{1}{4}f'pq^2-\frac{1}{2}g^{\circ}q^3-\cdots\Big),$$

可以变为下面的公式:

$$\begin{aligned}\sigma=\frac{1}{2}ac\sin B\Big(1-\frac{1}{6}f^{\circ}(p^2-q^2+qq'+q'^2)\\-\frac{1}{60}f'p(6p^2-8q^2+7qq'+7q'^2)\\-\frac{1}{20}g^{\circ}(3p^2q+3p^2q'-6p^3+4q^2q'+4qq'^2+4q'^3)\Big).\end{aligned}$$

曲面上任意点的曲率测度变成为 (由第 19 节，那里的 $m,\ p,\ q$ 为这里的 $n,\ p,\ q$):

$$\begin{aligned}k&=-\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial q^2}=-\frac{2f+6gq+12hq^2+\cdots}{1+fq^2+\cdots}\\&=-2f-6gq-(12h-2f^2)q^2-\cdots.\end{aligned}$$

因此，当 p,q 相应于点 B 时，我们有

$$\beta=-2f^{\circ}-2f'p-6g^{\circ}q-2f''p^2-6g'pq-(12h^{\circ}-2f^{\circ 2})q^2-\cdots.$$

也有

$$\begin{aligned}&\gamma=-2f^{\circ}-2f'p-6g^{\circ}q'-2f''p^2-6g'pq'-(12h^{\circ}-2f^{\circ 2})q'^2-\cdots,\\&\alpha=-2f^{\circ}.\end{aligned}$$

将这些曲率测度引入到 σ 的表达式中，我们得到下列精确到六阶的量的表达式 (不包括六阶):

$$\sigma=\frac{1}{2}ac\sin B\Big(1+\frac{1}{120}\alpha(4p^2-2q^2+3qq'+3q'^2)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{120}\beta(3p^2-6q^2+6qq'+3q'^2)\\
&+\frac{1}{120}\gamma(3p^2-2q^2+\ qq'+4q'^2)\Big).
\end{aligned}
$$

如果对于 p, q, q', 我们替换 $c\sin B, c\cos B, c\cos B-a$, 则可以保持同样的精确度. 这就给出

$$
\begin{aligned}
\sigma=\frac{1}{2}ac\sin B\Big(1&+\frac{1}{120}\alpha(3a^2+4c^2-\ 9ac\cos B)\\
&+\frac{1}{120}\beta(3a^2+3c^2-12ac\cos B)\\
&+\frac{1}{120}\gamma(4a^2+3c^2-\ 9ac\cos B)\Big).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

既然所有有关正交于直线 BC 的直线 AD 的表达式已经从这个方程式中消去，我们可以重新排列点 A, B, C 之间的顺序以及关于它们的表达式. 因此，我们有 (在同样精确度下)

$$
\begin{aligned}
\sigma=\frac{1}{2}ac\sin A\Big(1&+\frac{1}{120}\alpha(3b^2+3c^2-12bc\cos A)\\
&+\frac{1}{120}\beta(3b^2+4c^2-\ 9bc\cos A)\\
&+\frac{1}{120}\gamma(4b^2+3c^2-\ 9bc\cos A)\Big).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma=\frac{1}{2}ab\sin C\Big(1&+\frac{1}{120}\alpha(3a^2+4b^2-\ 9ab\cos C)\\
&+\frac{1}{120}\beta(4a^2+3b^2-\ 9bc\cos C)\\
&+\frac{1}{120}\gamma(3a^2+3b^2-12bc\cos C)\Big).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

26.

考虑边长为 a, b, c 的由直线组成的三角形 (对于我们的研究) 是极其有利的. 这种三角形的角 (我们记之为 A^*, B^*, C^*) 不同于曲面上的三角形的角，即不同于 A, B, C (相差二阶的量); 准确地表达这个差异是值得的. 然而，在这里展示这个与其说是困难的，不如说繁冗的计算的前几步就足够了.

在公式 [1], [4], [5] 中, 以那些关于 C 的量代替 B 的量, 我们得到关于 $r'^2, r'\cos\phi', r'\sin\phi'$ 的公式. 那么表达式

$$
\begin{aligned}
&r^2+r'^2-(q-q')^2-2r\cos\phi\cdot r'\cos\phi'-2r\sin\phi\cdot r'\sin\phi'\\
&=b^2+c^2-a^2-2bc\cos A=2bc(\cos A^*-\cos A),
\end{aligned}
$$

的展开式联立表达式

$$
r\sin\phi\cdot r'\cos\phi'-r\cos\phi\cdot r'\sin\phi'=bc\sin A
$$

的展开式，给出下列公式:

$$
\begin{aligned}
\cos A^* - \cos A = -(q-q')p\sin A\Big(&\frac{1}{3}f^\circ + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^\circ(q+q') \\
&+\Big(\frac{1}{10}f'' - \frac{1}{45}f^{\circ 2}\Big)p^2 + \frac{3}{20}g'p(q+q') \\
&+\Big(\frac{1}{5}h^\circ - \frac{7}{90}f^{\circ 2}\Big)(q^2+qq'+q'^2)+\cdots\Big).
\end{aligned}
$$

由此我们有 (直到五阶的量)

$$
\begin{aligned}
A^* - A = +(q-q')p\Big(&\frac{1}{3}f^\circ + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^\circ(q+q') + \frac{1}{10}f''p^2 \\
&+\frac{3}{20}g'p(q+q') + \frac{1}{5}h^\circ(q^2+qq'+q'^2) \\
&-\frac{1}{90}f^{\circ 2}(7p^2+7q^2+12qq'+7q'^2)\Big).
\end{aligned}
$$

把这些公式与下列公式联立

$$
2\sigma = ap\Big(1 - \frac{1}{6}f^\circ(p^2+q^2+qq'+q'^2) - \cdots\Big),
$$

并且与上文中已经得到的数量 α, β, γ 的值结合起来，我们得到 (直到五阶的量)

$$
\begin{aligned}
A^* = A - \sigma\Big(&\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{2}{15}f''p^2 + \frac{1}{5}g'p(q+q') \\
&+\frac{1}{5}h^\circ(3q^2-2qq'+3q'^2) \\
&+\frac{1}{90}f^{\circ 2}(4p^2-11q^2+14qq'-11q'^2)\Big).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

用同样的方法我们可以导出

$$
\begin{aligned}
B^* = B - \sigma\Big(&\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{10}f''p^2 + \frac{1}{10}g'p(2q+q') \\
&+\frac{1}{5}h^\circ(4q^2-4qq'+3q'^2) \\
&-\frac{1}{90}f^{\circ 2}(2p^2+8q^2-8qq'+11q'^2)\Big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
C^* = C - \sigma\Big(&\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{10}f''p^2 + \frac{1}{10}g'p(q+2q') \\
&+\frac{1}{5}h^\circ(3q^2-4qq'+4q'^2) \\
&-\frac{1}{90}f^{\circ 2}(2p^2+11q^2-8qq'+8q'^2)\Big).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

因为，和 $A^*+B^*+C^*$ 等于 2 倍的直角，从这些公式我们推断出，和 $A+B+C$ 与 2 倍直角的差的盈余，也就是

$$
\begin{aligned}
A+B+C = \pi + \sigma\Big(&\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}f''p^2 + \frac{1}{2}g'p(q+q') \\
&+\Big(2h^\circ - \frac{1}{3}f^{\circ 2}\Big)(q^2-qq'+q'^2)\Big).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

这最后的等式也可以从公式 [6] 中推导出来.

27.

如果曲面是一个半径为 R 的球面，我们有

$$\alpha=\beta=\gamma=-2f^\circ=\frac{1}{R^2};\qquad f''=0,\quad g'=0,\quad 6h^\circ-f^{\circ 2}=0,$$

或者

$$h^\circ=\frac{1}{24R^4}.$$

因此，公式 [14] 变成

$$A+B+C=\pi+\frac{\sigma}{R^2},$$

这是绝对精确的公式. 但是，公式 [11], [12], [13] 给出

$$\begin{aligned}
A^*&=A-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(2p^2-q^2+4qq'-q'^2),\\
B^*&=B-\frac{\sigma}{3R^2}+\frac{\sigma}{180R^4}(p^2-2q^2+2qq'+q'^2),\\
C^*&=C-\frac{\sigma}{3R^2}+\frac{\sigma}{180R^4}(p^2+q^2+2qq'-2q'^2).
\end{aligned}$$

或者，同样精确地有

$$\begin{aligned}
A^*&=A-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(b^2+c^2-2a^2),\\
B^*&=B-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(a^2+c^2-2b^2),\\
C^*&=C-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(a^2+b^2-2c^2).
\end{aligned}$$

如果忽略四阶的量，从上面我们得到了由杰出的 Legendre 首次建立的著名的定理.

28.

如果略去四阶的项，我们的一般公式将变得极其简单，即为：

$$\begin{aligned}
A^*&=A-\frac{1}{12}\sigma(2\alpha+\beta+\gamma),\\
B^*&=B-\frac{1}{12}\sigma(\alpha+2\beta+\gamma),\\
C^*&=C-\frac{1}{12}\sigma(\alpha+\beta+2\gamma).
\end{aligned}$$

此时，在一个非球面的曲面上，对于角 A, B, C 的不等的减少量必须予以考虑，从而使得这些改变了的角的正弦成比例于其对边. 一般地说，这些差量会是三阶的量；但是如果曲面与一个球面的差别微小，那么这个差量会是一个高阶的量. 在地球表面上，即使对于角度可以测量到的巨大的三角形，这种差别通常也是太小而难以觉察的. 例如，在最近几年，我们以此种方式已经测得介于 Hohehagen, Brocken 和 Inselberg 3 点之间的巨大的三角形. 在这里 3 角之和的盈余是 $14''.85348$, 计算给出各角处的如下的减少量：

Hohehagen .... $-4''.95113$

Brocken .... $-4''.95104$

Inselberg .... $-4''.95131$

29.

通过比较曲面上的一个三角形的面积与边长为 a, b, c 的平面直线三角形的面积，我们将结束我们的研究. 我们记后面一个三角形的面积为 σ^*, 因此有

$$\sigma^* = \frac{1}{2}bc\sin A^* = \frac{1}{2}ac\sin B^* = \frac{1}{2}ab\sin C^*.$$

精确到四阶的项，我们有：

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12}\sigma\cos A\cdot(2\alpha+\beta+\gamma).$$

或者，在同样精度下，有

$$\sin A = \sin A^*\cdot\left(1+\frac{1}{24}bc\cos A\cdot(2\alpha+\beta+\gamma)\right).$$

在公式 [9] 中替换这些值，精确到六阶的项，我们有：

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{1}{2}bc\sin A^*\cdot\Bigg(1&+\frac{1}{120}\alpha(3b^2+3c^2-2bc\cos A)\\&+\frac{1}{120}\beta(3b^2+4c^2-4bc\cos A)\\&+\frac{1}{120}\gamma(4b^2+3c^2-4bc\cos A)\Bigg),\end{aligned}$$

或者，在同样精度下，有

$$\sigma = \sigma^*\left(1+\frac{1}{120}\alpha(a^2+2b^2+2c^2)+\frac{1}{120}\beta(2a^2+b^2+2c^2)+\frac{1}{120}\gamma(2a^2+2b^2+c^2)\right).$$

对于球面，这一公式变成下列形式：

$$\sigma = \sigma^*\left(1+\frac{1}{24}\alpha(a^2+b^2+c^2)\right).$$

在同样精度下，很容易证明下列公式可以代替上述公式：

$$\sigma = \sigma^*\sqrt{\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin A^*\cdot\sin B^*\cdot\sin C^*}}.$$

如果把这一公式应用于非球面的曲面上的三角形，一般地说，其误差将是五阶的量，但是在地球表面上所有可以测量到的三角形内，这种误差太小而将是难以察觉的.

(陈惠勇 译　　苏阳 校)