

相对论通俗演义

张轩中

序

美妙的爱因斯坦引力方程

张轩中

人类历史,始于蒙昧.置身悬崖,若无必死之心,望而却步.引力做功,碎骨粉身.虽引力乃最弱之力量,然其统治整个大宇宙之脉搏呼吸.亚里士多德指出引力秘密,为世人所奉.而千年之下,伽利略用思想实验,得自由落体真谛.此情此景,历历在目.几百年来,比萨斜塔,默默无语.上帝造物,宇宙洪荒,乃至牛顿,方显露一丝天机.牛顿引力, $F=GM_1M_2/R^2$.方程曼妙,让人叹为观止.

牛氏遗腹,少年孤冷,其引力方程,上穷碧落.下至黄泉.玉兔升空,苹果落地,牛顿方程,半窥天机.方程横空出世,世间犹惊.返谷溯源,乃开普勒之鞠躬尽力.开普勒于月牙高台,夜观天象,夙夜不眠.经济窘迫而身形憔悴,然于故纸之间,发行星运动之三定理.此乃呕心沥血之作也.

红尘百草,阡陌凋零,牛顿之后百年,法拉弟铁匠之后,瓮壅绳黍之子,其英雄气长,研习安培之环路电流.奥斯特发现电可成磁,法拉第十年一剑,磁能产电.此间十年,实验无数,遍尝失败.

电磁相生,法拉第立场论.隔四十年,麦克斯韦设位移电流,写积分方程,电磁统一大成.然方程之中,未现磁单极子.狄拉克沉默寡言,深思熟虑,考虑量子力学,得电磁对偶.若单极存在,焉能以单一磁势复存在?此乃纤维丛也.

场论既成,天下太平.爱因斯坦,犹太之子,叛逆之徒,其遍习引力历史,深通场论之奥义.厚积薄发,终成绝响.麦氏方程,天生超越伽利略之单纯空间变换.闵可夫斯基,乃得四维时空变换,保持麦氏方程,彭加莱亦有所闻,一时间群雄并起,狭义相对论,若隐若现,爱因斯坦,确凿物理实在,于线性时空变换下不变.若较爱因斯坦之于彭加莱,彭氏深谙数学,而爱氏直指背后物理,深邃迥异于常人.此西元 1905,爱因斯坦,声名鹊起于天下,此洞见时间须于空间一起,共同进退,乃千年来最广博深远之发见,天下惟此一人.

历史机缘巧合,全在冥冥之中.狭义相对论已大白于天下,然世间之人,依然不知所云.所谓动尺收缩,此中可见牛顿方程,水火不容于狭义相对论.牛顿引力,描述空间两点之距离,然空间两点之距离不复绝对,牛顿引力,势必依赖于观察之士.物理勿须依赖于观察之士,乃物理之基本也.爱因斯坦,深味其中悲哀.方十一年,其演习黎曼几何,工于张量计算.友士格罗斯曼,居功至伟.数学家推动物理学之发展,此一例也.爱因斯坦日复一日,确信物理之规律,为人力所不能撼动,须臾之间,乃相信物理之规律,应于人人平等.其思辨于升降机中遇见等效原理,偶遇一生之最

快慰思想.自由落体,于其深邃双眸,复现璀璨光明.

物理于几何,一衣带水.黎曼几何,天才之手,问世三十余年,遂转入爱因斯坦之手,发扬广大,天下人膜拜而熟习之.爱因斯坦引力方程,几何等于物理. $G_{ab}=T_{ab}$.方程美妙.意味隽永.此西元1915,希尔伯特,殊途同归,翁乃数学界之泰山北斗.引力历史于数学物理两家携手推动,此后数十年,荒烟蔓草,.爱因斯坦方程未绝于物理学,虽人迹罕至,丛生皆云高山仰止,引力冷艳孤傲.转念人生几何?众生嗟问.爱因斯坦于渺茫太虚时空答曰:

几何乃引力也.

人生不相见,动若参商,然其宇宙洪荒之回音,余音绕梁.

之后数十年,黑洞兴起,宇宙加速膨胀.一切归于漫漫黑暗.

poetmomo@163.com

第一章 早期的英雄时代

(1)

历史是淹没在荒烟蔓草间的,当后人回头看历史的时候,尤其能看到一些神话和英雄史诗,虽然模糊不清,但让你感觉到心潮澎湃.相对论一直是地球上最美丽的学问.这一门学问是爱因斯坦创立的.它最根本的看法,是研究我们的宇宙,因为宇宙只有一个,而我们身处其中,于是,很多人难免担心,我们做为宇宙的一部分,能不能认识宇宙.正如你的一个手掌,能不能认识你这个人.这个问题是玄妙的,中国古代的庄子和屈原等人也思考过这样的问题,他们有一个很模糊不清的认识,原因是因为他们没有具备一些数学描述.

宇宙洪荒,是很玄很妙.问题的关键在于如何认识它,很多人的思想在这里汇集.尤其是苏东坡的一句诗,被认为可以体现一种思想情操.

他说:不识庐山真面目,只缘身在此山中.

苏先生是一个很大的才子,他的这个诗本身是具有哲理性的.当我们把他运用到这个宇宙的时候,我们会反躬自问:是否,我们处在宇宙之中,所以,我们无法认识宇宙的真面目.这个问题本身没有唯一的答案,从爱因斯坦说法上,我们可以看到一个科学家的态度.

爱因斯坦说:宇宙最不能理解的地方是,它居然是可以理解的.

可知论和不可知这两种论调是人类个体的分水岭.但这样分界是不明显的,很多人从来没有问过自己,自己到底属于可知论者还是不可知论者.很多时候,这样的分类也是缺乏意义的.但,一个事实永远存在,就是一定有很多人,对未知事物充满好奇之心.

(2)

我们仰望星空，俯仰天地。态度决定一切。在认识宇宙，或者说，认识未知世界的道路上，尸横遍地。数学家们，相对于其他的一批人，以其特有的执著和特立独行，来给这个宇宙造一个描述的工具。并且，这个工具是最基本的。数学比绘画和音乐要更加基本。绘画和音乐，描述世界，但依赖于眼睛和耳朵。而数学，有一个最基本的依赖，它依赖于大脑。有理由相信的一点，是我们地球文明之外的文明，他们那些智慧生物可以没有眼睛，没有耳朵，但他们不能没有大脑。

毕达哥拉斯是一个杰出的古代数学家，他认为，世界的本质是数。

他的说法听起来好象是有点夸张了，但初衷是善良的，不是说他要故意压迫那些非数学家。2, 3, 5, 7……这些的数字，我们称为素数，它们是基本的。人类要向外太空发射信息，寻找其他的文明，一个方法就是朝天空发射“素数”。因为，宇宙的各个角落，要是也有文明的外星人，他们收到这样的信号，会欢欣鼓舞，因为这无疑给他们一个预示。

预示在这个苍凉的宇宙，他们并不孤独。

数是基本的，但广义相对论却更多地和几何学发生了关系，这一点在后面的篇幅中再逐渐展开。当然，有一位得 Fields 奖的数学家道格拉斯曾经说过：“我的切身体会是，几何学家是好人。”他的话里面有温情脉脉的情感因素，但修正他的话，我们会发现是这样：“我的切身体会是，数学家是好人。”

是的，数学是仰望宇宙的透镜。

在古代的数学家中，有一个人，他让我们知道，寄生在这世上是那么好，这个人的名字是欧几里得。

(3)

欧几里得写的一本众所周知的书，叫《几何原理》。这至少是 2000 年前的事情了。但中国人看到这书的时候，是在明朝的徐光启时代。也就是说，中间有至少 1200 年的时间差距。我不想查书用来精确表示这些年代差异，是因为我不是搞历史的，也不想过于在一些琐碎的事情上精密无比。

《几何原理》里有五条公理。虽然一般人说不全，但第五条说所有平行直线永不相交。这一条大家全知道，被叫做第五公设。也就是说，有的人认为，这一条，不能做为一个公理，因为它可能可以被其他公理推出来。

《几何原理》好象是一个大厦，它有五个巨大的石头做为地基。但第五块石头，有的人认为，有问题。

爱因斯坦的相对论，与第五公设这个问题休戚相关。当然，我不预备在这里做任何数学的证明，通俗的演义往往与数学相隔遥远，我们引用爱丁顿的话：证明是一个偶像，数学家在这个偶像面前折磨自己。

第五公设折磨了一代又一代的人。现在看来，这个折磨已经结束，但其意义非常深刻。欧几里德的几何学，是关于平坦空间的几何学。而真正广泛的几何学，它不仅仅要处理平坦空间里的情景。Riemann 是研究弯曲空间几何学的大师。他死的时候才 39 岁，但他活着的时候一直很优秀，1854 年，他为了在哥廷根大学获得一个讲师的职位，发表了一个关于几何学的演讲，演讲的题目是《论几何学的基础》，这次讲演是开天辟地的一个壮举。下面的听众很多，但据说，几乎没有人能够听懂，频频点头表示赞同人只有一个人，是一个老头，名字叫 Gauss。

这个故事发生在 Riemann 为了得到讲师职位的时候，有的人可能会觉得很奇怪，为什么一个讲师讲的东西在那大学里别的教授全听不懂。这样的现状是存在的，并且是不能避免的，只说明 Riemann 实在是太有才华了。一般地，在一所很好的大学，无论是古代还是近代，都可能有这样的感受：

博导不如教授，教授不如副教授，副教授不如讲师。

这是正常的好大学必须的。我们知道，在当时，Riemann 讲师是最伟大的，他后来的贡献繁多，以其在微分几何和复分析里的伟大建树影响历史，现在的 Riemann 猜想还在领导数学的潮流，在物理学里，Riemann 的级数在量子场论中经常出现，在相对论中，研究 casimir 效应，也要用到。

Riemann 几何的出现，给爱因斯坦的引力理论，提供了一个先天的数学工具。历史表明，数学物理在这个时候，达到了一个全新的高度。

(4)

今月也曾照古人。这是李白说的。看到月亮，很多人有一些基本的问题，比如说，1640 年左右，也就是中国的吴三桂引着清兵进入山海关的时代。英国的 cambridge 大学有一个叫牛顿的人，他解决了一个问题，按照现代语言来说，是牛顿发现了万有引力定律，从而解释了为什么月球在天空绕地球天马行空地周期转动。牛顿发现万有引力定理以后，我们才真正看到了物理。而相对论，就是研究万有引力的。

牛顿是怀着格物知理理想的数学物理大家。牛顿和爱因斯坦是人类历史上科学巨匠。但牛顿本身，相比爱因斯坦，具有一种由内而外的霸王气概。他的工作显然是划时代的，其情操，也是划时代的。在历史上，他与莱布尼姿和胡克等人有过交恶。同时代的那些伟人在他面前，几乎全掉了颜色。我们只能由衷得叹上一句：到底是牛顿！

在人品上，牛顿不算是一个谦恭之人。一个人持才傲物，藐视同伦，普通人是做不到了。牛顿的万有引力定律，仅这一项，就足够他鹤立鸡群了。何况牛顿有那么大的发现。盖棺论定得说，牛顿其人，500 年不朽，牛顿其文，1000 年不朽。1000 年以后，世界末日，什么都朽了。

(5)

物理学也有最初的幼稚时代，比牛顿要早，是哥白尼的出现，后者写了一本书，书名叫《天体运行论》，出版是 1543 年，出版的时候，作者已经快死了，原因是因为这本书是一本很反动的书，著者选择在临死之前出版它，是一种对自己负责的态度。这本书主要说了一个

事情，就是地球是绕着太阳转动的。这个是天文学和物理学上的第一个有实际意义的进展，早于康德和拉普拉斯的星云说时代。康德是一个德国的哲学家，一辈子没有出过一个叫哥尼斯堡的小镇，但其了解天下事，康德说，只有两件事情可以震撼我的心灵，一是人类的道德情操，一是我们头顶的星空。可见康德多少对星空有点研究，他可能认为地球上的一切，全来自星云的演化，这是一个比生物进化论更强大的进化的观点。拉普拉斯是 19 世纪的法国人，在拿破仑的宫廷干过行政。国王拿破仑是一个数学爱好者，他曾经有一个拿破仑定理，是有点意思的。定理说，任何一个三角形，各边上各作等边三角形，接下来将这三个三角形的重心联结起来，那么就必定是一个等边三角形。当然拉普拉斯的数学才能，远过于拿破仑。拉普拉斯微分算子，这个微分算子的背后是一片汪洋大海，这个算子描述定态的薛定格方程，所以在物理上也是很有用的，真正有思想的人，往往会在三角形区域解拉普拉斯方程。这个拉普拉斯微分算子可以被开方，得到 dirac 算子，dirac 算子背后是一片原始森林，因为 dirac 是 20 世纪最伟大的物理学家，他和薛定格一起得到 1933 年的诺贝尔奖金。薛定格说：“我们得奖的时候，dirac 还非常年轻，我是带着我老婆去领奖的，但 dirac 是带着他妈妈去的”。由此可见，dirac 是一个非常年轻有成绩的物理学家。是他走出了把狭义相对论和量子力学结合起来考虑的道路。关于这些算子理论，极大地推动了数学的发展。也是从算子的谱开始，我们从连续的数学分析走向离散的特征值问题的研究。而离散的性质，恰恰是量子力学的精髓之一。当然经典物理学中也有离散谱，例如驻波。

回头来看哥白尼的工作。他的工作说明，人类第一个较明智的科学看法，不是研究宇宙如何起源，演化，而在于研究太阳和地球的关系。这是一个很务实的进步。就是在现代，虽然有精确宇宙学这样的学问，研究宇宙如何膨胀，如何加速膨胀，但前路漫漫，让不专门从事理论物理的人瞠目结舌地怀疑，是否目标过于庞大，你们居然研究整个宇宙，把星系当做尘埃？

相对论学家似乎存在一个情节，那算是一个单纯信仰，他们认为，世界可以被还原为一个单一的原理。而凝聚态物理和统计说明，在不同的尺度，有不同的物理。比如人类的存在，人类的情感和思维，不是物理学的单一原理可以解释的。统计性和自组织性的出现，使得在相对论学家的眼睛里，这个世界变的高深莫测了。

无论如何，相对论还是一如既往地奢侈和不切实际，因为，它是预备去理解宇宙。

(6)

20 世纪之前的所有年代，相对论还没有诞生，我统称它们为“英雄时代”。在这个漫长的时代里，有无数的数学物理两门学科里的英雄人物，这批人中的杰出代表是牛顿。这个时代是一个古典为主的时代。而广义相对论的出现，是这个古典时代的结束。广义相对论是“经典的极致”。在字典里，“经典”应该有两个意思，一个是古代的，古典的；另外一个就是优美的，美到可以写进历史之书。这样的美是很少见的，往往在平面几何里你偶然能感受到这样的震撼心灵的美。

在极早期，托勒密认为太阳绕地球转动。他认为太阳绕地球转动，现在看来，也算没有错误。为什么？因为，机械运动是相对的。谁动谁不动，在牛顿的眼睛里是“相对的”。所以说，按照牛顿的看法，描述地日运动，托勒密的思想是没有问题的，虽然它可能导致一系列不优美的结论，比如导致木星也绕地球转动，那么我们这个太阳系看上去还真是乱糟糟的，一点也不优美了。但托勒密在平面几何里关于圆的内接四边形的一个定理，是天籁之声。这个定理是美的。这样的数学之美，与同时代的屈原对香草美人的美来比较，我们看到一点西方的数学逻辑的锋芒。

dirac 和爱因斯坦，以及其他的很多人，全是追求美的天才。相对论，恰恰给我们展现了一个数学逻辑上的美感。

这个美，引得无数英雄竞折腰。

是的，我们全是一群在朝圣路上踽踽独行之人。
壮美矣！爱因斯坦！！

第二章 一个美丽的椭圆

(1)

1543 年，哥白尼关于日心说的工作之后，丹麦的天文学家第谷不太同意哥白尼的观点。他出生贵族，是一个有钱来做天文观测的人士。据说第谷年轻的时候与人斗殴，被砍掉半个鼻子，所以他后来有半个金鼻子，长相显得非常怪异。他开始夜观天象，并且整理了一套看上去杂乱无章的数据。这套数据，最后保留着给了他的助手，一个叫开普勒的人，但第谷的本意，好像是想把这些数据传给自己的女婿的。开普勒一生生活是相当潦倒的，最后还死在讨债途中，那是在 1630 年，他几个月领不到薪水，经济困难，不得不亲自前往雷根斯堡的基金会索取，在那里他突发高烧，几天后在贫病交困中去世。他去世的时候，觉得自己非常对不起自己的老婆孩子，因为他把自己的一生精力，全花在研究天文学和写书出版之上了。他在出版书的时候，据说，第谷的女婿还给他写了一个序文，这个序文有一个特点，是通篇大骂开普勒剽窃第谷的成就。这样子的书是很奇异的。

但开普勒的几本书《新天文学》和《宇宙和谐》先后给出了 3 个行星运动定理。第一个定理是很重要的，认为行星运动的轨道是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点之上。他实际上没有想到，未来会表明，一个封闭的椭圆是一件过于唯美之事，因为根据爱因斯坦的相对论，轨道会有进动，我们不能得到一个封闭的椭圆。第二个定理异常强大，他几乎用肉眼看出角动量守恒定理，说的是行星矢径在单位时间扫过的面积相同。第三个定理，似乎绝对是上帝的旨意，要从一组数的三次方和另外一组数的平方中看到不变量，依靠一般凡人的眼睛，往往不够，这个定理说的是行星运动周期的平方和轨道半径的立方成正比。

这三个定理，迫使牛顿得到万有引力定律。万有引力的出世，其实来自于开普勒对数据的千万次摸排。开普勒的视力不好，相比第谷，他显然不擅长天文观测，但他的确具备从复杂数据中提炼出物理规律的神奇能力。这往往是一种从天上看到人间的天赋异禀。

他的行星运动第一个定理里，开始出现一个完美的椭圆。

(2)

一般说来，一个椭圆是封闭的，这样的对称性背后，包含着守恒的物理量。由对称性导致守恒量，是伟大的德国女数学家 Noether 的思想，数学家外尔曾经这样开玩笑：“女数学家有两种，一种不是女的，一种不是数学家”。没有问题，Noether 肯定是一个数学家，她一辈子没有结婚，把全部精力投身给了近世代数。某个时候 CN.yang 认为，Noether 的这个原理是最基本的，于是，国内讲力学的教材开始了一次改革，改革的结果是从对称性开始讲力学。无论怎么样，对称性是美的化身。描述对称性最好的语言是群论。对称性和守恒量有一一对应的关系，这一点，是深刻的。比如，众所周知的结论是，空间是均匀的，所以动量守恒。于是，行星运动的轨道是封闭的椭圆，这样的对称性导致的守恒量就是龙格—楞次矢量。

什么是椭圆？在数学上，椭圆的定义是在平面上到两个定点之间的距离之和等于定长的点所组成的集合。这个是很清楚的，一般高中生就要学会怎么样画一个椭圆。这是解析几何里的事情。在 Fermat 和笛卡儿的解析几何里，人们换了一个看法，那就是把一个曲线与一个代数方程等同起来，这样的想法把代数和几何结合起来，这样的结合是思想的奇葩，包括后来在物理中经常运用的所谓 su(2) 李群，从代数的角度去看一下，就可以知道它其实就是一个 3 维球面。解析几何的一个很直观的推广是能不能把一个实 n 维流形嵌入到高维空间，然后再把这个流形表达成为一个或者一组代数方程。这样事情 Nash 和 chaw 伟良等人做过了。

解析几何带来的一个全新的数学时代。只有当椭圆被放在坐标系里的时候，才可以遇见另外的问题，那就是如何计算椭圆的周长。这个时候，完美的椭圆似乎突然让人迷惘。因为，圆的周长是很简单的，上过学的人全会算，而椭圆周长，上过学的一般不会算。

(3)

计算椭圆周长的问题也难住了牛顿。虽然用牛顿的万有引力定律，可以得到椭圆轨道。但仔细地研究这个椭圆的来历，有一些需要推敲的地方。在经典的力学里，Bertrand 定理说，只有当中心势是库仑势或者谐振子势的时候，轨道才是封闭的。这个定理是重要的，因为它否认了其他势场里存在封闭轨道的可能性，哪怕是对库仑势的微小偏离。所以，当爱因斯坦的广义相对论对万有引力的库仑势做修正的时候，在理论上，这个完美的椭圆崩溃了。

离太阳最近的行星是水星，那儿的万有引力场强最大，广义相对论的修正最明显，之前人们已经观测到水星近日点存在进动，也就是说，人们开始注意水星的公转轨道是不是一个封闭的椭圆，但没有人可以解释这到底是为什么。既然轨道不是椭圆，我们就知道，水星与太阳之间的万有引力势场不是严格的库仑势。这似乎应该意味着一个曙光的黎明，相对论虽然比较难以理解，但在这个椭圆封闭性问题上，结论是很清楚了。原来，牛顿的万有引力定律，那样美的一个定律，在引力比较强的时候，也是不对的。

爱因斯坦的广义相对论解释了水星近日点的进动，这是对广义相对论的三大验证之一。1919 年的时候，英国天文学家爱丁顿利用日全食的机会，他领导下的实验证明了光线偏折的规律也符合广义相对论的预言，这个实验是著名的，因为他极大地支持了爱因斯坦的理论。当时也就是第一次世界大战，德国和英国是敌对国，所以这个实验的成功的时候，大众的眼球被吸引了，报纸的头版是这样的：英国科学家支持了德国科学家的理论。当爱丁顿做出这个实验的时候，他的心情很可能比爱因斯坦更加激动。有一个说法是他认为自己和爱因斯坦是当时唯一懂得广义相对论的两个人。而当记者问爱因斯坦说，当您的理论被实验证明是正确的时候，您怎么想？爱因斯坦的回答说：没有什么好奇怪的，上帝安排的，我不相信还会出现别的结果。

(4)

虽然 1919 年，牛顿理论已经被实验证明应该被爱因斯坦的广义相对论所取代，但牛顿依然是绕不过去的存在。拿牛顿万有引力定律和库仑定律来比，虽然有点抬举库仑，但马上会发现牛顿的意义有很多。牛顿的万有引力定律，实际上告诉人们，质量总是正的，也就是万有引力总是相互吸引，这样的话，宇宙似乎不能跟一个孕妇一样，不由自主地膨胀。但目前观测到的宇宙，它居然在膨胀，并且还是加速膨胀。对于宇宙的加速膨胀，这里只是暂时提起。但这个问题，已经成为了 21 世纪物理学晴朗的天空里最大的一个乌云，这个乌云似乎要覆盖整个天穹，让人分外地不安。情况就是这样的，物理学家本来以为自己已经快了解了整个宇宙的 100%，后来突然被一声闷雷惊起，一个声音说，“无知的狂妄，你仅仅了解我的 4%”。质量总是正的，可能让人想起经典广义相对论中著名的正质量猜想。有的人会想起 1980 年代 witten 和 Schoen 和 Yau 对该猜想的证明。

当然，如何定义质量，在广义相对论中，也是一个具有不止一个标准答案的问题，在正质量猜想里的是 ADM 质量 (Arnowitt, Deser, Misner)。在这里，我们几乎可以挥别牛顿了。

有一个叫伏尔泰的法国人，他也曾经研究了一下牛顿的事迹，现在关于牛顿和苹果落地的这些故事，多数也是出自他的手笔。伏尔泰是一个能力很强的文科圣手，他还勾引了一位公爵的老婆，也许是相互勾引，——后来两人一起私奔。

1727年牛顿逝世，思想界的巨擘辞世，伏尔泰参加了葬礼。牛顿84岁离开人世，为他抬棺材的是两位公爵、三位伯爵以及大法官。伏尔泰是这样描述的：“他是像一位深受臣民爱戴的国王一样被安葬的。在他之前，没有哪一位科学家享受如此殊荣。在他之后，如此厚葬的也将是屈指可数。”牛顿去世后不久，诗人薄柏总结了世人对牛顿的评价，说：自然规则在黑暗里，上帝说，让牛顿干吧！于是一切大放光明。

牛顿是一个聪明人，他几乎能从容应对所有非常的局面，但他不是完人，他在数学上也遇见一些困难。比如他不能求出全部自然数倒数平方之和，也不能积出椭圆的周长。历史朝后面发展，我们发现，椭圆周长只能用非初等的椭圆积分表达出来。而另人惊奇的是，挪威数学家 Abel 证明了五次方程没有代数解答，但有些五次方程的解，[Hermite 证明](#)可以通过椭圆函数来表出。这说明了数学的各个侧面具有统一性的一面。而相对论在经历了 1970 年代之后的多年的沉寂以后，面临着一个引力量子化的命运。在量子引力的理论中，椭圆函数等等，也全都浮现出来。所以，这个完美的椭圆，告诉我们不少秘密，盯着一个椭圆看很久，里面全部是秘密。有一句箴言：一花一世界，一沙一天堂。

第三章 等效原理

(1)

1841年，中英鸦片战争在进行之中，西方远远地领先于中国，22岁的剑桥大学数学系的学生亚当斯根据牛顿万有引力和天王星运动的轨迹，假想有一颗未知的行星在天空运行。他经过一年的计算，猜测出这颗可能的行星的轨道。1843年10月，他把自己预言的这颗新行星的轨道寄格林威治天文台台长。但是，这位天文台台长对亚当斯的信不予理会。他严重地不相信这个年轻的大学生会在笔尖发现一颗新的行星。

另一位法国青年天文学家勒维耶也在研究这个问题。他也推测是因为存在一颗未知行星的引力作用，使天王星的轨道运动受到干扰，也就是天文学上所谓的“摄动”影响。他计算出这颗行星的轨道、位置、大小，然后请德国天文学 J.G 伽勒寻找这颗

未知的行星。1846年9月23日，伽勒根据勒维耶预言，只花了一个小时，就在离勒维耶预言的位置不到1度的地方，发现了一颗新的行星。后来这个新的行星被命名为海王星。发现海王星的那一年，勒维耶35岁。

亚当斯和勒维耶所做的工作，类似与同时代的门捷列夫，门捷列夫通过对元素卡片的一次又一次地排列，预言了大量的未知元素。

水星也是太阳系的一颗行星，它在近日点时也有类似于天王星的不遵循轨道运动的现象。1858年，勒维耶根据他发现海王星的经验，预言在水星轨道内有一条行星带（他认为**是水内行星而不是行星带摄动，并命名为火神星，或者祝融星**）它影响了水星的运动。这一次，勒维耶失败了。这一次失败有点象后来的物理学家泡利，泡利因为根据能量守恒而预言中微子的存在，声名雀起，但又相信宇称守恒而预言上帝不是一个左撇子，遭遇失败。但勒维耶发现海王星，在这之后的确没有人再怀疑牛顿的万有引力。但20世纪初的天文观测发现了水星轨道的异常，这为万有引力定律掘墓。事实似乎说明，椭圆不能精密描述行星运动。在另外的一个侧面，抛物线出场了。在这里谈及的曲线还全是空间里的曲线，不是时空中的世界线，世界线是相对论中最基础的概念之一，大概意思是把一个空间点拉长成为一条线，而 Dirac 方程在粒子的世界线上引入了超对称，这样的看法还为时尚早。

伽利略 (1564~1642年)，出生于意大利的比萨，他从小就喜欢思考。十七岁时进入比萨大学念医学。在他的学生时期，他看到吊在教堂圆型天花板的灯的摆动，发现了钟摆周期只与摆线的长度有关，而与摆角和摆锤的质量无关，这真是一个出人意料的发现，简直可以作

为上帝存在的明证，他的这个发现，大致上就是发现了简谐振动，简谐振动是一个二阶常微分方程。

他是那个黑暗时代的先知，同时是英雄时代的伟大导师，聪颖过人，心比天高，这一点可以从他的两个思想实验里看出来。这些思想使得牛顿认为自己是站在巨人伽利略的肩膀之上。

第一个思想实验是用来说明自由落体运动的。虽然据说他后来也在比萨斜塔亲自做了这个实验。但他的思想实验，却似乎更加可信，甚至不能辩驳。他说：“不考虑空气阻力，轻的东西将和重的东西同时下落，它们将同时落地。因为假如亚里士多德是对的，重的先落地，而轻的后落地，那么，倘使我在它们两个之间连一个无质量的刚性细绳，可以想见，总质量大于它们两个的单独质量，于是，按照亚里士多德，这个整体将落的更快，但事实上，轻的东西一定会拖重的那个的后腿。于是这就自相矛盾。可见，亚里士多德是错误的，轻的东西和重的一样，必然需要时刻有相同的速度，它们同时落地。”

这个思想实验，使得人们认识了自由落体运动的思想精髓。自由落体成为相对论初期研究的一个专门武器，爱因斯坦据此思考了等效原理。伽利略逝世的那一年是 1642 年，同一年牛顿诞生，而其自由落体的思想一直到 20 世纪初，依然为爱因斯坦所沿用，并且在 1907 年灵光一现，发现了等效原理。这有一点类似九方皋相马，普通人往往跟伯乐的儿子一样，只知道按图索骥。

——而爱因斯坦，却在一个古老的思想里发现了新的真理。

(2)

抛物线是圆锥曲线的一种，它的非线性性质在混沌动力学中被经常利用到，然后平地起惊雷，说，周期三导致混沌，出现了周期三，其他什么周期都将出现。可见，从抛物线出发，往往能够深入浅出。在教室里斜抛一个粉笔头，它总是画出优雅的舞线。假如没有空气阻碍，其轨迹是一条抛物线。其运动可以被简单分解，在竖直方向上，它是带初速的自由落体运动，在水平方向是匀速直线运动。

一个最简单的计算可以表明，以相同的初条件斜抛出不同质量的物体，其运动轨迹是抛物线，这些抛物线全部是可以重合起来的，因为它们一模一样。不同的质量，相同的轨道，这说明，运动轨道与质量没有关系，这一点与单摆一样，再次证明上帝存在，抛物线和单摆是处在引力场中的，它们这样的现象，说明这好象是一个内禀的几何效应。

简单的抛物线，用一种返璞归真的语言告诉年轻的爱因斯坦，引力，是一种几何效应。

1907 年，有人请爱因斯坦写一个介绍狭义相对论的综述文章，写这样的文章，使得爱因斯坦重新全面地审视了一下自己的理论和周围的世界。狭义相对论是在 1905 年建立的。当时的爱因斯坦依然在伯尔尼专利局，他坐在书桌边，突然遇见了一生中最快乐的思想——等效原理，“我正坐在伯尔尼专利局的桌旁，突然出现了一个想法，‘如果一个人自由下落，他将感受不到自己的重量。’”

换一句话说，引力质量等于惯性质量。爱因斯坦把这个称为等效原理。

物理学家曾经发现了一些等效原理一样的方法来处理问题，比如电学理论中，最让人瞠目结舌的一个关于电路的定律，不是基尔霍夫的。它叫“戴维南定律”，用来处理一个等效电动势。其背后的数学，不是瞬间能想清楚的。但无疑的是，等效的方法，极大简化了模型的复杂性。在某个程度上，爱因斯坦从等效原理出发，建立了广义相对论。当然，比如 syngge 等人就认为，等效原理虽然让爱因斯坦一生最快乐，在相对论建立过程中就象一个接生婆，但现在，接生过程已经完成，相对论应该体面地埋葬掉这个接生婆。

syngge 是一位极早期就用几何语言来表述广义相对论的人，内心有一种不被世人理解的苦闷。他的话虽然有点过河拆桥的意思，但动机也是很不错的。因为，凡是懂得等效原理的人，十之八九会以为，一个自由下落的观察者，他所看到的时空总是平坦的。

但几何学家一定不同意。因为时空是否平坦，就是说微分流形是否平坦，只依赖于它上面的度量，而不依赖于坐标系。

同时代的人群之中，爱因斯坦是第一个想到等效原理。这个原理使得人们发现了一些引力场不同与其他场论的地方，造成巨大的困难。比如一个人朝太阳掉下去，按照等效原理，在他看来，他没有感受到任何引力，相当于他没有测量到引力场的能量。这明显不同于电磁场的情况。比如电荷，是一个局部的电荷密度的，满足连续性方程，电荷守恒。引力能量有没有局部的密度？这个问题看上去似乎谁都要扪心自问，但寻找它的答案，相对论学者们一度衣带渐宽，人来人往，一次又一次开会讨论，但好象全是在 *looking for the right answer to the wrong question*。黑暗由此产生，人郁闷了。

引力能量不能在单独一个点上被谈及，因为时空中的一个点不考虑它的邻域无法谈它是否弯曲。准局域 (quasilocal) 的定义应运而生。德国的 Nester 是最初的倡导者和专家，这个人现在台湾的国立中央大学。

当然大范围地定义一个时空的能量或者质量是可能的，比如 Komar 有一个定义，这个定义只要求时空存在一个类时的 *killling* 场，就可以定义一个包围在 2 维球面内的空间的总质量，并且，这个总质量跟包围它的 2 维球面的选择没有关系，这就很象电动力学里的高斯定律了，说的是，对点电荷的电场强度计算通过包围它的曲面的通量，结果是点电荷的电量，与曲面无关。

(3)

爱因斯坦在 1907 年还没有写出他著名的爱因斯坦方程。等效原理一直是他思想上最闪光的部分。直观地看，似乎类似于圆是弯曲的，但可以用正多边形来逼近圆的周长。但一个人要真正看清楚背后的东西，需要不止一天的时间，正如很少有人能清楚说明圆周率和自然常数和自然数一之间的关系。为了数学地理解等效原理，爱因斯坦在 1907 年之后的这段时间内自觉地转向 Riemann 几何，他需要跟他的老同学数学家格罗斯曼合作学习微分几何，那里有一些名词，比如联络，克氏符，曲率张量。等他建立起相对论，微分几何学得到了物理学的推动，开始大步发展，广为人知，本来数学家已经认为，微分几何已经是沉迷于玩弄上下指标，是没有大出息了。Gauss 时代的几何，总是把曲线曲面嵌入到外部的高维空间进行研究。但宇宙没有外面，于是，相对论天然的要求一个研究内禀几何性质的 Riemann 几何学，这样的几何对象，不需要外部空间的存在。

可能后来赶上爱因斯坦的相对论潮流的数学家会认为，爱因斯坦的等效原理就是说，在一个弯曲流形上的每一点，总可以存在一个平坦的切空间。(在爱因斯坦当时那个时代，manifold 这样的概念已经存在，就是 1854 年左右的 Riemann 引进的 (Riemann 引进的流形概念和现在的概念相差很大，真正的是在 1901 年 Hilbert 定义而在 1913 年由 Weyl 精确定义)。)数学家用自己特有的方式理解等效原理，让文人墨客失魂落魄。歌德在这方面深有体会，他讲：数学家犹如法国人，无论你跟他们讲什么，他们把它翻译成自己的语言，于是成了全然不同的东西。

在物理上，爱因斯坦的自由下落的电梯是一个理想的惯性系，但它是局部的，在电梯里，引力消失了。几百年前，伽利略的另外一个思想实验，那里有一个从光滑斜面上滚下来的小球，这个小球被伽利略证明能够滚到无穷远处。他的这个思想实验，可以证明牛顿第一运动定律的正确性质，但留给后代的人一个问题，什么叫惯性，什么叫惯性系？这样的问题难有一针见血的答案让所有的人都欣然接受，充分理解。这个问题太难了，蜀道之难，难于

上青天。惯性系是什么，也有登天之难。

第四章 闵氏时空

(1)

现在已经知道的是，物理学的几乎全部知识，全是建立在平坦的闵氏时空之上，但广义相对论是一个例外。如果问什么是广义相对论里的度量，答案是它很象是人生，人生如戏，但看戏的无非做戏人，也就是说，度量在时空舞台上，它既是演员又是观众。度量刻画时空流形的弯曲。古希腊哲学家们对于空间缺乏清晰的数学认识，因此他们的讨论没有考虑到这个空间到底是平坦还是弯曲。于是出现了一些过于飘渺的议论，这些议论有的是很诙谐的，比如认为大地是被乌龟托着，浮于大海之上。理想主义派的代表人物是柏拉图，他有时间研究几何学，搞了一个奥林匹亚学院，广收门徒，传道授业解惑，一时天下英才，尽数被得而育之，柏拉图的人生真乃是一派风流，他写了一本书，叫《理想国》。大学问家难免一脉相传，比如柏拉图本身就是苏格拉底的学生，而柏拉图的学生，有一个人，名字如雷贯耳，亚里士多德，亚里士多德影响历史，影响力达到两千年之久，亚里士多德的观点是朴素无华的，他认为重的物体和轻的物体做自由落体，重的物体先到落地。民间具有天真的直觉，也支持这个观点。在柏拉图的那个神秘学院，穿过学院的拱形门楼，首先映入眼帘的是几个字：“不懂几何者禁止入内。”这样的话，让人不寒而栗。

柏拉图希望通过高深的几何学来理解空间。虽然他的用词很可能引起数学农民的反感，但这条道路，是一条正确而光明的道路。平面几何最杰出的定理之一来自毕达哥拉斯。**毕达哥拉斯 (Pythagoras)** (约公元前 580—约前 500)，是古希腊的哲学家、数学家、天文学家，他早年曾游历埃及、巴比伦（一说到过印度）等地，为了摆脱暴政，他移居到意大利半岛南部的克罗托内，在那里组织了一个集政治、宗教、数学合一的秘密团体。这个团体后来在政治斗争中被打散，他逃到塔兰托，后来终于被杀害了。但他的学派全保留了下来，这让人想起爱因斯坦在拒绝当以色列的总统时候说的一句话：“政治只为一时，而方程可以久远。”毕达哥拉斯本人以发现勾股定理（西方称毕达哥拉斯定理）著称于世。这个定理早已为巴比伦人和中国人所知，不过最早的证明大概要归功于毕达哥拉斯学派。这个学派发现用三个整数表示直角三角形边长的一种公式： $2n+1$ ， $2n^2+2n$ 分别是二直角边，则斜边是 $2n^2+2n+1$ 。这公式既属于算术，又属于几何。

通过勾股定理，导致不可约分数也就是无理数的发现，这个发现者是学派的一个门徒，实际上这个发现极大地推动了数学的发展。如果要证明根号二是一个无理数，最好的办法可能是 Fermat 发明的无限递降法。这个学派还有重大的发现，他们还发现正多面体只有五种，就是正四面体、正六面体、正八面体、十二面体和正二十面。这个发现被 S T yau 赞美，其实就是欧拉后来发现的关于凸多面体的欧拉定理，或者说微分几何里的高斯 (Gauss)-Bonnet 定理，但这个背后，还有很深沉的东西。毕达哥拉斯死后，这个学派还继续存在两个世纪之久，他的定理如果被推到很小的区域，也是正确的。几何学家往往把这样的微小三角形一个名字，美其名曰“特征三角形”。用相对论的眼光来看，毕氏的定理是描述了一个 2 维平坦空间。有经验的看客会至少马上想到以下两点：**第一，所有的 2 维曲面都是局部共形平坦，整体上，比如 Riemann 球和 Poincare 上半平面都是无法与复平面建立共形等价的，当然也无法共形平坦。**）**第二，在所有 2 维曲面上，爱因斯坦的方程天然成立。**毕达哥拉斯定理与广义相对论，有着一衣带水的关系。

毕达哥拉斯定理在中国，被称为勾股定理。西周时代，武王克商，周公与大夫商高讨论，商高说，“勾三，股四，弦五”，这个话不能算是一个定理，只算是一个特例。这记载于一本朝代和来历不很明显的书《周髀算经》。但该书又明确指出，周公的后人的一段对话，对话里明显表达了勾股定理。毕达哥拉斯定理说，一个直角三角形，它的两边的长度的平方和等于斜边的长度的平方。这个定理的证明方法很多，华罗庚年轻时候，也考虑过不少的证

明方案。最流行的证明方案,恐怕是通过在一个边长为 $a+b$ 的正方形内内接一个边长为 c 的正方形来作, 利用面积相等, 等到 a 的平方加上 b 的平方等于 c 的平方。

这个定理出现后, 可能中国古代数学家找到了很多乐趣, 生活充满七色阳光, 数学家开始沉沦, 之后中国的数学就开始落后了, 科举考试也没有想到要测试一下数学能力, 导致举国出现一种靡靡之音。后来到了 17 世纪, 有一个叫 Fermat 的法国人, 他本身是一个律师, 但数学才情很高, 其才情之高, 足以睥睨天下, 比如, 在数论中, 他就有 Fermat 大小定理传世。小定理说的是素数的一个性质, 这个定理后来被欧拉推广, 欧拉对比整数 a 小的素数的个数引进了关于 a 的一个函数。判定素数还有一个定理就是威尔逊定理。Fermat 在一本书的扉页或者页眉那样的地方写道: 我可以证明 a 的 n 次方加 b 的 n 次方等于 c 的 n 次方, 如果 abc 不等于零, 那它没有其他的整数解, 这个我已经证明出来了, 但这地方太小, 写不下了。他写完这个后, 也就没有多讲, 后来就死去。这个命题传了出去, 被称为 Fermat 大猜想, 或者 Fermat 大定理, 黑暗由此产生, 几乎没有一个数学家能够证明它或者推翻它, 所以, 这个 Fermat 大定理独领风骚三百年。

后来, 据说这成了一种文化, 在纽约地铁站, 墙壁上可以看到这样的话: Fermat 大猜想我已经证明出来了, 但我来不及写下我的证明, 因为我的地铁来了。到了 1995 年左右, Fermat 猜想真的被证明出来了, 证明它的人叫 Andrew

Wiles。证明过程艰辛而且痛苦, 类似于越王勾践, Andrew Wiles 深闭门而不出, 十年磨一剑, 终成大器。这是数论在近来的最高成就, 数论远离物理学, 相对论也很难与它有联系。虽然两者具有同样的品质: 看上去很美。

(2)

毕达哥拉斯定理用到计算空间点之间的绝对距离。空间的两个点之间的绝对距离不依赖于坐标系的变化。这一点很重要, 正如一个人的思想品德, 不依赖于他所穿的衣服。陈省身有一个比喻, 大概意思是, 微分流形就是裸体的原始人, 而黎曼流形是穿衣服的现代人。衣服相当于坐标系, 是可以更换的。但在坐标系变换下, 绝对距离是一个不变量。

闵可夫斯基 (Hermann Minkowski, 1864—1909) 出生于俄国的 Alexotas (现在是立陶宛的 Kaunas)。一看他的名字, 一般人都能猜出他是俄国人, 他要干的事情, 是在时空中引进绝对的距离。这一点是惊人的, 1908 年当他抛出他的这个绝对的时空距离的时候, 连爱因斯坦本人, 也有点不太能够理解。他年轻的时候, 他父亲是一个成功的犹太商人, 但是当时的俄国政府迫害犹太人, 所以当闵可夫斯基八岁时, 父亲就带全家搬到普鲁士的 Königsberg (哥尼斯堡) 定居, 普鲁士就是现在的德国, 普法战争就是德国与法国的战争, 所以在欧洲大陆上这个两个大国是有些宿仇的。当时的闵可夫斯基他们搬家以后, 就与 Hilbert 的家仅一河之隔。所以这一次搬家带给他和 Hilbert 终身的友谊, 年轻的时候, Hilbert 觉得, 闵可夫斯基远比自己聪明十倍, 有点沮丧。1909 年 1 月 10 日, 闵可夫斯基在正达创作力高峰时, 突患急性阑尾炎, 抢救无效, 于 1 月 12 日去世, 年仅 45 岁。挚友 Hilbert 替他整理遗作, 1911 年出版《闵可夫斯基全集》。1900 年闵可夫斯基在苏黎士的综合技术学校 EYH 教数学, 学生的人来人往, 多数已经在历史里湮没, 但里面有一个人就是爱因斯坦。爱因斯坦对功课漠不关心, 闵可夫斯基对此表示失望, 说爱因斯坦是一只懒狗。1902 年闵可夫斯基离开 ETH, 来到德国的哥廷根大学担任数学教授, 当时是 Klein 邀请他去的。哥廷根大学领导世界数学潮流, 当时有希尔伯特, 克莱因, 那样的巨人们在那里。1854 年, Riemann 也就是为了在哥廷根大学得到一个讲师席位, 发表了他那划时代的演讲。

闵可夫斯基把时间和空间等同起来, 构成一个整体。1907 年, Minkowski 猜想可以用

非欧空间的想法来理解 Lorentz 和 Einstein 的工作，他认为过去一直被认定是独立的时间和空间的概念可以被结合在一个四维的时空： $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ 。这种结构后来被称为“Minkowski 时空”。根据这个度量，相对论的精髓思想被用简单的数学方式表出。这些工作为狭义相对论提供了骨架。诺贝尔物理奖得主 M. Born 说，他在 Minkowski 的数学工作找到了“相对论的整个武器库”。用现在的语言讲，闵可夫斯基认为时间和空间作为一个整体存在，这个整体，被称为四维时空。

换一个说法,就是在广义相对论中,没有先验的时间,为了得到时间,先到时空做一个 3+1 分解。因为 4 维的东西没有人见到过,所以没有人可以想象出来 4 维的时空到底是一个什么,象一个面包还是一个杯子,全不是。只好来一个比喻,时空就好像是一根香肠,可以被切片,每一个切面,才是空间。但 3+1 分解是人为的,它把破坏了本来的对称性。

狭义相对论最重要的思想正是把单独的时间和空间给埋葬掉了。

闵可夫斯基说：“我要摆在你们面前的空间和时间的观点，已经在实验物理学的土壤里萌芽了……从今往后，空间和时间本身都将要注定在黑暗中消失，只有两者的一种结合才能够保持一个独立的实体。”

假定 2 个事件之间的时空间隔是一个不变量，那么时间必然与空间联系在一起，构成一个整体去描述那个不变量。这是爱因斯坦 1905 年发现的狭义相对论的全部。虽然当爱因斯坦听到闵可夫斯基的发现时，不是特别在意。爱因斯坦笑话说：闵可夫斯基用那么数学那样复杂的语言来描述狭义相对论，物理学家简直弄不清楚了。

4 年后，1912 年，爱因斯坦认识到，自己不应该笑话闵可夫斯基。因为要把引力与狭义相对论结合起来，闵可夫斯基的观点是很优雅的。

(3)

狭义相对论考虑的是完全的平直时空，这样的时空是爱因斯坦方程的一个解，被称为闵可夫斯基时空。时空上面的度量是闵可夫斯基度量，保持度量不变的变换是庞加莱群。这个群是 10 维的李群。但闵可夫斯基时空没有物质，引力场退化，在经典广义相对论看来，这是一个虚空，没有多少意义。

Minkowshi 时空是平坦的，看上去平淡无奇。数学家唐纳森等人在 1983 年发现，4 维度的 Minkowshi 时空流形（是 Euclidean 空间，它与 Minkowshi 时空流形无法建立整体的微分同胚，但可以局部微分同胚）具有无穷多个微分结构。这个发现利用的是非经典的量子场论，结论是惊人的，因为其他的 R^n (n 不等于 4) 的流形上都只有唯一的微分结构。Minkowshi 时空那样特殊，而人类生活其中，这简直成了又一个上帝存在的明证。

但在当时爱因斯坦和闵可夫斯基那个时代，人们的意识还没有到底这样深的程度。Maxwell 的电磁场理论已经无比成熟，这是在 Minkowshi 时空上的电磁场方程。但有些问题很少被人注意到，比如因为电磁场的存在必然引起时空的弯曲，所以不存在真正意义上的平直时空的 Maxwell 方程。

而其他的问题层出不穷，后来的相对论学家温茹也用量子场论中的波格留波夫变换等技术发现，

在 Minkowski 时空上的加速观察者，他将观测到自己处在热浴之中，也就是说，这组加速观察者看不到整个 Minkowski 时空，而是存在一个看不到的区域，就是有一个视界，这个视界象一个黑洞视界一样，在热辐射粒子。Minkowski 时空显示出奇怪的另一面，这些事情的发生，引导人们反躬自问起来。对于看上去貌不惊人的 Minkowshi 时空，人们到底晓得多少。一直以为 Minkowshi 时空是真空，但事情显得很复杂，它似乎象一个貌似平静，但诡波谲流的大海。

第五章 经典场

(1)

牛顿的万有引力是不需要媒质而瞬时作用的力,虽然牛顿也说,想象引力能在真空中瞬时地和超距地作用是荒谬的,数学家笛卡儿同时是一个哲学家,他有一些哲学思辩,主要的思想是想说明真空不是一无所有的虚空。19世纪,同样的超距作用问题重新出现在库仑定律里——两个电荷在真空中通过瞬时力相互吸引或排斥。19世纪的法拉第出身贫苦,他父亲是打铁的,象他这样的情况,要想做出好的工作,需要比别人加倍的努力。他13岁就开始在钉书的店里搞装订做学徒。当时是维多利亚时代,流行教育讲座,每次要收钱1先令,但法拉第没有。后来在新落成的皇家研究院有了免费讲座,是院长戴维主讲的。二十一岁的法拉第在他的内心里运筹帷幄,要求拜见戴维,后来他成功地成为戴维的助手,1813年他还参加了环欧的科学旅行。他见到了许多著名的科学家,象安培、伏特和盖·吕萨克等,其中几位学者立即发现了这位年青人的才华。法拉第终于这样出人头地,但有时还不免被老板戴维的老婆叫去干一些贴身男仆才干的事情。法拉第是一个英雄人物。他相信,磁场能产生电流,于是做了许多实验,小学写过作文的人全知道法拉第有一本传说中的日记,那里每一天记着同样的几个字:“今天依然没有成功。”这说明锲而不舍是多么地重要。物理学实验不同于社会学的实验,戊戌变法失败后,政治教材告诉我们,这一失败说明资本主义的改良道路不适合当时的中国,辛亥革命的果实被袁世凯窃取,民主被帝制复辟,说明资本主义的革命道路不适合当时的中国,于是,一个伟大的历史决定论就浮现了,只有社会主义才能挽救当时的中国。但是,在物理学实验上,法拉第需要却是那种不断失败,不断战斗的精神。

日复一日,十年过去了。

直到1831年,他失手把磁铁掉进了线圈之中,电流计在电光火石间动了一下。磁场产生了电流,他终于成功了!!

法拉第是这个黑暗长夜时代的光明,他是召唤电的天使,是后世唯一的神话之一。

牛顿认为存在瞬时超距作用,法拉第提出了场的观念。认为能量存在的方式之一就是场,物体之间没有相互接触也可以通过场发生相互作用。这就是经典的场。如果把这个经典场量子化,得到的就是传递相互作用的媒介子,它们是自旋为整数的玻色子。后来的1930年代日本科学家汤川秀树提出了介子,用来传递中子和质子之间的相互作用。我第一次读这样的科普文章,看见书上画了两个小孩,他们把一个小皮球抛过来抛过去。真是太有趣了,这个小球,就是传递相互作用的介子。

后来28岁的麦克斯维选择了一个风和日丽的日子去拜访法拉第,后者已经是一位68岁的老头,法拉第说:“你是唯一真正理解我的人,但你不应该停留于用数学来解释我的观点,你应该突破它。”Maxwell听从了这个意见。

(2)

Maxwell1831年出生在英国爱丁堡。1831年是一个非凡的年份。因为这一年,法拉

第发现了电磁感应。霍金是一个出生时间选得更巧的人，他说他出生的那天，是伽利略逝世 300 周年忌日！

Maxwell 不善言辞，他是在英雄时代唯一一个可以与 Newton 抗衡的人。他爸爸是有科学技术爱好的律师（有的说他爸爸是工程师）。他 16 岁的时候上爱丁堡大学，有的同学说他爸爸是土财主，Maxwell 是一个土包子。三年后，19 岁的他到 cambridge 三一学院，为一窥上帝之书。再后来 Maxwell 就留在 Cambridge 教书，经常在玫瑰花开满花圃的夜晚对着花刺不住地演讲，从而达到给学生上课时候口吃清楚地程度。他下的苦工仅次于古希腊某位著名的结巴演讲家，后者每天清晨把石子放舌头底下练口才。

电磁理论的经典程度让人吃惊，包含库仑、奥斯特、法拉第、毕奥——萨伐尔、安培这些人发现的定律。丹麦物理学家奥斯特在上一堂电流实验课时，一根磁针碰巧正放在他的装置近旁。他注意到，每当接通电流时，磁针就发生偏转。这个发现之后才几个星期，安德烈·安培（André-Marie Ampère）提出了一个理论，解释说可能是变化的电力产生感应磁力。于是，一个神秘的怪兽才开始被人类驯服。磁场显然是一个很奇怪的东西，后来的爱因斯坦回忆道，他小时候一直着迷挖空心思的一个玩具就是指南针。随后的一系列实验工作充分地证实了电和磁现象之间的密切关系。24 岁的 Maxwell 发表了关于磁力线的第一个文章，题目叫做《法拉第的力线》，有一些清楚的数学表达。Maxwell 比起法拉第来，数学见长。1862 年 Maxwell 发表了第二篇论文《物理力线》，进一步发展了法拉第的思想，得到了新的结果：电场变化产生磁场，由此预言了电磁波的存在，并证明了这种波的速度等于光速，揭示了光的电磁本质。1864 年他的第三篇论文《电磁场的动力学理论》，从几个基本实验事实出发，运用场论的观点，以演绎法建立了系统的电磁理论。1873 年他出版了《电学和磁学论》，全面地总结了 19 世纪中叶以前对电磁现象的研究成果，建立了完整的电磁理论体系。这个理论体系是一幢在经典的土壤上建成的大厦，但这个大厦的建成，召唤着相对论的诞生。

Maxwell 把那些定律统一起来，现在的大学物理教材上一般写成四个方程构成的一个方程组。这样的统一具备非凡的美感，可能更加重要的一点是，Maxwell 的方程组预言一点：光也是电磁波。牛顿时代以来，对于光是什么，讨论甚嚣尘上，但没有很好的答案，Maxwell 基本用他的数学，回答了这个问题。光存在于这个世界，真的是太重要了。对于光，最精确的说法是：上帝说要有光，于是有了光。在相对论中，光可以被看成是类光矢量，或者说零矢量，这样的零矢量本身不是零，它能够存在，在于，相对论在时空流形上配置了一个洛伦兹号差的度量。

按照现代的微分几何,闵氏时空上的真空 Maxwell 方程组可以写为:

$$dF=0 \quad (1)$$

$$d * F=0 \quad (2)$$

这是本书里出现的第一个方程组。作为一本正经的科普读物，这样的数学公式很可能引起阅读量比预期减半，读者纷纷逃逸。但这个方程实在是太美了，美到极致是疯狂，著者我也就不管了。民间科学家读到这里，多数人一笑而过，少数人会觉得莫名其妙，或者痛苦异常，睡觉也愤怒。（这是比较形式化的东西，不过确实可以让民科为难）为什么这里的 Maxwell 是这样写的。于是准备了一段解释。

方程 (1) 其实就是 U(1) 纤维丛上的毕安基恒等式，一个无挠的联络使得它恒成立，在这里，F 相当于曲率 2 形式。这个方程对应于 Maxwell 方程组里的两个，其中一个说明，磁场的散度为零。

方程 (2) 里面的星号表示的是 Hodge 对偶。

如果写成 $F=dA$ ，其中 A 是联络，那么，一些更加美妙的结论可以被推出来……引进余微分算子以后，可以与外微分算子一起组成 laplace 算子，然后，可以从真空的 Maxwell 方程组中推出波动方程来。当然，在这个过程中——物理系的本科生全知道——要加上

lorentz 规范条件。

这就是一整套关于电的理论。1898 年**汤姆逊**发现了电子后。这个理论开始一次又一次经受了实验的验证。但是麦克斯韦的方程写成四个一组的方程组，很多人会觉得有点美，但不是很对称，因为，他的方程里有电荷，但没有磁荷。其他的问题是一个静止电荷具有不随时间变化的径向电场。但当电荷运动时，其周围电场会自己调节到新的位置，场的变动以一个有限速度即光速传播，这就是辐射场。静电场和辐射场的区别，也引起了人们的注意。电磁理论的影响像万有引力定律一样巨大。麦克斯韦死后 8 年即 1887 年，亨利希·赫兹（Heinrich Herzi）在实验室成功地造出了电磁波。20 世纪初，古列莫·马可尼第一次实现了跨越大西洋的无线电联系，电讯时代从此开始。技术的光明比之前的任何一个时代还要光亮。

(3)

Maxwell 场方程的建立为后来狭义相对论的建立奠定了理论基础，因为它在伽利略变换下是被破坏的，也就是说，假如只做空间上的变换，而保持时间不变，Maxwell 场方程就要被破坏。于是严重的问题就出来了，直接导致了 lorentz 变换的出现，这迫使人们接受一个四维的时空观。所以，在相对论出现的道路上，Maxwell 场方程是一个丰碑。一直到现在，Maxwell 场方程是完美无暇的，它在广义相对论中的基本不需要修改。

爱因斯坦的场方程出来以后，出现了很多与麦克斯维场方程的比较。其中一个特点是 Maxwell 方程是线性的，爱因斯坦的方程是非线性的。另外一个真空 Maxwell 方程具有共形不变性，但真空爱因斯坦方程不具备这样的性质。后来，研究经典场的时候，一套旋量分析的方法被引进来，广阔的舞台打开了。科学家开始在这个宇宙的舞台上演奏华丽之弦，跳苍凉之舞。

第六章 狭义相对论

(1)

1900 年，世纪发轫，年度的英雄人物之中，希尔伯特在巴黎数学家大会上提出了那著名的 23 个世纪难题，其中不包括庞加莱猜想，poincare 猜想出现于 1904 年，这个猜想说假如某三流形具有与三维球面一样的同伦群，那么这个三维流形只能是三维球面。1900 年，在英国皇家学会的新年庆祝会上，著名物理学家开尔文勋爵作了展望新世纪的发言。回顾过去峥嵘岁月，

他充满自信地说：物理学的大厦已经建成，未来的物理学家只需要做些修修补补的工作就行了。只是明朗的天空中还有两朵乌云，一朵与黑体辐射有关，另一朵与迈克尔逊实验有关。

那时候是世纪之初，看来有一种新时代的浮躁。实际上，当时的物理学大厦压根就是一小庙，更广大的天空和宇宙还在神秘之中。数学和物理学面临一个大雨欲来风满楼的局面，相对论是一个交叉地带，数学家庞加莱和希尔伯特也在相对论上做过工作。庞加莱得到了 lorentz 变换，希尔伯特在爱因斯坦之前得到了正确的广义相对论场方程。爱因斯坦去哥廷根报告他的工作的时候，一开始得到的场方程是 $R_{ab}=T_{ab}$ 。其中 R_{ab} 是里奇张量。

在爱因斯坦之前，物理学家 lorentz 和数学家 poincare 都已经在这个方向上作了大量的工作，用现代语言来讲，平坦闵氏时空的保度量变换就是 poincare 变换群，而 lorentz 变换群就是 poincare 变换群的一个子群。但 poincare 似乎是完全接受不了爱因斯坦的狭义相对论，虽然两个人的结果是几乎一样的。所以 poincare 虽然一辈子作了不少关于相对论的演讲。但是他从来就不提起过爱因斯坦与相对论这两个词。

某个时候，爱因斯坦的母校 ETH(苏黎世理工学院)要聘请爱因斯坦当教授，poincare

写了一封信，大大的夸奖了爱因斯坦一番，但最后一段比较微妙：“我不认为他的预言都能被将来验证，他从事的方向那么多，因此我们应该会想到，他的某些研究会走向死胡同。但在同时，我们有希望认为他走的某一个方向会获得成功，而某一个成功，就足够了。”

poincare 于 1912 年去世，他的贡献可以彪炳千古，其在微分几何上有一个 poincare 引理，说的是一个闭形式能不能整体地写成一个恰当形式。这个引理说，如果微分形式 $F=dA$ ，称 F 是恰当的，那么 $dF=0$ ；如果反过来， $dF=0$ ，称 F 是闭的，但不一定能有整体的 $F=dA$ ，要想实现整体的 $F=dA$ 这样的结果，要求流形是可以缩为一点的。poincare 引理言简意赅，但很容易引出高斯-斯托克斯积分公式，也可以引出纤维丛的示性类，所以著者可以主观地说：“把一个微分几何学家和广义相对论学家从睡梦中摇醒，问他什么是 poincare 引理。假如答不出来，那他一定是假的。”poincare 去世了，有个数学界的组织者给爱因斯坦去了一封信，说要出个纪念文集来纪念 poincare，爱因斯坦拖了四个月才回信说，由于路上的耽搁，信刚刚收到，估计已经晚了，偏偏这位组织者不死心，说晚了也没关系，你写了就行。于是爱因斯坦又过了两个半月回信说，由于事务繁忙，实在没力气写了，然后不了了之。

经典物理学的终结者是麦克斯韦。他同时在天体物理学、气体分子运动论、热力学、统计物理学等方面，都作出了卓越的成绩。普朗克 (Max Plank) 说：“麦克斯韦的光辉名字将永远镌刻在经典物理学家的门扉上，光芒万丈。从出生地来说，他属于爱丁堡；从个性来说，他属于剑桥大学；从功绩来说，他属于全世界”。从研究方向看，很多人可能与他有一定的相似性，李政道也是。李政道在天体物理学上，把钱道拉塞卡极限从 5.6 倍太阳质量推到了 1.4 倍太阳质量，在统计物理方面，李政道证明了二维空间不存在湍流，后来又与杨振宁合作证明了单位圆分解定理。湍流是非常重要的，国内的极早就开始研究相对论的周培源教授，就化了大量力气来研究湍流。瓦特发明蒸汽机之前，他注意到水的沸腾可以推动茶壶的盖子，但后来研究流体力学的人发现，沸腾是一件很严重的事情，在那个时候，热传导方程就不能再使用了。在那里，人们看到了湍流，纳维叶-斯托克斯偏微分方程，可以描述湍流。没有问题，湍流一直跟生活关系密切。

1900 年，爱因斯坦大学毕业，天之骄子，难免意气风发，爱因斯坦试图留校当物理教授韦伯的助教，那样的话，爱因斯坦可以继续在那里读书然后得到博士学位。但是韦伯似乎不喜欢爱因斯坦，他要了两个外系的学生当助教，偏偏不要爱因斯坦，于是，爱因斯坦非常失望，对于前途的打算，被韦伯悉数破坏。在他 1905 年建立狭义相对论之前，爱因斯坦的人生似乎波澜四起，命运多舛，他还没有结婚，但女朋友米列娃就给他生了一个女儿。据说这个女儿后来被爱因斯坦当作养子来抚养，爱因斯坦的父母反对他与米列娃结婚。他找不到工作，四处碰壁，还做了一阵家庭教师，生活显示出巨大的不稳定性，就象是一个蜘蛛网，罩了爱因斯坦一脸。为了找工作，爱因斯坦发了不少的求职信，但没有一个成功，爱因斯坦认为，很多用人单位要人，但他们往往去大学里打听他，韦伯一定说了不少坏话。1902 年，在他的朋友格罗斯曼的帮助下，爱因斯坦终于在伯尔尼的瑞士联邦专利局找到了一份稳定的工作。

早在 16 岁时，爱因斯坦就了解到光是电磁波，他想，如果一个人以光速运动，他看到的世界会是一个什么样子？爱因斯坦的少年时代的这个问题，一直引导着他前进，后来使得他博得了冷酷历史的嫣然一笑。爱因斯坦之所以那样想，是因为惯性参考系的相对性。爱因斯坦年少时的问题具有他思想上的光芒，但用光子来做参考系是没有意义的。但参考系是重要的，中国古代有庄周梦蝶的故事，很是朴素，大致是在说同样的事情。我上大学一年级的时候，第一次听到这个故事，觉得很惊人，朴素的思想，很大的奥妙。在运动学上，如果一个苍蝇绕着一个静坐在凳子上的人的脑袋打转，牛顿时代的看法是，苍蝇与该人的地位是平等的，因为在苍蝇看来，人是在绕着自己在打转。但事情远非那样简单，在人和苍蝇这个系统的背景下，有一个 Minkowski 惯性系，这个参考系中，人的世界线是一条测地线，而

苍蝇的世界线是螺旋上升的一条曲线，不是测地线。通俗地讲，在四维时空里看来，苍蝇和人，不具有同等的地位。在时空图中，人的世界线是直线，是 Minkowski 背景时空上的测地线。而苍蝇的世界线是螺旋线。到了这里，一个新奇的世界已经展开。时间这个维度被加了进来，一个四维的参考系，显得比三维的参考系要多了一些新颖的东西。“世界线”这个词语，变成狭义相对论中最时髦的词语之一。

(2)

狭义相对论的最主要的公式是洛伦兹变换，是洛伦兹最先给出的，但相对论的创始人却不是洛伦兹而是爱因斯坦。洛伦兹也认为，相对论是爱因斯坦提出的。

洛伦兹变换考虑惯性参考系之间的线性变换。假如是非线性的变换，就可能把一个没有零温度的惯性参考系变成一个热辐射的参考系，这就是林德勒变换。

从麦克斯韦电磁可以知道电磁波以光速传播，而且光速是一个恒定的常数。伽利略相对性原理说，物理规律在一切惯性系中都是相同的。麦克斯韦方程组在所有惯性系中都应该成立，这就是说，光速在任何惯性系中都应该相同，都应是同一个常数 c 。但同时按照伽利略相对性，惯性系之间可以差一个相对运动速度 v 。依照速度(矢量)迭加的平行四边形法则，电磁波(即光波)的速度如果在惯性系 A 中是 c ，那么，在相对于 A 以速度 v 运动的另一个惯性系 B 中，就不应再是 c 了，而应是 $c+v$ 或 $c-v$ 。但是，麦克斯韦电磁理论说光速只能是 c ，不能是 $c+v$ 或 $c-v$ 。那么，爱因斯坦意识到，一定有什么地方出错了。

下面的三条理论，肯定有某一条是错误的了。

(1). 麦克斯韦电磁理论，它要求光速只能是常数 c ；

(2). 相对性原理，它要求包括电磁理论在内的所有物理规律在一切惯性系中都相同；

(3). 伽利略变换，作为三维空间矢量迭加原理的平行四边形法则。这一点后来看来不满足四维的相对论，但对于一个四维矢量，这个平行四边形法则是否能继续使用呢？四维速度还能按照这个法则合成吗？粗略地说，数学家哈密顿曾经研究四元数，用了 10 年的时间，才知道，四元数是不满足交换律的，也就是说，对一个四维矢量， AB 不等于 BA ，这样，平行四边形法则是不成立了。四元数空间实际上和单位矩阵和 pauli 矩阵空间是同构的，但矩阵不满足交换律。细致地说，单位四元数是一个四维空间的三维球面，而三维球面正好是 $SU(2)$ 李群。pauli 矩阵恰好是 $SU(2)$ 李群的李代数的基。在这里依稀可以看到，洛伦兹群和 $su(2)$ 群有了某种莫名的关系。这个关系就是旋量。

爱因斯坦想的没有那么细致，但他认定，第(3)条是错的，在光速不变原理和相对性原理的基础上，他推出了两个惯性系之间的坐标变换关系，这个关系就是洛伦兹等人早已得出的变换公式。

不过，爱因斯坦是在不知道洛伦兹等人的工作的情况下，独立推出这一公式的。更重要的是，爱因斯坦对该变换的解释与洛伦兹完全不同，时代证明，在物理解释上，爱因斯坦是正确的。于是，一个被巩固了地位的狭义相对性原理出场了：“所有的惯性参考系中，物理规律是一样的。”

狭义相对论的背景时空是 Minkowski 平坦时空。相对性原理导致了朗之万提出 Twins 悖论。这个提法简洁明了，使得哲学家再次被惊醒了，学术非常之争鸣。哲学家亨利·伯格森后来承认，朗之万 1911 年 4

月的演讲，“第一次唤起了我对爱因斯坦观念的注意”。

双生子悖论使人困惑。劳厄 1911 年写信告诉爱因斯坦，反对相对论的共同理由“主要是时间相对性和由此产生的悖论”。劳厄在 1912 年写的世界上第一部相对论教科书中说：这些悖论和其它有关时间相对性问题具有“伟大的哲学意义”。附带地说，第一，当年的 Twins 悖论具有非凡的影响力，它极大地推动了狭义相对论思想在民间的传播；第二，在早期，写作相对论的文章的人中，有一个研究生，他是 W.pauli，他的文章后来出了一本书，这个人

后来在量子力学领域相当杰出，其批评意见无比尖锐刻薄，被称为“上帝的鞭子”。

Twins 悖论的基本意思是说：在地球上有一对可爱的双胞胎姐妹，有一天，姐姐坐了极快速的**火箭吧**，去外太空去旅游了一番。等她回来，发现妹妹已经是人老珠黄，**昭华**已逝……而自己依然是貌美如花。既然相对论说，时间是相对的，那为什么会出现这样天上三日，地上三年的事情呢？现代的几何语言给出了一个解释：**因为妹妹和姐姐的世界线不一样，妹妹的世界线是 Minkowski 时空里的测地线，而姐姐穿越大气层再回来她肯定不是惯性运动所以她的世界线不是测地线。而世界线的长度表示生命的固有时间流动。更因为 Pseudo-Riemannian 时空的切空间（Minkowski 时空是其特殊情况）成立反三角形性质：两边之和小于第三边。**

天地者万物之逆旅，光阴者百代之过客。

当李白把时间和空间分离开来理解的时候，他没有想到的是，把时间和空间结合起来理解，具有非凡的快感。往来成古今，26 岁的爱因斯坦，用他深邃的眼眸照亮了黑暗的时空。

第七章 微分几何杂谈

(1)

据说几何学起源于丈量大地，微分几何学里有一个词语，“测地线”，测地线在黎曼几何中是 2 点之间最短的线，但时空具有非正定的号差，是伪黎曼几何，或者说是 lorentz 几何，所以，测地线是时空 2 点之间最长的类时线。当一开始，古代的人们发明平面几何的时候，也同时撞见一些问题，比如，能不能把用尺规作图把一块圆的土地等面积地变换成一个正方形的土地，化圆为方一直困扰着古代数学家，后来这个问题被证明是不能实现的。另外一个问题是这样的，给你一根长度一定的绳子，叫你去圈一块土地，怎么样子圈地，才能够得到最大面积，这就是等周问题。如果这条曲线不是平面曲线，这个等周问题更加复杂，所谓 Plateau 问题或者极小曲面问题，其实就是一个非线性偏微分方程。等周问题和最速降线问题一样，促使变分方法的诞生，在物理学上，这就是人们津津乐道的真理之一，“对作用量变分为零得到 Euler-lagrange 方程”。因此，几何学的这些问题非常朴素，但背后包含了巨大的玄机，其中 lagrange 的分析力学的思想，区别与牛顿，lagrange 曾经写了一本书，这本书是讲力学的，但全书没有一个图，lagrange 非常自豪。这本书 Lagrange 写了三十年，名为《分析力学》，把力学变为分析学的分支。

古代的人不知道大地其实是一个 2 维球面。后来，航海家麦哲伦环球航行，他是一个无比成功的冒险大王，他当然知道，假如大地是一个正方形，那么，可能有一天，他麦哲伦会走到大地的尽头，然后扑通一下掉进无底的深渊。历史总是垂青少数幸运的青年，后来，麦哲伦成功地回到了原来的出发点，大家才知道，原来真相只有一个，是这样的：我们居住在一个球面之上。但如若事后诸葛，仔细看一下，人类的武断似乎让人苦笑，其实，麦哲伦能够环球航行，不足以证明大地是一个球面，因为，还有其他的可能，比如环面，柱面，Mobius 带，Klein 瓶。其实要发现大地是一个球面，是一件很麻烦的事情。我们可能不得不站在高处，比如卫星之上，向下俯瞰，才能得到一个初步的结论，这是一种把流形嵌入在高维空间的方法。

2 维球面具有很多性质，在拓扑的意义上，它的欧拉数为 2。在几何上，它可以是最大对称空间，处处具有同样的曲率。在纤维丛上，2 球面上的 2 形式张量场不可能整体是恰当的，也就是不可能存在单一的电磁势 A 使得处处满足 $F=dA$ ，这就是 poincare 引理，于是我们得到 chern 示性类。

在 19 世纪末，美丽法国的小城南锡。poincare 小的时候，就是高度近视眼。所以他上课全靠听力。由于运动神经的不协调他从小就不能与小伙伴一起玩，童年非常之不幸。在

数学上，他后来做出了伟大的贡献。懂数学的全知道，在三维空间，标量场的梯度取旋度为 0，矢量场的旋度的散度为 0，这其实可以用外微分的语言表达为 Poincaré 引理。

Poincaré 引理认为，假如流形可缩为一点，假如它上面的一个微分形式是恰当的，那么它必定是闭的。这个断言非常之强，可算是当时数学上的颠峰之作。Poincaré 是数学物理的最后一个全才，他研究 3 体问题，在这个问题上，有一个 Poincaré-Birkhoff 定律，这个定理是关于不动点问题的，据说在保面积映射中，如果出现在相空间的环面上的两个周期 P, Q 的比例是有理数，那么上面的流转过有限周以后必定回到原来的点，如果用 Poincaré 截面来描述的话就是在 Poincaré 截面上出现了点的回复，从而实际的映射点是离散分布在圆周上的有限点。Poincaré 于 1912 年猜测，这种情形下的映射有 $2kQ$ 个不动点，一半稳定，一半不稳定，这被称为 "Poincaré 最后猜想"，在 Harvard 大学的 Birkhoff 证明了这个猜想，声名鹊起。这一映射模型是 Poincaré 在研究限制性三体运动中抽象出来的数学模型，如果在相空间的环面上的两个周期 P, Q 的比例是无理数(不是有理数)，那么环面上的流就是拟周期运动，永远无法在 Poincaré 截面上出现点的回复，从而实际的映射点是连续分布在圆周上的无限多个点，这个情形就要用 Moser 定理来解决。(这个是 Poincaré-Birkhoff 不动点定律，不是 Poincaré-Birkhoff 定理) 现时代要培养全才，已经不可能，因为 Poincaré 是断后的那一个人。

Poincaré 与 Klein 研究 3 维的空间。这个 3 维的空间是深山老林，很少有人能进去以后不迷路。这个 Felix · Klein 是德国人，因为研究瓶子而闻名世界。说到 Klein 瓶已经高度抽象，它是 2 个 Mobius 带子粘起来的结果，但它不能在 3 维空间中被粘起来。Poincaré 的问题是是不是任何 3 维的流形都同胚于 3 维球面？这个问题成为亘古难解的 Poincaré 猜想。Yau.s.t 认为人类连 Poincaré 猜想也搞不清楚，那就是连司空见惯的 3 维空间也没有真正研究好。可是，历史总是猛烈发展，相对论已经在另外一个来自瑞典的物理学家 Oscar · Klein 启蒙下进入高维度研究。这个启蒙运动叫做“卡鲁扎——Klein 理论”。

(2)

微分几何大致分为三种，黎曼几何，辛几何，复几何。这是根据微分流形上的度量来分类的。在相对论看来，黎曼几何不是最好的，最好的是伪黎曼几何，上面有因果结构；辛几何是有用的，但可是描述哈密顿系统，现在最流行的圈量子引力，就是从哈密顿系统里开始做量子化的；复几何与彭罗斯一直推销的扭量理论相关。陈省身考虑了复示性类，明显区别与庞德里亚金和惠特尼的示性类不同，但取得最大的成就。因为复数比实数要优越，要自然，正如任何多项式方程在复数范围里全有解。

杨振宁写了一首诗歌，来赞美陈示性类。

"天衣岂无缝，匠心剪接成。浑然归一体，广邃妙绝伦。造化爱几何，四力纤维能。千古寸心事，欧高黎嘉陈。"

最后一句，欧高黎嘉陈。这一句话里面，包含五位杰出的几何学家。按照我第一次读到这个诗歌的经历，我有点吃不准，那个欧字，是欧拉还是欧几里得，欧拉在几何学上的贡献我不是很清楚，因此是欧几里得。欧拉是 18 世纪的数学巨匠，据说在他临死之前，他说了一句话："我死了"。说完他就死去，很是神奇。数学大家的情操，表露无疑。欧拉生前，是处理无穷级数求和的专家，自然数倒数的平方和是一个难题，当时欧拉的老师 John.伯努利也弄不出来，但欧拉算出来了，答案是 $\pi^2/6$ 。其证明过程相当于把 n 次多项式方程里的韦达定理推到 n 等于无穷。

高斯从小就是一个神童，他 10 来岁的时候就会做等差数列求和，1 加到 100 等于

5050。这个故事现在家喻户晓，不少家庭用这个来检验自己家的小孩子是不是有数学天分。他青年的时候做 17 等分圆周的时候,后来就完整地研究了曲面和曲线,还得到很多重要的微分几何里的定理,其中一个叫"高斯绝妙定理",这个定理说明 2 维曲面的黎曼内禀曲率与外部空间无关。

黎曼 1854 年的那个著名演讲的题目是《几何学基础之假设》，微分几何学开始研究内禀曲率。

嘉当是法国数学家，是陈省身的导师。

陈省身是中国数学家，2004 年 12 月在南开大学去世，标志一个数学时代的结束。丘成桐先生题写挽联寄托对陈省身老师的哀思。

“

呜呼，大厦倾矣，二千年勾弦求根，割园三角，终不抵陈氏造类，孤学西传，置几何于大观，扬华夏于世界。

哀哉，哲人萎乎，卅五载提携攻错，赏誉四方，犹未忘柏城授业，中土东归，传算学之薪火，立科学之根基。

弟子 成桐 敬挽

2004 年 12 月 4 日”

(3)

陈省身年轻的时候，推广了微分几何学上很重要的 Guass-bonnet 公式。Guass-bonnet 公式具有非凡的影响，因为它联系了局部几何性质与整体拓扑性质，把看上去很不显然的两个东西联系在一起了，数学的统一性，变的非常明显。

他在 1980 年访问中国科学院理论物理研究所，写了一个诗歌，表达了更深的意思，数学和物理，具有统一性。这个诗歌高屋建瓴，人间难得几回闻：

“物理几何是一家，共同携手到天涯。黑洞单极穷奥秘，纤维联络织锦霞。进化方程孤立异，对偶曲率瞬息差。筹算竟有天人用，拈花一笑不言中。”

早期的相对论，因为没有用到整体微分几何，数学看上去有一些麻烦，数学技巧也显得不是很高，Hawking 写道，费曼曾经描述过 1962 年的一次华沙召开的引力会议，对当时的相对论研究者的低能表示了一定的轻视，到了 1960 年代，彭罗斯(R.Penrose)用整体微分几何证明了相对论里面的第一个奇性定理，结果开创了新的局面。penrose 还大刀阔斧地在广义相对论中引进了旋量。就我自己的认识来说，dirac 方程的解就是一种旋量。但在 4 维空间，最小的旋量是 2 维的,这就是不带质量的中微子，用 weyl 方程描述。对于最小的旋量，推广地说，如果 n 为偶数， n 维时空之上, $p=n/2-1$,则,最小的旋量维数是 2 的 p 次方。如果 n 为奇数， n 维时空之上,则 $p=n/2-1/2$,最小的旋量维数是 2 的 p 次方。在任意 n 维矢量空间,给定任意号差的黎曼度量,全可以定义旋量。但在流形上整体定义旋量场，却要考虑到流形的整体拓扑性质。而最近很热的扭量，其实就是一对旋量，满足一个约束方程。

第八章 广义相对论

(1)

狭义相对性原理说，“所有的惯性参考系中，物理规律是一样的。”基于狭义相对性原

理和光速不变原理，爱因斯坦在 1905 年得到了狭义相对论。爱因斯坦得到狭义相对论的那一年，发表了著名的三篇文章，其中第二篇里叙述了 $E=mc^2$ 。 $E=mc^2$ 后来引起大众的关注，因为这个公式认为，质量和能量是等效的。在这个公式里， m 不是静止质量，而是运动质量。

一百年过去了，现在看来，狭义相对论是很自然的想法，因为 4 维平坦时空的 Maxwell 方程具有与生俱来的 Lorentz 协变性。但惯性系不是一个自然的概念。爱因斯坦不是一个普普通通的男人，他 1905 年左右做了一些光电效应这样的文章，然后继续回到相对论，决定抛弃惯性系。在物理学里，惯性系是一个有特权的王国，爱因斯坦想，这个物理世界应该是民主的，不应该存在具有特权的参考系。他有了这样的思想——姑且称之为“参考系的民主”。做 M 理论的人可能更加深刻，他们了解胡耳和汤森的思想：膜的民主。

民主是一样好东西，近代中国在 1919 年开始了五四运动，疯狂追寻民主，这个运动的思想根源是新文化运动，当时人们大声疾呼“德先生”和“赛先生”，知识分子试图挽中国之狂澜于既倒。蔡元培希望请最大的“赛先生”爱因斯坦来中国讲学。那时，正是爱因斯坦和相对论名声大噪的时候。蔡元培通过各种渠道，一再邀请爱因斯坦访问中国，爱因斯坦也表示愿意访问中国。然而好事多磨，由于种种原因，爱因斯坦都未能成行。有的文章称：“直到 1922 年，事情才有了眉目。爱因斯坦将访问日本的消息传来，蔡元培又一次发出邀请。爱因斯坦也回信了，双方就访华的条件，协商了一下。蔡元培提出，如能到北大演讲，愿出酬金每月一千元。下榻处选在最高档的北京饭店。爱因斯坦倒也直率，他在回信中提出，每月一千元的酬金，数目尚可，但是要改成一千美元。住北京饭店，他是满意的，不过要按两人付费，也许他是考虑带夫人同行。一千美元的酬金，在当时是非常高的，因为那时爱因斯坦尚在德国，而德国‘马克’正在经历一场大贬值。对于一位在德国任职的科学家来说，即使是爱因斯坦这样的著名科学家，一千美元也不是一个小数。再说，北京饭店的客房也是以昂贵著称的。然而，蔡元培先生还是答应了爱因斯坦的这些条件。蔡元培认为，爱因斯坦如能光临北大，比什么鼎鼎大名的政治家、军事家都重要百倍！于是，北京饭店做了相关的准备，北京大学师生更是满腔热情、积极筹备，还特意组织了多场报告会，由丁西林等人讲解相对论，（丁西林后来是北大图书馆的）一时间掀起了一个宣传、普及相对论的高潮。可惜的是，由于种种原因，爱因斯坦最终未能访问北京，他只是在往返日本的途中，在上海停留了两天，就匆匆地走了。”这件事情到现在已经是明日黄花，但真相现在还有人在争论之中。可以肯定，爱因斯坦不是一个会轻易放人鸽子的人。

回过头看，万有引力的大小依赖于两个物体之间的空间间隔，但在四维几何里，3 维空间间隔不是一个不变量，参考系改变以后，这个空间间隔就变化了，于是万有引力大小就变化；万有引力定律与狭义相对论的矛盾水火不容。这个矛盾大致可以这样看出来，两个物体之间的空间间隔依赖于观察者，所以在不同的惯性观察者看来，2 个物体之间的万有引力大小依赖于观察者。这区别于库仑定律，在库仑定律中，除了电力还有磁力，在电荷加速的时候还有辐射。

万有引力定律对吗？狭义相对论对吗？爱因斯坦开始陷入了深深的思考。后来他意识到，应该抛弃惯性系了，他于是抛弃了惯性系。惯性系成了一个完美的弃妇，而新人却更胜旧人。在一定意义上，下面三个原理是一致的：

1. 广义相对性原理。
2. 广义协变性原理。
3. 微分同胚不变性原理。

到时候了，爱因斯坦提出了广义相对性原理，“所有的参考系中，物理规律是一样的。”有了这样一个原理，爱因斯坦要做的事情就是思考一下万有引力了，他要做的很简单，就是要让万有引力理论不依赖于参考系，不依赖于观察者。因为，爱因斯坦相信，物理规律

是普适的，它是物理王国的法律，有上帝制定，对谁都一样，在任何时间任何地点，全是一样的。就这样爱因斯坦用他的思辨构造了他的引力理论——广义相对论。在他的理论中，引力不是一种力，也许可以说，引力根本就不存在，所谓引力，其实是空间和时间（统称时空）被物质扭曲。正如一个人躺在席梦丝床上把床睡得陷了下去。引力不再是引力，所以有的人研究引力，写的书名字却叫《时间，空间和物质》。

1915年6月，7月，爱因斯坦在阿廷根作了6次关于广义相对论的学术报告。同年11月提出广义相对论引力方程的完整形式，并且成功地解释了水星近日点运动。

1916年，3月他完成总结性论文《广义相对论的基础》，

广义相对论正式地出炉了！值得指出的是，数学家希尔伯特在爱因斯坦之前就推出了引力场方程，他说：“哥廷根大街的每一个小孩都比爱因斯坦更懂四维几何，但发明广义相对论的是爱因斯坦而不是数学家。”

爱因斯坦方程是天人合一的典范，它的出世，表明纯粹理性具有非凡美感，人类心智，极富荣耀。

$$G_{ab}=T_{ab} \quad (3)$$

在真空情景下，爱因斯坦方程可以写成：

$$R_{ab}=0 \quad (4)$$

在有些情景下，人们处理带有宇宙项的爱因斯坦方程。

爱因斯坦方程(3)的思想精髓众所周知：物质等于时空的弯曲。这一点是最重要的，如果问爱因斯坦理论最震撼人心的思想是什么，一半人会回答是等效原理，另外一半人会回答是物质等于时空的弯曲。真正思考过这个问题的人，多数会选择后者。这个后者，也被很多研究量子引力的人最喜欢的，他们把这个叫做“背景无关性”。可以相信，一个正确的量子引力理论，它肯定不需要事先假定理论适用的背景。

有一个问题，是很自然的，假如没有物质，时空是不是会弯曲？很多人马上会讲，schwarzschild时空的外部解，没有物质，但是弯曲的。它是真空爱因斯坦方程的解。但注意，schwarzschild的外部不是闭的空间。真空爱因斯坦(4)引起了很多几何学家的兴趣。在某个时候，我还是一个年轻的大学本科生，听S.T.Yau在中国科学院的一次公众演讲，他是当代最杰出的几何学家之一，他问：“是否存在一个闭空间，那里没有物质，但时空弯曲？”

第九章 黎曼曲率杂谈

(1)

爱因斯坦方程横空出世了，求解这个方程变的很重要。爱因斯坦的方程是偏微分方程，它是几何和分析之间的桥梁，这个方程里面，最实质的内容就是黎曼曲率。需要求解的是度量函数，但求解一般不是轻易的事情。爱因斯坦曾经在一次纪念Maxwell的演讲时说：“偏微分方程进入理论物理的时候只是一个婢女，但现在已经是主妇。”其说法很容易让人想起中国古典名著《金瓶梅》。偏微分方程的理论，到现在还不是很成熟的。已经成熟的是代数方程，或者说是多项式方程。 $2x^2+3x=1$ ，这样的方程不算是代数方程。高斯证明了代数基本定理，说， n 次代数方程 $f(x)=0$ ，那么，它必然有 n 个复数根。但是真正求解 n 次代数方程，不是很简单的一件事情。

历史上一点一滴进步，都凝固了前人的心血。即使历史善于遗忘，也难免记住一些英雄。方程论上最早英雄塔塔里亚，他解决了三次方程，

塔塔里亚活着的时候被人砍伤，成为哑巴（他小时候的村庄受战争蹂躏，他被敌军士兵砍了嘴巴，后来口吃了，他这个名字的意思就是“口吃”，他不是哑巴）。据说在意大利语中，塔塔里亚就是“口吃者”的意思。他第一个解答这样子的方程：

$$x^3-21x^2+78x-55=0$$

但塔塔里亚掌握了3次方程的解法，没有发表，每天压枕头底下暗爽，后来被人剽窃

了。世道浇漓，剽窃的人成为当时该领域的学术带头人。塔塔里亚很是愤懑，1530年他约对方在米兰大教堂各出30道3次方程比赛，观者千人。结果是塔塔里亚大获全胜，对方一题未答，成为剽窃史上空前丑闻，也让后人引以为戒。解决了三次方程，很自然地就是解答更高次的方程。

1824年，22岁的Abel自费出版了一个小册子，他证明了， n 大于等于5的时候， n 次代数方程一般没有根式解。Abel是挪威的数学家，是一个穷牧师的儿子，一生贫病交加，27岁时死于肺结核。天才生于寒冷，他濒死去的时候，巴黎大学给他一个聘书，聘他去做教授，可是，Abel马上死去。Abel理论对后世有巨大的影响。

天才是互相感应的，Abel死的前一年法国的19岁的伽罗华写了一论文给法兰西科学院。他用一个新的方法回答了能够根式求解的代数方程的条件。其文章太前卫，别人看起来有点南腔北调。投稿2次，人家竟然把原稿给丢失了。

伽罗华是另外一个具有杰出才能的法国数学天才，他引起了群论的诞生。伽罗华比Abel更加富有传奇色彩，当时的法国巴黎各派政治意见不和，习惯卸下门板，在街道上筑起街垒，互扔石头。伽罗华是一个天才，他考巴黎著名的工科学学校竟然2次没有考上，上了巴黎师范。后者在当时还不算是名校。伽罗华对政治感兴趣，他是一个镇长的儿子，很有实力。还曾经因为政治上反对波旁王朝“七月革命”而被学校开除，后来又因为政治入了监狱，再上了法庭，在法庭上，他说：“我们是孩子，我们精力充沛，勇往直前。”

21岁的伽罗华在一天晚上，他答应与人决斗，在油灯下匆忙了写下了群论纲领。这个纲领也算是一个遗言，在某个地方他写道：我的时间不多了……

第2天天才在决斗中牺牲。

1832年5月的这天。

一轮血红的残阳挂在某一个枯树的枝头。

整个世界都快哭了。

Abel和伽罗华全在年轻的时候离开人世，他们对数学的影响却无比深远。他们对天才的年轻人有很好的示范作用，特引用词一首，以表哀思：

“原谅话也不讲半句此刻生命在凝聚
过去你曾寻过某段失去了的声音
落日远去人祈望留住青春的一刹
风雨思念置身梦里总会有唏嘘
若果他朝此生不可与你那管生命是无奈
过去也曾尽诉往日心里爱的声音
就像隔世人期望重拾当天的一切
此世短暂转身步进萧刹了的空间
只求望一望让爱火永远的高烧
青春请你归来再伴我一会”

挪威不是一个大国，但它出土了一流的数学家Abel，还有一个大名鼎鼎的是索飞斯·李。李发明的李群是相对论中的基本数学工具之一，很难想象一个不懂得李群的相对论专家会是什么样子。Bianchi对3维的李代数进行分类，发现有九种，这就是九个Bianchi宇宙。

(2)

李群也是微分流形，从微分流形的角度看它，会有一些直观的印象。比如SO(4)群，它是标准的三球面 S^3 上的等度量群。那么，什么是三球面呢？中学的几何学基本上都是研究2或者3维平直空间里面的几何学。一个点是0维的，一条直线是1维的，一个面是2维的，我们生活的空间是3维的。

2 维的面，很简单，有的看上去是弯曲的，比如篮球的表面，或者十三陵地宫里的巨大的圆木柱子的表皮——柱面。

但可以看到，一个柱面是可以剪刀剪开，然后可以贴在平坦的墙壁上，所以，不太严格地说，柱面的内在的曲率是 0，而球面显然不是这样的。球面的内禀曲率不是 0，大概就是不能用剪刀剪开它然后完全地贴到平坦墙壁上。

我刚开始接触黎曼几何时，就是用上面的方法在强行理解“内在的曲率”的。

但还是有一些问题，比方在纸上画一个扇形，然后把扇形卷起来用胶水把对边粘起来。那就是一个圆锥面。

显然圆锥面也是可以用剪刀剪开，然后可以贴在平坦的墙壁上，于是圆锥面的内在的曲率也是 0。但它有一个尖点，那里不是光滑的，不能定义内在的曲率，应该排除。

内在的曲率，实际上是指 Riemann 张量。

那么什么是张量呢？这个东西不是一个容易理解的概念，它可以被放在坐标系下被确定下来。比如一块石头，从东边看它象一只猫，从西边看象一兔子，从南边看它象一个乌龟。那么这个石头的外形，就仿佛是一个张量。

如果一个人试图研究一个正立方体沿着体对角线转动时候的动能，那么，转动惯量就是一个很好的例子。真正考虑这个问题并做过计算，甚至不断变换正立方体的转轴，张量，这个有点神秘的幽灵，会立刻象花朵一样开放在眼前。

自行车的内胎。它的拓扑结构是一个二（维）环面，修车人生活在三维空间里，他看到的是这样一个中间有洞的东西。

拓扑地看，一个自行车内胎与一个篮球皮有什么区别？自行车内胎上剪出一条封闭曲线不一定把它分成 2 块，但一个篮球面上剪一条封闭曲线一定把球面分成 2 块。这个暗示了球面与环面在拓扑上是不一样的。一个自行车的内胎实际上是一个柱面弯起来以后把 2 个头接起来产生的。看的出来，它就是一个圆周 s_1 在另外一个圆周 s_1 上走了一圈后得到的，所以有一个很直观的记号，环面 $T^2=s_1$

$s_1 \times s_1$ 。（环面记做： $s_1 \times s_1$ 。因为环面的英语是 Torus。所以还可以把 2 维度的环面简单记为 T^2 。）

那么自行车内胎 T^2 的内禀曲率是不是为 0 呢？？很明显它用剪刀剪 2 次后是不能完全展成平直的，它不可以完全地贴在平坦的墙壁上。因此，在三维欧几里得平坦空间的自行车内胎，它不是处处内禀曲率为 0。当这样说的时候，实际上背后的故事很是悠长。

因为 gauss-bonnet-chern 定理显示曲率与欧拉数有联系。几何与拓扑之间的联系就建立起来了，此岸的人们可以通过这些桥梁摘取彼岸之花，数学家的兴奋之情可以想象。但推广的高维流形怎么样研究，纤维丛出现了。

“美国的 whitney 在 1935 年第一个提出纤维丛上的示性类。在瑞典，stiefel 在 hopf 的指导下也开始研究初级的示性类，有一些萌芽思想。whitney 是在哈佛大学，他发明了上同调语言，所以他关于示性类是一种上同调类。whitney 证明了基本的乘积定理。在 1942 年，pontrjagin 在莫斯科大学开始研究 grassmann 流形的同调，这个使得他开始建立新的示性类。在 1946 年陈省身在复矢量空间上做示性类。他引进复数是高人之处，因为复数比实数要简单。”这是

milnor 在《characteristic》中写到的，milnor 因为证明 7 维球面上有不同于标准的微分结构，名留青史。他当时和 nash 同时在 princeton 大学。纤维丛的概念最初在 1935 由 whitney 给出。hopf 和 stiefel 的工作也说明研究微分几何的拓扑学侧面是重要的。steenrod 是 princeton 的教授，他是 nash 与 milnor 的师长。他有一书叫《the

topology of fibre bundles

》,在第 2 部分用到 hurewicz 的同伦群方法。hurewicz 有一个定理,这样定理可以从同调群得到同伦群。比如 $H_1(m) = 0$ 。他可以认定 m 是单连通的。同伦同调是研究流形的基本方法,早在 1900 年, Poincare 他在研究三维流形时,问:如果一个流形与三维球面有着相同的同调群,那么这个流形是否拓扑同胚于 S^3 ?

四年后他本人给出了否定的回答。这时他已经引进了基本群,也就是第一同伦群,他将问题改为:“如果一个三维闭流形与三维球面有相同的基本群,(基本群平凡,或者说这个流形单连通,)那么这个流形是否同胚于 S^3 ?”。这就是“Poincare 猜想”。这个问题一直到

现在还没有解决。fermat 大定理被克服后,是否说明这个 Poincare Conjecture 也将被克服?后来的数学家可能就是美国数学家斯梅尔(smale)推广了 3 维度 Poincare 猜想,广义

Poincare 猜想说:如果一个 n 维单连通流形与 S^n 有相同的同调群,那么它一定拓扑同胚于

S^n 。斯梅尔证明了五维及五维以上的同伦球面(具有与球面相同的同伦群)都与同维度球面拓扑同胚。他因此获得了 1966 年的 Fields

奖。斯梅尔的工作集中在 5 维以上,这无疑说明,3 维与 4 维度流形的拓扑性质可能是相当奇特的。这个有点象 5 次以上方程没有代数解法。一出来很让人吃惊。

在 1980 年之前,人们可以计算单连通四流形的同调和上同调群。

以 S^4 为例说明:

所谓同调, S^4 它在 5 维欧空间里嵌入的话,直观上就好象一个篮球,内部就有一个 5 维的洞。所以它的 $H_4(S^4)$ 非平凡, $H_4(S^4) = \mathbb{Z}$ 。这可见于 M.A.ARMSTRONG 著《基础拓扑学》,由孙以丰等译出。

由 Poincare 对偶可得到 $H_0(S^4) = \mathbb{Z}$ 。

由 hurewicz 定理, $H_1(S^4) = 0$ 意味着单连通。

由 Poincare 对偶可得到 $H_3(S^4) = 0$ 。

唯一包含信息的是

$H_2(S^4) = \mathbb{Z}^{b_2}$ 。其中 b_2 是第 2 betti 数。

而上同调群比同调群要多一些信息。但这些给出的信息依然不是足够的。

1982 年春, Michael Freedman 完成了单连通四维流形的拓扑分类,从而证明了 4 维的广义 Poincare 猜想,并因此获得了 1986 年的

Fields

奖。弗里得曼(Freedman, M.)运用了凯森(Casson, A.)环柄得到了单连通闭拓扑四维流形的拓扑分类。4 维度的研究之所以特殊,是因为它迫使人们放弃惠特尼传统方法。

(3)

在数学物理中,场论和微分几何的关系已经到了情侣般如胶似漆的程度。相对论本来就是微分几何,文献很多,但多数文章不会留下来,有的研究者指导研究生写文章,集中多年精力做的事情就是把低维的情况推广到高维。第一个博士生从 3 维推到 4 维,第二个博士生从 4 维推到 5 维,年复一年。直到某一年,流年不利,有实力的博士生直接从 3 维推到 n 维。于是,这个事情算是彻底干净了。另起炉灶的时光来了。什么叫高维空间?人类生活的时空一般认为是 4 维的,但在 string 理论理论认为宇宙是 10 维的,有 6 个维度太小。譬如花园里面的一个很长的自来水管,它是柱面,当然是 2 维的,但远远地看,人们会以为那是一根 1 维的绳子呢!!人们感觉不到 6 个额外维度,但他们组成卡拉比-丘成桐空间。额外维

是相对论研究的潮流之一，5 维度的时空，也就是 1920 年代初期最早最原始的 kaluza-klein 理论，具有统一引力和电磁力的神奇功能。5 维的 kaluza-klein 时空比人们的感觉到的 4 维的多出一个维度，多出了那一个维度非常之小。但电子在那里运动的时候就在 4 维时空表现出电荷来。这多少有点象看一个人在翻滚过山车，他身上有离心力的痕迹。

到了 20 世纪末，美国的女科学家 lisa

Randall 等提出了膜宇宙模型，她曾经在哈佛做博士后。我有一天，在北京的地铁里，问 loop 量子引力的三大领军人物之一，梯曼告诉我，当他去哈佛做博士后的时候，lisa

Randall 还没有来哈佛。估计梯曼不会希望我们的宇宙是高于 4 维的，因为时空一旦高于 4 维，那么空间部分就不是 3 维，loop 量子引力之所以成功，是因为它要求空间是 3 维的，那么它上面的标架有一个 $so(3)$ 的自由性，这个 $so(3)$ 的李代数和 $su(2)$ 李代数同构，于是，loop 量子引力可以把引力做一次量子化，做成非常类似与 yang-mills 的 $su(2)$ 场论。但 lisa

Randall 的文章允许额外维，并且是开放的额外维。于是我们现在的宇宙看上去就好像是操场上的一个篮球。这样的是为了解释暗物质暗能量物体构造出来的膜宇宙模型。霍金 2002 年再次来到中国的时候，在杭州大谈了一次膜宇宙，引起了世人对膜宇宙的莫名崇拜。

第十章 宇宙学之一

(1)

爱因斯坦把他的方程写出来以后，开始考虑的一件事情是如何从他的方程得到我们生活其中的宇宙。爱因斯坦的雄才大略在这一件事情上体现得淋漓尽致。这种气质在科学家中是极其少见的，赫胥利《天演论》第一句也有过类似的气质：“赫胥黎独处一室之中，在英伦之南，背山而面野，槛外诸境，历历如在机下。乃悬想二千年前，当罗马大将恺彻未到时，此间有何景物？计惟有天造草昧……”

爱因斯坦也是这样，他要在斗室之中，通晓天地之变，阴阳之道，但他用的是数学方法做《天演论》。

宇宙是一个四维流形，要研究它的演化，就是要研究 3 维空间超曲面如何在时间里演化。演化要满足爱因斯坦方程。除了爱因斯坦方程，3 维空间超曲面上的初始数据，也就是曲率和外曲率，与四维时空的曲率，相互之间要满足微分几何里的高斯-科达奇方程。对于真空爱因斯坦方程来说，高斯方程表示哈密顿约束，而科达奇方程象征着空间微分同胚约束，是 4 维广义相对论的对称性的体现。广义相对论的对称性，就是广义协变性，或者称为微分同胚不变性。微分同胚群是无限维的，研究起来非常复杂，圈量子引力要保持这样的群，也就是要保持这样的对称性，所以明显不同于弦论，这是弦论和圈论之争的本质。

广义相对论一直被誉为最美丽的理论，爱因斯坦也被认为是人类历史上最伟大的科学家，他一个人苦心孤诣地研究工作，为我们打开了认识神秘宇宙的大门。当然，与爱因斯坦的广义相对论有竞争的理论，为数也多如牛毛，这些理论之中，最重要的是班斯和迪克的标量张量理论，在他们那里，牛顿万有引力常数不再是一个常数，而是一个函数，这个想法是很自然的。函数也就是标量场，在广义相对论中，标量场神出鬼没，成就了一批又一批的文章。那么广义相对论最重要的品质是什么？这个品质就是上面所说的微分同胚不变性。

但在广义相对论中，最基本的是时空流形 M 和它上面的度量

g_{ab} 。 M 在没有 g_{ab} 的时候，仅仅是一个微分流形，它上面是没有距离概念的，也没有光锥结构，也就是没有过去和未来这样的因果结构。 M 仅仅是一个微分拓扑空间，可能把它想象成一个 4 维的自行车内胎或者篮球皮，等等等等。 M 上面具有光滑的微分结构。至于它上面有多少光滑的微分结构，这个问题就过于艰深了。一般地说，在最简单的 4 维平坦 Minkowski 流形上，唐纳森用 yang-mills 场论的方法证明，上面有无穷多个微分结构。这

个工作得到 Fields 奖，也将会名垂青史。

那么，M 上的所有微分同胚变换是不是构成一个李群？答案是肯定的，但是，这个 $\text{diff}(M)$ 李群是无限维的，这有一点不象 $\text{su}(2)$ 那样简单， $\text{su}(2)$ 李群是 3 维的。在圈量子引力中， $\text{su}(2)$ 群上的平方可积函数空间是一个希尔伯特空间，内积通过海尔（Haar，通常翻译为哈尔）测度定义。但对于 $\text{diff}(M)$ 李群，因为它无限维，所以不存在海尔测度，圈量子引力再次遇见困难。

(2)

在相对论里，度量

g_{ab} 的号差是 Lorentz 的，也就是说，把度量看成一个 4 乘 4 的矩阵，在线性代数里面，有一个惯性定理，这个定理说，在相合变换下，矩阵的正负特征值的个数是不变的。度量是 Lorentz 的，相当说，特征值有一个是负的，其他三个是正的，写成 $(-, +, +, +)$ 。其中，负号代表时间。

是否每一个流形都可以配上一个 Lorentz 号差的度量？或者说存在整体定义的时间？时间作为一个矢量场整体存在，矢量场整体无奇点，指数为 0。Hopf-poincare 的指数定理说，指数和等于欧拉数。所以一个流形可以配上一个 lorentz 号差的度量，必然要求流形 M 的欧拉数为 0。

M 的拓扑结构对 g_{ab} 的限制，这样的问题连爱因斯坦也没有考虑过。宇宙是有时间的，比如热力学时间箭头或电磁辐射时间箭头等等，全是浮现在宇宙大海之上的航标，如何正确地用纯几何来定义时间也是广义相对论中的大问题了。宇宙在演化，它由熵为零的状态变大熵增加的状态。如果宇宙最初是最大对称的，那么它可以是德西特宇宙或者反德西特宇宙，正两种宇宙全是共形平坦的，所以外尔曲率退化为零。当宇宙最后发生大挤压，外尔曲率发散，熵也发散了。penrose 认为，外尔曲率的演化可以表示宇宙的时间，这就是极其著名的外尔曲率猜想，也就是用几何的方法来表示宇宙的时间。

(3) 哥白尼原理，也叫宇宙学原理，它涉及到宇宙的空间部分，该原理说：我们的宇宙，在空间上是均匀的，各向同性的。这一个原理是有一定实验根据的，那就是微波背景辐射。当然这个背景也不是绝对均匀的。但在数学上，这样的空间就是最大对称性空间。

人类生活在其中的宇宙，浩瀚神秘，每当仰望星空，很多人都会好奇，宇宙，它的空间部分到底是有限还是无限的，宇宙是不是自相似的具有分形结构，是否天圆地方，是否有沉睡在宇宙深处的黑暗能量，外星球有没有象人类同样的孤寂和智慧。在中国古代，就有《天问》的说法，这是一种十分好奇的一种心态。

目前的观测似乎说明，我们的宇宙 3 维空间部分具有最大对称性。单连通 3 流形具有最大对称性的，拓扑只有 3 种， E^3 , S^3 , H^3 。这个分类的结论与 Thurston 有联系。Thurston 把单连通 3 维的几何体分成 8 种，前面的 3 种就是 E^3 , S^3 , H^3 ，允许 6 个独立 killing 场，具有最大对称；后面的 5 种分别为 $S^2 \times S^1$,

$H^2 \times S^1$, Sol, Nil 和 $SL(2, R)$ ，允许 3 个独立 killing 场，具有均匀性 (spatially

homogeneous)，但不具有各向同性。所有这一切的前提，全是研究单连通流形。至于不是单连通的，或者其他情景，只能让人归结到 poincare 猜想。poincare 猜想最近声称被 perelman 证明，其中用到 Ricci

flow 方法，Ricci flow 方程为

d/dt

$g_{ij} = -2R_{ij}$ 。其实就是物理上的热传导方程。历史地看，毕达哥拉斯最早知道，正多面体只有 5 种，这相当于冰山的一角，推广到高维空间，问有多少个超正多面体。冰山暴露出来，一定让很多人大吃一惊，这样的冰山，可以化神气的泰坦尼客为腐朽，把繁华变成南柯一梦。

话说回来，我们的宇宙，在空间上是什么样子的呢？真的是 E3, S3, H3 的其中一种吗？罗伯逊和沃克 RW 度量描述了这 3 种情况。RW 度量的给出，纯粹是从对称性的考虑和宇宙膨胀的事实中写出来的。这个 RW 度量不是真空爱因斯坦方程的解。

RW 度量可以描述我们的宇宙，但它与爱因斯坦方程没有从属关系，也就是说，即使爱因斯坦方程不对，RW 度量也可以是正确的。它们两个的地位独立，类似于男人和女人的关系，男人和女人的结合，出来的结果是一个婴孩，就是富里德曼方程。富里德曼方程描述宇宙到底是怎么样子在膨胀。因为单知道膨胀是不够。现在发现膨胀是加速的，宇宙学就会给现在的科学提出一个大问题。这个问题总得来说是与暗物质和暗能量有关系。李政道曾经提过 21 世纪的物理学的大问题，暗物质暗能量好象也是其中之一，其他他说的好象有夸克幽禁和渐近自由。渐近自由理论已经得到诺贝尔物理奖。同样，暗物质暗能量问题一旦解决，肯定也能得到诺贝尔物理奖。在相对论领域，能够得诺贝尔物理奖的还有引力波或者引力子的发现。不说诺贝尔物理奖，宇宙学的这个问题可以与生命的起源，DNA 的编排，生物为什么必然要死亡等问题类比，是文明的指标。

莎士比亚（他借 Hamlet 的口说的）有一个很精彩很著名的句子，好象是说：“死掉还是活着，这是一个问题！”对于宇宙来讲，死掉还是活着这同样也是一个问题。

第十一章 宇宙学之二

(1)

宇宙的命运是少数人扣人心弦的谈资。近代宇宙学，大爆炸模型已经被很多人接受，被称为标准宇宙模型，其他还有一些非标准模型，其中以前最有影响的是稳恒态宇宙模型，它由英国天文学家霍伊尔（Hoyle, Sir

Fred 1915~）、美国天文学家邦迪（Bondi, Hermann 1919~）以及在奥地利出生的美国天文学家戈尔德（Gold, Thomas

1920~）提出的。霍伊尔曾经在剑桥大学，霍金从牛津大学毕业，最初是很想成霍伊尔的研究生。邦迪定义了时空的质量，称为邦迪质量，区别于 ADM 质量。戈尔德时空是均匀的各向异性的时空，具有闭合的类时线，所有一个人可以沿着闭合的类时线回到自己的过去，可以亲眼目睹自己被分娩的现场一幕，确实是震撼人心。大爆炸理论一开始是热大爆炸理论，没有暴涨的过程。在热大爆炸宇宙模型提出的初期，人们曾根据哈勃常数推算宇宙的年龄，然而由于哈勃常数在测定远距离星系的视星等与红移关系时，采用了造夫变星决定距离的偏差太大，以致得到的哈勃常数太大，由此估算出的宇宙年龄只有 20 亿年，比地球的寿命还短，这给当时的热大爆炸宇宙学说带来困难，稳态宇宙学说应运而生。

稳态宇宙学说认为，既然时间和空间平等，而宇宙物质在空间分布是均匀且各向同性的（此为宇宙学原理），那么宇宙在时间上也应是均匀不变的，这就是所谓的“完全宇宙学原理”。宇宙既然不断地在膨胀，同时又要求保持宇宙物质分布上的均衡不随时间改变，必然要求物质在不断地产生，从而保持宇宙物质的密度随时间不变。在稳态宇宙方程中，物质的产生和宇宙的膨胀不是正好地得到补偿，就可能出现稳恒态附近的起伏解，解中恰好呈现了物质分布的局域不均匀性。其次在应用电动力学或其它场论研究粒子间相互作用时，推迟势与超前势都是方程的解，然而只有推迟势才得到了观测上的验证，通常只用因果律解释其原因，这种解释带有人为性，常不能令人满意。1945 年，惠勒和费曼计算一个加速运动的电荷与宇宙中所有其它电荷的作用，在推迟势与超前势中，只有推迟势在起作用。他们的这一讨论是在稳态宇宙的基础上进行的。这似乎是在理论上对稳态宇宙学的一种间接支持。此外，在稳态宇宙学中，不出现高温、高密度的初态，避开了难以摆脱的“奇点”困扰。但稳态宇宙学不能清楚地说明，物质在哪里、以何种方式产生，以什么形态出现。在这个模型里，宇宙不会死亡。

考虑宇宙模型，往往能让人的感觉怅惘的空虚，偶尔会让人对人生也充满怀疑的颓废。情绪化而理性不够的人转而只能问一些最基本最天然的问题，比如，宇宙是不是无限大？宇宙是不是平坦的？

粗略地说：

1.可观测的宇宙是有限的。2.RW 宇宙是（局部）共形平坦的。

为什么要考虑共形变换，因为共形变换保持光锥结构不变，也就是说，不改变时空的因果结构。这是重要的，也是物理学家孜孜以求的。

现在被广为接受的观点是我们对宇宙的讨论可以分为两部分。第一是各种物理的场它们所满足的局部的定律，这些往往用微分方程被表述出来。第二是这些方程的边界条件，以及它们的解的整体性质。这在一定程度上要求我们想象宇宙的边缘。这两个部分是相互联系的。实际上我们已经知道局部的定律是由宇宙的大尺度结构决定的，这正是边界条件决定偏微分方程的解。反过来可以说，爱因斯坦方程是一个局部方程，它不能决定宇宙的拓扑。

但人们相信，我们认识的物理规律可以被推到整个宇宙。这纯粹是一种信仰，人们就象是在原始大森林里生活的人们，高山层峦叠嶂，第一个山谷里的人们，有一套法规，这套法规认为，通奸者要被游街，然后沉潭。但在其他的山谷，这套法规还可以通行？谁也不能保证。在宇宙学上，人们使用了这个很大的假设，就是我们在实验室里所得到的物理定律在宇宙的其他地方依然适合。假如看上去好象不是，那么我们说在我们的局部理论中还存在着尚未发现的场。我们还使用一些其他的假设，比如时空用伪 Riemann 几何描述以及能量密度的正定性，或者说广义相对论中的能量条件。

(2)

假设引力也是一种力，那么现在已经知道的基本的作用力可以分为 4 类：强作用和弱作用，电磁力和引力。其他三种相互作用可以用 yang-mills 方程描述。

$$DF=0 \quad (5)$$

$$D^*F=0 \quad (6)$$

这两个方程是真空 Maxwell 方程组

$$dF=0 \quad (1)$$

$$d^*F=0 \quad (2)$$

的非线性推广。其中 D 是协变外微分算子。整个方程显得很紧凑，非常优美。

当然引力是现在为止发现的最微弱的力，但在宇宙大尺度结构的形成上起了主导作用。这个是因为强作用与弱作用的力程非常短，而虽然电磁作用的力程很长，但电荷的排斥与吸引是平衡的。引力，相反，却总是相互吸引的。所以一个物理上总的相互吸引力，总是在其他三个力中占据主导地位。

引力不但是在在大尺度上起主导作用的力量，而且，它对质量不大的物体也是以相同的方式进行作用的。Galileo 最先发现不同质量的物体做自由落体的速度都一样。这个被 Evtvos 用非常高精度的实验所检验，还有 Dicke 以及其后继者也做了进一步的检验。并且人们还观测到光被引力所偏折。既然没有东西可以比光具有更快的速度，这意味着引力决定了宇宙的因果性结构。比如它决定了时空中的事件是否可以有因果联系。（广义相对论实际上就是黎曼几何学，几何学上没有对光速恒定提出限制，光速恒定是狭义相对论的基础，体现在广义相对论中，使得时间与空间量纲一致。）

在爱因斯坦的广义相对论基石上研究大尺度时空结构。爱因斯坦的理论预言与实验非常之符合。但人们也许有时候会提到与爱因斯坦理论不太一样的理论，比如，Brans——Dicke 理论，有的人以为 Brans——Dicke 理论已经死了，事实上现在网络上还能有这样的文章，说明 Brans—Dicke 理论还活着。在宇宙学上，模型一旦出现，绝不会轻易死亡，人们要把它当作一个球，至少拍上 20 年。

时空的模型是一个流形 M 配上一个 lorentz 度规 g_{ab} 。有两个假设赋予度规 g_{ab} 以物理意义：局部的因果性与局部的能动张量守恒。这个在相对论中是被实验证明的。第 3 个假设是度规 g_{ab} 的场方程，这个是几乎没有被实验所证明的。所以，一个好的引力理论在用到场方程的时候往往只用到诸如正质量密度使得引力是相互吸引（而非排斥的）。这种性质在爱因斯坦的相对论的对手 brans——dicke 理论中也是一样的。

还有一种称为正反物质的宇宙模型，它由瑞典物理学家克莱因（Klein, O.）提出。为了解释现今宇宙完全由正物质组成，克莱因假设，宇宙初期存在有电磁场，由于引力和电磁作用，等离子体中正反物质分开，并分别聚集形成由正、负物质为主组成的物质团，由正负物质湮灭产生巨大的辐射压，使得两种物质团朝两侧被推开，当今宇宙恰好处于以正物质为主的宇宙区域之中。它说的天花乱坠，但最后的胜利者，依然是大爆炸宇宙学。

第十二章 黑洞的惊鸿一瞥

(1)

在几乎所有的物理学的书籍中，可能费曼的三卷物理学讲义最引人注目，这个讲义大致是 1960 年代他在加州理工大学给大学一年级与二年级的学生做的演讲。当时大概有 180 个学生聚集在一个大的演讲厅里，一周两次去听物理学家费曼的讲座。这些学生在听完以后分成 15 到 20 个人一组在助教的指导下背诵和理解这些讲座。费曼说在这些讲座的最主要的任务是要使得那些从高中来到加州理工的非常聪明的学生保持他们对物理学的热情。因为这些学生他们曾经听说过物理学是多么有趣以及激动人心——相对论，量子力学，以及其他现代的观念。但是一般地，在他们真正进入大学的前期 2 年的入门课程里，他们往往听到的是让人沮丧的缺乏现代新鲜感的课程。这些学生们被迫着去研究斜面，静电学，诸如此类有点罗嗦的东西，其实这些东西有的学生在高中的时候就了解的很清楚了。所以，一般来说，大学物理系的前 2 年非常徒劳。费曼用他的精彩讲座试图来改变这样的局面。他的讲座里，也讲了一两次广义相对论。

古典的传统的物理学确实有非常令人乏味的地方。在大学里，很多年轻学生对诸如“黑洞”，“虫洞”这样的事物充满激情和美丽幻想。

这就是生活。

(2)

黑洞。

最早使用这个名字的人是费曼的导师，后者可以被称为“美国相对论之父”，因为爱因斯坦之后，几乎在美国的所有一流的相对论专家，全是他的徒弟和徒孙。他就是惠勒。附带地说，我上研究生的时候，在学校里听一位印度学者做相对论的报告，这位学者在开场白里戏称刘辽为“Father of Chinese General

Relativity”，当时座下的刘辽教授当即表示了谦虚地反对，于是，大家一笑而过，实际上中国的相对论研究，起源于周培源等先生的工作，但后来周培源喜欢上了湍流，湍流是自然界里常见的现象，当我们给一杯水加热，那么一开始热传导方程可以很好地被使用，我们甚至可以预见加热多长时间后水将要沸腾，在沸腾之前，水面是那么平静，平静地让你觉得不再希奇。但事情没有那样简单，一旦水开始沸腾了，平静的水面上开始出现渐渐出现诡波涌动，继续加热，水就沸腾了。这是一个普通的场景，但对瓦特来说，这就是蒸汽机，对于 1883 年的雷诺（Reynolds）来说，这也许是另一个奇异的世界，雷诺指出：当流体的雷诺系数 R 大于某个临界值 R_c 时，流体就从层流向湍流转化。不久，他又提出了著名的雷诺方程，试图用确定论的方法来解决这个问题，然而他始终没有得到明确的结果。后来人们发现，描述湍流的动力学性质，最好的方程是 Navier-Stokes 方程。Navier-Stokes 也是 2 阶非线性方程。后来的中国，相对论研究不是很热闹，在文化大革命时期，掀起了批判相对论和

爱因斯坦的高潮，封建社会主义露出畸形的一面。刘辽受到一定的迫害，但坚贞不屈，证明了知识分子真是社会的良心。在美国，惠勒 1933 年研究生毕业以后就开始大展宏图，在二战期间做过原子弹的研究工作。战争结束以后用计算机模拟过黑洞。因为，黑洞是恒星演化的产物，恒星的核反应，这其实就是原子弹的原理。所以，对于黑洞一开始的研究，是很物理的，而不是象现在，由于霍金和 penrose 的威望，相对论显得偏于几何和数学化。

“黑洞”这个词，在法语里感觉起来比较淫秽。但钱德拉塞卡曾经说过，广义相对论作为一门理论，其实验依据不是非常充足，但他相信，广义相对论是真理，为什么？因为从他做黑洞微扰的经验，他得到了一些震撼人心的美的体验。

黑洞一出现，人们普遍认为，这几乎就是世界末日的真实体验，以史瓦西黑洞为例，当观察者进入到离黑洞中心距离为 $R=2M$ 的时候，他就会在人类的世界里消失。道理是很简单的，在 R 小于 $2M$ 的时候，每一个等 R 面全是同时面，也就是说，坐标 R 在那个时候，已经不是空间，而表示时间了，所以，观察者不可能在同一时间出现在相等的 R 处，于是，时间流动，这个观察者必然要沿着 R 单调变化的方向前进，于是，它必然要撞上 $R=0$ 的那个可怕的地方，这个地方，是这个观察者时间的终点，被称为奇点。

美国康奈尔大学的研究者 Rindler，他给 $R=2M$ 的那个地方取了一个名字，叫做地平线，英文是 Horizon，原始的意思是说，这个观察者掉进了 $R=2M$ 这个曲面之后，黑洞外面的人再也见不到他了，就好象太阳在地平线之下，地球上的人就看不见了。后来，Horizon 被翻译为一个更加学术化的名词“视界”。

如果说有什么记号能够表示黑洞，最简单的数学可能是：

奇点+视界=黑洞。

(3)

黑洞，就好象是达芬奇的《梦娜丽莎的微笑》这样的历史名画，或者是贝多芬的《命运》这样的交响乐章，它充满了美，同时充满了对人生命运的无情嘲弄。在 1970 年代以前，人们开始接受一个这样的观念，黑洞，是恒星演化的终结。黑洞是一个完全黑色的东西，

但是，在 1974 年 2 月，在牛津大学有第一次的量子引力会议，这样的会议在 6 年以后还有一次，会议的组织者是该校的爱沙姆，西阿玛和彭罗斯等。在这个会议上，霍金报告了一个惊人的消息，黑洞不是完全黑的，它会向外发出辐射，并且，这个辐射是热辐射，也就是说，它不会带出什么有意思的信息。当然不排除霍金在这个回忆之前已经吐露了这个研究结论。

霍金的这个发现，给他引得了世界性的声誉。这个时候以后，大众的视线，开始聚焦在这个在轮椅上的严重失声肌肉严重萎缩的英雄人物身上，历史显得疯狂起来。因为，霍金传递了一个讯号：黑洞，不是恒星演化的终结，而只是一个中间过程，我们人类，似乎还有希望。

相对论比较成熟的学问包含了宇宙学和黑洞。相比较来说，宇宙学和天文学的关系密切。宇宙学它的历史悠久漫长，在这个历史过程中，爱因斯坦引入了宇宙学常数，修改了他的引力场方程。他的这个举动，使得整个宇宙学的历史跌宕起伏。黑洞理论和宇宙学一样，给相对论以一个应用的舞台。在某个时候，爱丁顿和钱德拉塞卡有过著名的争论，相对于沉默的钱德拉塞卡，爱丁顿这样尖锐地说：“你是以恒星的角度看问题，而我，是从大自然的角度看问题。”也许，这句话在这里显得荒诞。对于宇宙，要从大自然的角度去看，但对于黑洞，也许要从恒星的角度去看，这是钱德拉塞卡的梦开始的地方。

第十三章 钱德拉塞卡

(1)

“我不知道风/在向那一个方向吹/我是在梦中/在梦的轻波里依洄/”中国的徐志摩乘

船离开剑桥大学以后几年，另外一个来自东方文明古国印度的学生乘船来到了剑桥大学。他的名字是钱德拉塞卡。他想跟爱丁顿研究天体物理。爱丁顿当时是世界上一流的相对论学家，在第一次世界大战中他率领一群人开了船来到巴西某个岛屿发现了引力场确实能让光线偏折，证明了爱因斯坦广义相对论的正确性，而被人们看好。

爱丁顿年轻的时候就很聪明，并且骄傲过人。这个人与女朋友谈恋爱，研究天象很有成功，刚刚推导出氢核反应，一天晚上草地上躺满了情侣，一对一对地看星星。女朋友望着美丽闪烁地星光出神，对爱丁顿说：“看，闪烁地星星好美啊！”爱丁顿说：“是啊，可是此时，我是这个地球上唯一懂得为什么那些星星是如何闪烁发亮的人。”语气里充满了无比的孤独感。

钱德拉塞卡来自英国的殖民地，1929年钱德拉18岁（当时还在印度读书），就写了两篇有份量的论文。其中一篇题为《康普顿散射和新统计学》的论文递交给剑桥大学三一学院的富勒（Ralph H. Fowler）教授，富勒将论文推荐给《皇家学会会报》。第二篇论文刊在《哲学杂志》上。

后来经过漫长的海上航行，

钱德拉塞卡来到了英国，他当上了剑桥大学富勒教授的研究生。这奠定了他一辈子成功的基础。很多时候，我想起钱德拉塞卡的青年时代，感受到一个第三世界的青年的滚烫的胸膛，以及那里面流淌着的岩浆般对数学和物理的热血。

钱德拉塞卡猜想假如星星的质量大于太阳的1.4倍，则这个星星将会不断坍缩，最后电子的简并压和引力平衡，星体变暗，成为白矮星。电子的简并压是由 Pauli 不相容原理引起的，因为电子是 Fermi 子。Pauli 不相容原理仿佛是物理世界的爱情法则，在同一状态不能容纳两个电子，正如一个男人不可以有两个合法的妻子。Pauli 不相容原理是一个实验规律，它不能从其他物理规律中被推论出来。几乎在同时朗道也做出了同样的猜想。爱丁顿和爱因斯坦等著名科学家不同意钱德拉塞卡的猜想。因为他们想得更加远了，假如事情真如钱德拉塞卡所讲的那样，那么，当恒星的质量远远大于1.4倍太阳质量的时候，那时候引力会变得格外地强，于是，恒星不是以白矮星的命运结束，而是可能收缩为一个点了。这在爱丁顿看来，是违背自然规律的，因为在那个点上，密度无限大，曲率无限大。

爱丁顿说“我认为应该有一个自然定律阻止恒星以如此荒唐的方式运动”，

他后来又说泡利不相容原理不能应用于相对论性系统。爱丁顿的权威，使得天文学界基本上接受了爱丁顿的见解。因为这个缘故，钱德拉塞卡的诺贝尔奖迟到了50年！钱德拉塞卡与爱丁顿的见解不可调和，他在英国难以获得合适的职位，这样钱德拉塞卡才到了美国芝加哥。

后来，钱德拉塞卡在芝加哥大学从事了长达58年的学术生涯，后来的芝加哥大学，成为相对论研究的一个前沿阵地，除了钱德拉塞卡致力于研究恒星结构和演化、黑洞的数学理论外，盖罗奇（R. Geroch）和沃德（R. Wald）也成为最一流的研究者，他俩也是惠勒的学生。R. Geroch 在1973年美国数学家会议上跟数学家报告了广义相对论中的微分几何问题，引起微分几何学家开始关心正质量猜想。国内的梁灿彬教授在1981年前后去芝加哥大学做访问学者两年，跟随 R. Wald 和 R. Geroch 学到大量微分几何和广义相对论。

1944年为爱丁顿逝世，发表讣告演说时，钱德拉塞卡给予爱丁顿高度评价，把爱丁顿誉为那个时代仅次于施瓦西（Karl

Schwarzschild）的最伟大的天文学家。1983年钱德拉塞卡与富勒（W. A. Fowler）分享了诺贝尔物理学奖，获奖理由是对恒星结构和演化的物理过程的研究。他的主要著作有《黑洞的数学理论》（1983）。他的这本专著成为后来几十年黑洞研究的必备用书，其中有大量篇幅研究黑洞微扰和黑洞的测地线的行为。因为黑洞是全黑的，要想在天文上观察到黑洞，

人们期望在黑洞与地球之间有一个对黑洞的扰动，这个扰动会引起黑洞的辐射引力波。这些计算全是很数学，比如对于标量场来说，黑洞与地球之间的势称为里格--惠勒势。通过坐标变换，可能把方程化成比较美观的形式，再用超对称方法来解决类 schrodinger 方程。黑洞微扰其实就是微分方程，数学家也会有兴趣的。

钱德拉塞卡 1995 年 8 月 21 日在美国芝加哥去世。《今日物理学》杂志

1995 年 11 月号（48 卷）发表了芝加哥大学帕克（Eugene N. Parker）教授撰写的讣闻。讣告中称：“钱德拉塞卡的去世标志着这样一个时代的结束：物理学家首次达到向内探究原子和基本粒子、向外探索恒星宇宙的水平。”

钱德拉塞卡最初的关于白矮星的计算，后来被推广到中子星，从恒星的观点看，这样的方法，导致的结论是：黑洞不能被避免。

第十四章 中子星的辉煌

(1)

钱德拉塞卡已经得到了关于白矮星的理论，从他开始，人们真正开始了解恒星的命运。中子星的预言，其中的计算非常物理的，需要估计中子气的物态方程，因为中子星的密度极大，不能使用牛顿的万有引力，又必须要用到广义相对论。真正能做这些估计和计算的，在当时的人群里已经寥寥无几了。公元 1054 年，宋朝历史有关于金牛座超新星爆发的记述。

《宋会要》记载：“至和元年五月，晨出东方，守天关（现在的金牛座内），昼见如太白，芒角四出，色赤白，凡见二十三日”。这颗超新星爆发时视亮度超过金星，在白天也能见到，所以非常让人恐惧，现在在同一位置所看到的是它 900 年后的样子，它的形状已经变得像一只大螃蟹，因此被称为蟹状星云。

在米斯纳，索恩和惠勒的那本关于引力的专著里，也提到了这件事情，并且引用了中国的古文。

理想气体的状态方程，是很多人熟悉的，就是所谓的克拉伯龙方程 $PV=NRT$ 。但中子气的状态方程，是什么样子，很少有人能写出来了。1939 年奥本海默和沃尔科夫通过计算建立了第一个中子星的模型，他们的计算也只能给出一个比较粗放的结论，大致是说，如果恒星的质量是 2 到 3 倍太阳质量的话，那么，恒星最后会演化成为中子星。奥本海默是美国的原子弹之父，他的故事富有传奇的色彩。奥本海默是量子力学奠基人之一德国物理学家玻恩(Max

Born 1882~1970)的学生，也正是奥本海默等人把欧洲的理论物理搬到了美国。

Born 是一个犹太人，他先后在德国柏林大学做教授，在法兰克福大学担任理论物理系主任，1921 年，他还接替德拜成为哥廷根大学物理系主任。

1933 年希特勒在德国掌权后，玻恩由于犹太血统关系被剥夺了教授职位和财产。他流亡到英国，他逃到英伦的时候风声很紧张，他一下轮船就看见路对面打着一横幅，上面赫然写着：born

to be hanged。他以为英伦已经在他坐轮船来的途中沦陷，被希特勒占领了。

大吃一惊，心里大喊，莫非，莫非，真是天亡我也。其实 Born 没有想到的是自己的名字，born 在英文里有“出生”的意思。1954 年他和黄昆合著的《晶格动力学》一书，被誉为固体物理理论的经典著作。

(2)

中子星是当时物理学的一个十分交叉的领域，在 1932 年之前，还没有中子的概念。而这一切，又与量子力学有了千丝万缕的联系。从发现电子，发现中子，这些历史过程之中，人们渐渐地完善了量子理论，逐渐清晰地描绘了微观世界的景象。

在哥廷根，Born 的墓碑上刻着量子力学中最重要的不对易关系式：

$$pq - qp = h/2m。$$

在墓碑上刻数学公式，一般人是很少用的，波尔兹曼也用过，他的是 $S=k\ln w$ 。这些人全是有点天才气质的，尤其是波尔兹曼，他是统计物理的杰出领袖。

Born 的墓碑上的不对易关系其实就“海森堡不对易关系”。这个关系是量子物理区别于经典物理的关键之处。（当然 Dirac 后来认为，关键之处不是不对易关系，应该是量子物理的波函数的相位不定性。在两个波函数差一个相因子，在物理上无法区别，它们代表同样的量子态。）“海森堡不对易关系”原理也叫不确定原理。不确定原理看上去是如此简单，以至于几乎没有人能完全明白。因为这个不确定原理，使得量子力学几乎和爱情一样微妙。谈恋爱的男女，女生往往会提出这样的问题：“你确定爱我吗？”或者“毕业了你会不会离开我？”这个时候，男生往往不能做出很确定的回答。在爱情生活上的不确定性，描绘普遍的人性，流行歌曲歌声此起彼伏：“随缘分过去你不再问/不懂珍惜此际/每每看着我伤心/只因你看惯我的泪痕/对你再不震撼/看见了都不痛心/如何象戏里说的对白/想恋一生一世/说了当没有发生/思想已永远退不回头/爱过痛苦一生/沾满心中的泪印”。

附带地说，还有一个经典意义上内在的机制，可以导致宏观上的不确定性。这就是所谓混沌，假如有 3 个以上星体一起彼此通过万有引力作用，它们之间的吸引力是距离得-2 次方。这个传统的“三体问题”在很多年前由拉格郎日等人在某国王那里讨论过，当时讨论太阳系稳定性。这个事情的背后，全是冗长拖沓的历史。

(3)

爱因斯坦搞出一个狭义相对论的公式，能量等于质量， $E=m*c^2$ 。

奥本海默是原子弹之父。他出生在有钱人家，他在做研究生时候，听人报告总坐在前排，因为他已经习惯于在人家作报告时候冲上去说照我看这里用这个方程会比较简单，然后拿起粉笔在黑板上狂写。很多教授作报告，只要奥本海默在场，都是作着作着就渐渐沦为一个配角。奥本海默年轻的时候似乎有点从来不顾及他人之感受。但他的确是少数的几个实干家，学会了近似处理。在量子力学里就有波恩和奥本海默的近似，研究的是一群分子的群体行为，非常之物理。等他后来回美国领导原子弹研发，落斯阿拉莫斯，集中了大量研究人员，曼哈顿工程细致缜密而且庞大过人，奥本海默体现出杰出的领导才能。原子弹爆炸成功后，奥本海默成为名人。正当他春风得意，开始有人说他是共产党，有人说他是苏联的间谍，有人说他是……，反正是积毁销骨，他付出了名人的代价。原子能委员会或者 FBI 对他开始了不断的深入持久的调查，剥夺了他研究氢弹的权利。

奥本海默，开始了他漫长的象岳飞在风波亭里的那样的人生历程。

研究氢弹的任务交给了泰勒，泰勒先计算了氢弹的威力，发现一旦氢弹爆炸，整个大气层就要燃烧殆尽。

这就是泰勒，一个很有想法的人，杨振宁说，泰勒是一个想法很多的人，他的想法，90%是错的，但他很敢想，也算是一个不错的物理学家。

(4)

中子星的理论和中子的发现密切相关。

1932 年查得威克发现中子后不久，郎道就提出可能有由中子组成的致密星。查得威克发现中子，得到了诺贝尔奖，是在 1935 年。他发现的中子，理论计算利用的仅仅是高中生也能做的能量守恒定律，在他之前，居里夫妇其实也在实验上观察到了中子，但他们没有做出正确的解释。1934 年巴德和兹威基也分别提出了中子星的概念，并且指出中子星可能产生于超新星爆发。

1987 年的 2 月 23 日，加拿大多伦多大学的天文学家谢尔登在智利南部的南天观测站发现了一颗距离地球约 17 万光年的超新星爆发，它位于距银河系最近的星系大麦哲伦云中，

爆发的闪光星度是原来的几千万倍，肉眼就可以看到。在这样近的距离发生超新星爆发，谢尔登的这个发现立即轰动了整个天文学界，全世界所有天文台都进行了观测。这颗超新星被命名为 1987A。这个超新星 1987A 的爆发，发射了无穷多个中微子，在地球上，引起了其他粒子物理学家的严重关注。格拉肖的 $su(5)$ 大统一模型，也在这个时候，象一个建于流沙之上的华美城池，轰然倒塌下来。

超新星爆发时光芒万丈，比一千个太阳还要明亮，类似于原子弹的爆炸。爆发的结果是它或将恒星物质全部抛散，形成星际遗迹。或者抛射大部分质量，剩下的物质坍缩成白矮星、中子星或黑洞。

超新星的命运有这样三种不同的归宿，这三种不同的归宿，也代表几乎所有恒星最后的命运。对于黑洞，人们对其是心向往之，有将信将疑，因为在实验上观察到黑洞，好象不是一件轻而易举的事情。相反的，中子星的存在，早已经成为不能置疑的事实。在 1967 年，英国射电天文学家休依什和他的女博士研究生乔伊斯·贝尔发现了脉冲星。不久，世界陷入了喧嚣，但科学家马上确认这个脉冲星其实就是快速自转的、有强磁场的中子星。

粗率地说，可以把这个脉冲星看成是一个磁铁，它的自转轴与磁轴有一个夹角，每隔很短的一段时间，辐射扫向地球一次。那个晚上，女博士研究生乔伊斯·贝尔第一次发现这个快速自转的中子星带来的强大而急促的脉冲的时候，这个夜晚显得非常诡异，这个女研究生，她几乎要惊叫了，外星人来了??!!

第十五章 史瓦西解

(1)

刚开始，有了爱因斯坦方程，剩下的任务就是解方程，在流形上每一点的切空间看，爱因斯坦方程是一个张量等式，这样的张量等式包含足够多的信息了，可以对其中的张量进行分类，比如对其中的外尔张量进行分类，称为代数分类，或 petrov 分类。如果在流形上附加了坐标系，那么爱因斯坦方程的解可以用分析的方法得到，解就是度量函数，是 10 个方程组成的偏微分方程组，这个方程非常复杂，因为它不象一般的 n 次代数方程，后者人们可以根据代数基本定理，可以知道，有 n 个解。爱因斯坦方程到底有多少解，没有人能够说出来，也不能说出来，能找到解的人就是奇才，人中龙凤。虽然人们已经发展了一系列由已知解推出未知解的生成解技术，比如纽曼在 1965 年就从已经知道的 RN 解中生成了 kerr-纽曼解，当然其中的生成过程用到解析延拓和复坐标系转换，可谓是变幻莫测。所谓偏微分方程，要想解答出来，很多时候就是靠特殊函数之类的方法。在我上大学的时候，对特殊函数非常不妥协，当第一次读到薛定格不解偏微分方程，而用因式分解的方法，或者说，用超对称量子力学的方法得到一维谐振子的能谱的时候，我觉得整个世界是天昏地暗，那计算过程里的每一个字有豆腐干那样大，朝我迷糊的眼睛砸过来。再看史温格用同样一套方法，引进了两套产生湮灭算子，表示了 $su(2)$ 李代数，也就是得到了角动量，我不再怀疑道上的传言，说史温格其实比费曼还要聪明。物理学要是少了史温格，那真叫麻辣汤里忘了放辣椒，处女缺少贞操。后来我的江湖风云突起，到了现在生活里能见到这样的事情，企图用史温格的那无限多套产生湮灭算子，来表示 virasoro 代数。要知道，virasoro 代数是微分同胚代数，是无限维度的。

当时的我被惊讶。

原来，schrodinger 方程这样的 PDE，可以通过不解 PDE 来处理。

从某个时候起，我看到 Einstein 方程，就会想，能不能不用 PDE 的方法，来解决它。

寻找爱因斯坦方程解的故事非常之长，国外有一本专门这方面的书，叫《爱因斯坦方程的精确解》，这本书只有专业搞相对论的人才可以看懂。国内也涌现过一些人解过爱因斯

坦方程，比如，翻开尘封的历史之书，可以看到先驱束星北走过的峥嵘岁月崎岖山路：“束星北是我国早期从事相对论研究的理论物理学家之一。爱因斯坦广义相对论的引力定律，开始时只得到球对称静力场的近似解，随后K. 史瓦西 (Schwarzschild) 得到球对称静力场的精确解。30年代初，束星北曾试图推广到球对称的动力场，得到有质量辐射的近似解。……1950年代，H. 韦尔 (Weyl)、爱丁顿和爱因斯坦想通过黎曼几何把引力场和电磁场统一起来，基本没有成功。其实早在1930年前后，束星北就探索引力场与电磁场的统一理论，他考虑了引力场与电磁场的根本异同，提出用质量密度 ρ 和虚数电荷密度 $i\sigma$ 之和 $\rho + i\sigma$ 代替广义相对论中的能动张量中的质量密度 ρ ，从而导出一级近似的复数黎曼线元，实数部分正好代表引力场，虚数部分正好代表电磁场，并由之进一步推导出麦克斯韦方程组和洛仑兹力方程。”束星北是国内研究相对论的先驱之一，是李政道在浙江大学时的老师，但他后来受到了政治打击。其人生经历现在留下人们谜一样的感觉，下面是简单的年表：

- 1907年10月1日 出生于江苏省南通。
- 1924—1925年 求学于杭州之江大学一年级。
- 1925—1926年 求学于济南齐鲁大学二年级。
- 1926—1927年 求学于美国堪萨斯州拜克大学物理系三年级。
- 1927年 在美国旧金山加州大学学习。
- 1927—1928年 经日本、朝鲜，过莫斯科、华沙到柏林、汉诺威等欧洲各地游历及工作。
- 1928—1930年 在英国爱丁堡大学攻读研究生，获硕士学位。
- 1930年 在英国剑桥大学攻读研究生。
- 1930—1931年 任美国麻省理工学院研究生兼研究助教。1931年5月获理学硕士学位。
- 1932年 任南京中央军官学校物理教官。
- 1932—1935年 任浙江大学物理系副教授。
- 1935—1936年 任上海暨南大学数学系教授兼主任，上海交通大学物理系教授。
- 1936—1952年 任浙江大学物理系副教授、教授。
- 1944—1945年 被重庆军令部技术研究室借聘，研制雷达。
- 1952—1958年 任青岛山东大学物理系教授，海洋系气象研究室主任。
- 1960—1978年 在青岛医学院兼任教员。
- 1978—1983年 任青岛国家海洋局第一海洋研究所研究员。
- 1981—1983年 任山东和青岛市物理学会名誉理事长，中国海洋学会副理事长、名誉理事长。
- 1983年10月30日 病逝于青岛。

(2)

回过头来，让我们重新看一下爱因斯坦方程。

时空的几何用 Einstein 方程 $G_{ab}=T_{ab}$ 描述，场方程左边只出现背景流形的度量(以及它的派生量)而右边只出现物质场的能动张量。度量张量 g_{ab} 是场方程中最基础的概念之一，它是一个对称张量，但它同时具有 (-

, +

, +, +) 的号差，称之为号差为 2，这就是相对论不等于黎曼几何的全部原因，这样

的号差使得流形成为时空，上面甚至可以有类光标架，也就是 NP 标架。最原初，度量它指的是两点之间距离长短，但因为是弯曲时空，所以，任意两个时空点之间的距离变得很奥妙。北京到杭州之间的球面距离，大约是 1700 公里，这个距离之所以能够出来，是因为，我们在地球球面上赋予了一个度量，这个度量是由 3 维平坦空间的欧几里得度量在球面上诱导而得到的。由此可见，假如知道了地球球面的度量，我们就可以算出距离。现在，粗劣地说，我们是要在爱因斯坦方程里解出度量。

第一次真正解出这个度量来的人，就是史瓦西。

爱因斯坦场方程是一个张量方程，方程的成立是不需要坐标系的，但真正的计算必然是要选择坐标系，使得这个坐标系覆盖时空流形的某个区域。很重要的一点是，人们可以在同一个地方选择不同的坐标系，但真正的物理的东西是不依赖于坐标系的选择的，这就是广义协变性。通常的比喻是这样的：时空流形好象是一个房间，而坐标系好象是摄像机，摄像机可以从不同角度来拍摄这个房间。广义协变原理指出，无论怎么拍，都是反应同样的房间，房间是不依赖于摄像机的。

第一次世界大战期间，1916 年。有一个人给 Einstein 寄来一封信，他说他找出了 Einstein 方程的一个解，想要请爱因斯坦帮忙在物理学的学术大会上代为发表。写信的这个人当时在俄国，他忙着在战壕里计算弹道。战争是惨烈的，生命在弹指间灰飞烟灭。四起的狼烟与隆隆的炮声似乎为命运太息。

史瓦西在沉思。

他是德国的天文学家，当他死的时候，爱因斯坦不无悲戚地写了悼念的文章，文章的第一句是：死神从我们的队伍里带走了卡尔·史瓦西。

史瓦西考虑的情景是最简单的，他考虑的是一个不带恒星，不带电荷和不带自转，那么，这个恒星的存在将引起时空如何弯曲。

他得到了一个结论：

$$ds^2 = - (1-2M/r)(dt^2) + 1/(1-2M/r)(dr^2) + (r^2)[d\theta^2 + (\sin\theta)^2(d\phi)^2] \quad (7)$$

之后，他在冬天的战场上得了严重的皮肤病。

等他跑回德国就匆匆地离开了尘世。

一生象闪电般出现流星般消失。他的一生结束的时候那样绚烂

公式 (7) 描写了史瓦西时空的弯曲情况，这是一个很数学的结果。要清楚地看到它的弯曲情况，后来的人做了很多工作，人们还试图把史瓦西时空嵌入到更高维度的时空之中。这样人们看问题会稍微清楚一点，Eisenhart 有一个定理说，如果 n 维 Ricci 平坦的流形可以到 n+1 平坦空间，那么 n 维流形必然是 Riemann 平坦的。但 4 维史瓦西时空不是 Riemann 平坦的，它仅仅是 Ricci 平坦，所以它不能嵌入到 5 维平坦空间。但它可以嵌入到了 6 维平坦空间。

第十六章 伯克霍夫定理

(1)

史瓦西解是真空爱因斯坦方程的球对称解，于是，有一个很自然的问题就是，真空爱因斯坦方程的球对称解是不是一定是史瓦西解？答案是肯定的，这就是著名的伯克霍夫 (Birkhoff) 定理。Birkhoff 生前来过中国，他是一个美国数学家，也是研究动力学系统演化的鼻祖之一，什么叫动力学呢？通俗地说，方程中出现对速度做时间微分，或者说出现加速度，那就叫动力学。

动力学的一个特点是，系统在时间里演化。一个人的一生，一个星的一生，一个宇宙的一生，全是在时间里演化的。但在相对论里，用四维的眼光看问题，会有一个基本的障碍，这个障碍在于，如何定义时间。

什么是时间？

爱因斯坦，曾经说过：时间是一个错觉。威腾讲：时间应该被埋葬。

动力学系统可以用 Hamilton 体系来阐述。正则量子化也在 Hamilton 体系体系下进行。Hamilton 力学在数学上就是“辛流形”。“辛流形”是华罗庚对“symplectic manifold”的翻译。symplectic 这个词也是外国数学家造出来的，好像是外尔，这个数学家一开始发现，这种流形上可以定义处处非退化的闭的 2 形式场，于是觉得这个问题真是忒复杂，那得给这个复杂的小孩造一个名字，于是想叫它“complex manifold”（复杂的流形）。但是数学家发现，不妥啊，complex manifold 已给复数流形做名字了，那很混淆啊，于是这位大数学家有点生气了，觉得不应该叫它复杂流形，而反其道而行之，叫它简单流形，于是就生造了一个与 simple 相近的词语，symplectic。但这个事情到了中国，华罗庚考虑了，他想，我们得用天干地支，于是子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥里一找，觉得应该从甲乙丙丁戊己庚辛壬癸里排查，最后选择了辛。这一次遴选在技术上不亚于皇宫在民间选妃，这个妃子被选上以后，明显影响了数学的历史。民国时代的中国数学家喜欢中华文化，比如把正交群叫做酉群（复正交群才叫酉群，实正交群还是正交群）。

在量子力学中，氢原子的能级，体现出的是 SO（4）的对称性，这叫动力学对称性，直观地看，氢原子的存在使得位形空间具有的是 SO（3）的对称性。所以，动力学对称性是高于直观的对称性。这就是不著名的龙格-楞次矢量。

但动力学的对称性是非常重要的，伯克霍夫定理是一种动力学的对称性的体现，在 loop 量子引力中，所要解答的哈密顿约束，在某天的我看来也就是要研究这个理论的动力学对称性。要想在直观上理解伯克霍夫定理，不是一件容易的事情。史瓦西解实际上不是覆盖整个时空的，它的外部解大致可以描述太阳外部的时空弯曲的情况，假如不考虑太阳的自转。这个解很有实际意义，因为地球运行在被史瓦西解刻画的时空之中。这样的时空到底有性质呢？地球每一年绕着太阳转一圈，它的轨道每年都几乎是一样的——这一点很重要，假如地球和太阳之间的距离，是随着时间而变化的，换句话说，假如地球一会儿离太阳很近，热得要死，一会儿又离太阳很远，冷得要死，那么，这样的时空就不是我们所熟悉的史瓦西解所刻画的时空了。史瓦西解刻画的空间不随着时间演变，大致地称这样的时空为静态时空。当然这是一个很不严格的说法，在几何意义上，要想定义静态时空，首先要定义稳态时空。

稳态时空的定义为，时空区域存在一个处处类时的 killing 矢量场。这相当于说，度量演时间平移不变，也就是时空具有时间平移的不变性。粗率地说就是存在这样的度量矩阵，使得这个矩阵的各个分量对时间求导全是零，如果是这样，人们就说，时空是稳态的。如果时空不但稳态，而且存在与该类时 killing 矢量场正交的超曲面，那么，这个时空就是静态时空，不但具有时间平移不变性，而且具有时间反演不变性。

史瓦西外部（ $r > 2M$ 时）线元：

$$ds^2 = -(1-2M/r)(dt^2) + 1/(1-2M/r)(dr^2) + (r^2)[d\theta^2 + (\sin\theta)^2(d\phi)^2]$$

观察一下（8）这个度量，坐标 t 是时间吗？抑或 r 是时间？因为是外部解， $r > 2M$ ，所以线元的第一项是负的，第一项表示时间项，也就是说坐标 t 是时间。那么，度量矩阵的各个分量对时间求导全是零，可见，史瓦西外部是稳态的。而要判定它是不是静态的，就需要证明这个类时 killing 矢量场是超曲面正交的，在数学上有复杂性，原则上就是用到微分几何的佛罗般尼斯定理。

非常粗拙地说：证明一个矢量场与一个超曲面正交，还有一些可能是思路，比如要证明某矢量场与一个二维球面处处正交，可以用反证法，假定这个矢量场与球面相交处处有切分量，

于是在球面上就有光滑的切向量场,但这些切分量不可能光滑地布满整个二维球面——原因是因为 Hopf—poincare 的指数定理,于是,只好让所有的切分量全退化,那么,这个矢量场就与二维球面处处正交了。

什么叫球对称时空呢?

时空由度量刻画,度量沿着一个矢量场不变,那么称矢量场为凯林(killing)场。凯林(killing)场是等度量群的生成元。如果时空存在 3 个凯林(killing)场,它们能生成 $SO(3)$ 群,就称时空是球对称的。

一个不转动不带电的星体外部的时空,是球对称。伯克霍夫定理表明,假如这个星体在球对称地震荡或者收缩,它外部的时空依然是球对称静态的。静态表明时空存在额外的类时凯林(killing)场。所以伯克霍夫定理可表示为:

真空爱因斯坦方程+ $SO(3)$ ===== 额外的类时凯林(killing)场。

这里先不讲伯克霍夫定理了,但对其窥一斑兴许也就能知全豹了。余下的问题就是,听说宇宙不是静态的,它在膨胀,如何理解?

(2)

已知了静态时空的定义,回头来看宇宙,宇宙是不是静态的,这是一个很重要而且迫切的问题,爱因斯坦曾经有一段时间,深受牛顿等人的影响,认为宇宙是静态的,或者说,爱因斯坦那样深刻的人,也曾经错误地认为,宇宙是一个存在,它亘古不变。

勒梅特(Lemaitre.Gorges)生于 1894 年,在中国来讲当时正好是中日甲午战争时代,他后来是比利时的天文学家和宇宙学家,提出了现代大爆炸理论。他的理论认为宇宙开始于一个小的原始“超原子”的灾变性爆炸。后来他的这个理论被伽莫夫所发展,大爆炸宇宙论的影响力空前高涨。第一次世界大战爆发了,年轻的勒梅特作为土木工程师在比利时军队中担任炮兵军官。战后,他进入神学院并在 1923 年接受神职,担任司铎,也就是一个神甫,故事也就在这个时候,要开始了,历史选择了他来拉开现代宇宙论的帷幕,作为一个神甫,他可能有一个考虑,就是要证明上帝创世。1923 年,也是美国加州维金森山天文台上的哈勃开始观察到星系红移的时刻。1923 年和 1924 年间,他在剑桥大学太阳物理实验室学习,后来又来到美国麻省理工学院学习,在那里他了解了美国天文学家哈勃的发现和 H.沙普利有关宇宙膨胀的研究。他在 1927 年任卢万大学天体物理学教授时,正式地提出宇宙大爆炸理论,用这一理论,哈勃发现的星系的退行可以在爱因斯坦广义相对论框架内得到解释。当时的爱因斯坦还是不相信勒梅特的理论,他认为勒梅特的物理不行。但是到了 1931 年,爱因斯坦已经确定知道是错了,于是他去了加州,会见了哈勃和勒梅特。会见结束了,爱因斯坦认为,这是他一生最愉悦的会面,他接受了勒梅特的大爆炸宇宙学说。爱因斯坦再次认为,自己在爱因斯坦方程里引进宇宙学常数,这是他一生最大的错误。

这已经是很久以前的事情了,现在看来,大爆炸宇宙模型在大方向上完全是正确的。而用来描述大爆炸之后的宇宙,最好的度量就是 RW 度量,当然因为富里德曼在 1922 年就从爱因斯坦方程里解出了非静态的宇宙,所以这个度量又被称为 FRW 度量。可是,当时的富里德曼把论文投出去的时候,爱因斯坦是审稿人,他很快地枪决了富里德曼的论文,富里德曼写信申辩,爱因斯坦就不再管了,于是,富里德曼差点被埋进了历史。FRW 度量描述我们的宇宙,这个度量把银河星系当作是尘埃。而星系之间的距离是在膨胀的,而至于星系内部,这种膨胀效应就是很小很小了。这因为这个原因,我们才没有感觉到太阳在渐渐地远离地球。星系之间的膨胀用哈勃定理描述,哈勃常数有一个几何解释。一个参考系也就是一个类时矢量场,矢量场有三个指标:膨胀,剪切,扭转,哈勃常数正是宇宙标准参考系的膨胀。这个类时矢量场的扭转为零,扭转为零的矢量场是超曲面正交的,这个超曲面,正是我们宇宙的空间部分。

第十七章 vaidya 解

(1)

印度人除了有钱德拉塞卡，艾虚卡 (ashtekar)，其他研究相对论比较著名的是 vaidya 和 sen，可能瑞查得符里也是印度人。可见印度这样的一个南亚次大陆的国家，能够出产优秀的相对论专家，尤其是艾虚卡已经成为 loop 量子引力的掌门人，干的事情影响潮流的动向，他早期研究经典相对论的时候，就大干类光无限远的结构，发现 bondi 四动量是那个空间的一个矢量。能产生这样的眼光，看事物的角度已经迥异于常人了。瑞查得符里 (Raychaudhuri) 方程，描述矢量场的性质，在证明奇点定理中有重要的作用，它描述矢量场的膨胀在时空中的变化情况。这个方程可以从关于微分几何的 Jacobi 场的测地偏离方程里得到。其中 Jacobi 场在共扼点对上是退化的。测地偏离方程描述弯曲流形上的测地线越走越近的情景，在物理看，类似于太阳的存在，使得自由下落的物体全走类时测地线，但这些测地线朝太阳汇聚。当然，通过观察测地偏离方程，可以发现，对于类光测地线，它们之间的测地偏离总是退化的。

瑞查得符里 (Raychaudhuri) 方程偶然也被称为纽曼-彭罗斯方程。纽曼和彭罗斯是相对论界的大家，一直是他们在领导潮流，相对论在他们那里变的非常数学，也就成了他们这些少数人的游戏。纽曼和彭罗斯发明了类光标架，用处很大，真正会拿类光标架算东西的人，往往不是池中之物。数学家陈省身的法国老师嘉当，他一辈子盛产公式，微分几何里有 2 个关于标架的公式，分别叫做嘉当第一结构方程(9)，嘉当第二结构方程 (10)。

$$T=de+e^A \quad (9)$$

$$F=dA+A^A \quad (10)$$

其中 T 表示扰率，F 表示曲率，e 是标架，而 A 是联络。公式具有非凡的美感，我上大学的时候，看见有人在黑板上写这样的公式，表情陶醉以至于显得盛气凌人。

kip 索恩的科普书被翻译到了国内，《黑洞和时间弯曲》，这本书详细地介绍了黑洞的来历和一些历史进程，他的书没有用那么多微分几何，可能是因为索恩是一个物理学家，专门爱找引力波那么的东西，而不是象彭罗斯那样的数学物理家，不关心实验，只喜欢数学，称为柏拉图主义者，或者理想主义者。在索恩的书里可以看到，1958 年，一个叫 Finkelstein 的博士后访问了伦敦，他刚找到了爱因斯坦方程的一个新的解，这个解可以覆盖史瓦西时空，并且在史瓦西半径处没有奇异，在方程 (7) 和 (8) 中， $r=2m$ 是它们这两个坐标系的分界处，也就是说， $r=2m$ 处史瓦西坐标系有奇点，但我们暂时不晓得这个奇点是不是物理的，还是仅仅是数学的，这样的情况也出现在 Dirac 磁单极中，假如你试图用一个坐标系来描述它，你会遇见 dirac 奇异弦，但这个奇异弦只是一个数学描述的问题，它不是物理的，也就是说，它不存在于真实的物理空间之中。正如一个人看见天上有彩虹，不表示在天上真的有人在拉开一块 7 色的布片。在 Finkelstein 坐标系中，发现史瓦西半径 $r=2m$ 处物体只能向里落去，是一个单向膜，是一个单向膜区的开端，但它本身不是物理上的奇点。这是 Finkelstein 很迷糊的，他当时不晓得，自己是处在一个什么样子的场合之中了，这是对黑洞认识的深入的一步。可以用下面的句子表达：

视界处没有物理奇点。

在他之后，1960 年，可能书美国的数学家 Kruskal 又找到了一个爱因斯坦方程的解，这个解不仅覆盖了 Finkelstein 时空，还覆盖了其他时空区，那就是白洞区域。这位 Kruskal 的名字就在相对论历史上流了下来，他好象有比较著名的工作，是集中在 KDV 方程的。这的确让世人大开了眼界，因为时空原来是那么的复杂，复杂到了让人既兴奋又害怕，每个人全变的象是新婚的少女。

丹麦王子哈姆雷特怀疑他的叔父谋杀了他的父王并占有他的母亲后，非常愤怒。他曾感叹道：

若非噩梦连连，

我即使被关在小小的果壳之中，

仍会自以为是无限空间之王。

这几百年前莎士比亚的笔下的感喟，但很适合于人们对宇宙的认识，宇宙是那么复杂，不但有黑洞，还有白洞，这是当初谁也没有能够想到的。最近，英国物理学家霍金从莎翁卷帙浩繁的著作中将这几行诗的寓意挑出，作为他的新科普书的书名。

其实这件事在微分几何里应该早就是熟知的，一个流形上坐标选得不好，就有可能有奇异，换用新的坐标，或者用不同的坐标卡去覆盖就可以

解决，可惜数学家们从未想到过怎么去解决史瓦西坐标的不足。但数学家马上证明 Kruskal 解是一个最大的时空，不能再扩展了。但这事情真是很不好办的，我上学的时候，想知道的事情就是史瓦西可以最大延拓到 Kruskal，那么 Kerr 呢？

莎玛是霍金的老师，他看到 Finkelstein 解的重要性，因此派出一个徒弟到伦敦听报告，这个人就是罗杰·彭罗斯。谁是最前沿的相对论专家？

后来，我列出来一张排名。他们是：彭罗斯，霍金，钱德拉塞卡，沃德，盖罗奇，……

物理学需要作秀吗？所以在这个排名中，把彭罗斯排在第一个，因为霍金已经吸引了很多眼球了。好象没人关心彭罗斯是一个怎么样的人，但好的物理学家是需要钱和尊敬的。因此取一个好名字也很重要，在超弦领域就有个好例子，比如“普林斯顿的弦乐四重奏”；物理学还需要形象代言人，比如霍金，再比如威腾。美国新闻周刊评出美国在世的 50 位最有影响的人物，威顿紧随麦当娜。可见威顿在美国已经是颇有知名度了，但在中国，知道威腾的就不多了，正如很多人不晓得谁是彭罗斯，原因是因为 Hawking 是个作秀的高手，懂得炒作自己，而彭罗斯和威腾全是很腼腆内向的人，他们不喜欢炒作，只喜欢默默耕耘，可能是数学太好，他们很严谨内敛。但历史会记得他们，他们两个人实在是太牛了，几乎和牛顿一样，具有数学物理的天才。

彭罗斯的数学很强，本来就是一个数学家，莎玛说：你数学那么好，来我们这个方向做一下相对论嘛。于是彭罗斯做起了相对论，他整个地颠覆了原来的一套爱因斯坦时代遗留下来的坐标语言。彭罗斯是一个过分的理想主义者，他发明了抽象指标，大大简化了张量的写法，他和林德勒合写的那本专著《旋量和时空》，简直是一本相对论的圣经。霍金的前妻写了一本霍金的传记，以一个女人的角度说事，她觉得彭罗斯太数学了，彭罗斯简直是为相对论而诞生的，彭罗斯的妻子简直成了相对论物理学的寡妇，彭罗斯的爱全化在时空里了。

史瓦西解在坐标原点处有奇异，那里的曲率是发散的，彭罗斯证明了在一些很弱的物理条件下，甚至不需要球对称这样的假设，这个奇点不可避免，特别是黑洞内部一定有奇点，这是伪黎曼几何中一个很强的定理，更重要的是奇点的物理意义让物理学家们和其他科学人员神往不已。彭罗斯提出了从旋转黑洞中提取能量，这简直是一个异想天开的想法，但深刻数学支持了他，那里我们可以找到 Killing-Yano 张量，然后得到 Killing 张量，再从 Killing 张量得到卡特运动常数，额外的运动常数，太美妙了，彭罗斯简直是在写诗。在 60 年代的尾巴上，很少有物理学家懂得拓扑，而彭罗斯发展出一套时空大尺度分析的拓扑学方法，这才是现代的广义相对论。

(2)

彭罗斯之后，莎玛在 1963 年收了一个学生，他就是霍金，刚上研究生的霍金，身体上的毛病已经很明显了，医生预言他活得不会太长久。莎玛常常带着学生去不列颠岛各处听报告，特别是有彭罗斯演讲的时候更是场场不拉，他的这位新学生对彭罗斯的一系列工作都非常感兴趣，并且他凭借自己的数学天才很快和彭罗斯成为合作伙伴。他们两个人，成为爱因斯坦之后不可动摇的明日之星。

(3)

如果说 Kruskal 解是史瓦西解的爸爸，那么史瓦西解还有一个貌似他兄弟的解，那就是 Vaidya

解。

假如把太阳外部当作真空，那么利用史瓦西解描述的时空，是稳态的，甚至是静态的。但真实的情况不是这样的，太阳外部存在光辐射，所以，人们需要求解的就不应该再是真空爱因斯坦方程。光辐射笼罩在太阳外面，金碧辉煌，这个辐射可能也就是经典的电磁场，但它可能是类光电磁场，能辐射到类光无限远。这与静电场是有区别的，研究静电场的时空，就是RN时空，RN时空是静态球对称的。1951年，Vaidya发表了一个文章，Nonstatic Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluids Radiating Energy。这个文章找到了一个非静态解，它和史瓦西解很象，但无法通过坐标系的转化变成史瓦西解。这个就是vaidya解，它是球对称的，但它不是真空解，所以Birkhoff定理在这个场合下是失效的。vaidya解描述了一个不是静态的时空，它甚至不是稳态的，而是动态的。这个动态时空显得比较复杂。但对于有强烈辐射的星体，这个解是很有意义的。对Rodichev能动张量的研究和解的Petrov分类表明，在这个解里，没有引力辐射。

但是，对Vaidya解的分析发现，这个解不能描述电磁辐射在引力场中的情景。这个光辐射不满足Maxwell方程。Bonnor和Vaidya得到了一个解，这个解是对Reissner-Nordstrom(RN)解的非静态推广。它能够描述带电的类光辐射流，但也不满足Maxwell方程，这个解一出现就被人批评了，因为在物理上，没有发现以光速运动的带电的粒子，所以这是一个非物理解。当然，也许日后人们能找到一个以光速运动的带电的粒子，那样的话，Bonnor一定会被重新提起来，说就是这位Bonnor先生，曾经在爱因斯坦场方程里发现了以光速运动的带电的粒子，这是理论物理的胜利，是天才的。

历史就是这样，进步是盲目的。

第十八章 爱因斯坦流形

(1)

一开始，爱因斯坦方程是不带有宇宙项的，但假如带有宇宙项，然后把这个方程放到最大对称的流形之上，就得到德西特宇宙，德西特宇宙满足 $R_{ab}=Cg_{ab}$ 。这在数学上，满足 $R_{ab}=Cg_{ab}$ 的流形就是爱因斯坦流形。也就是说，爱因斯坦流形的里奇张量和度量张量成比例，C是比例常数，这时候的度量 g_{ab} 就叫做爱因斯坦度量。微分几何学家钟情于爱因斯坦流形，到了不能自拔的地步。很重要的一点是，并不是任意流形上能够赋予爱因斯坦度量 g_{ab} ，这是因为背后有拓扑限制，正如在紧致流形上不一定能赋予洛仑茨度量，也就是不一定能成为一个“时空”。所以，把一个4维球面当作一个“时空”是一件值得嘲笑之事。在这个书里面，已经说过，“时空”要求其欧拉数为0，4维球面的欧拉数是2。

希钦(hitchin)和thorpe分别的工作对4维流形上爱因斯坦度量的存在给出了拓扑的限制，这个限制是一个不等式， $2x \geq 3t$ ，其中x是流形的欧拉数，t是流形的希自布鲁赫号差的绝对值。这个拓扑限制对几何学家来说是自然的，但要证明他们不是一件简单的事情。对于相对论来说，对于爱因斯坦流形的兴趣不是很大，相对论转而关心的是德西特空间。德西特做梦也不会想到，他自己的名字将在现在这个时代称为热门名词，据说新华词典要加进去一个词“包二奶”，在宇宙学的当代词典之中，德西特简直可以成为封皮。

爱丁顿是英国剑桥大学的天文学教授，又是皇家天文学会的学术秘书。1916年春天，从荷兰的莱顿大学寄来一份《广义相对论基础》单行本。皇家天文学会的通讯会员德西特教授，刚从爱因斯坦那里收到这篇论文，就把它寄到了剑桥。爱丁顿一眼就看出，这篇论文具有划时

代的意义。他马上开始研究广义相对论，同时请德西特写三篇介绍广义相对论的文章，发表在皇家天文学会的会刊上。这三篇文章，引起了英国科学界的广泛注意。德西特迅速地进

入了爱因斯坦开创的相对论领地，他在 1917 年就得到了爱因斯坦的方程带宇宙项的最大对称解，这个解就是著名的德西特宇宙。

爱因斯坦与 Grossman 合着的论文〈广义相对论和引力理论纲要〉发表后，相对论已经在语言上与微分几何很靠近了，因为格罗斯曼本身就是一个数学家。现在在相对论界还有一种年会，叫格罗斯曼会议。这应该就是为了说明相对论与数学界有很亲密的关系。1922 年的爱因斯坦访问了日本，他在京都演说，爱因斯坦说：

如果所有的系统都是等价的，那么欧氏几何就无法全然成立。但是舍几何而就物理，就好象失语的思考。我们在表达思想之前必须先找到语言，……。我突然发现高斯的曲面论正是解开这个奥秘的钥匙……，但我不知黎曼已经深刻地研究了几何的基础。

当时爱因斯坦找 Grossman 帮忙到图书馆查阅是否有一种几何可以处理爱因斯坦思索的问题，Grossman 第二天就回话给他，说确有如此的几何——黎曼几何。

黎曼几何实在是天才的绝唱，但在 1854 年他提出了对微分几何后，但是一直要到 1916 年爱因斯坦把微分几何引进广义相对论作为数学工具以后，这个绝唱才可以广为演奏，但这无非说明，好的工作可能被埋没，但天才之间能相互感应，这一点在阿贝尔和伽罗华之间也能看得出来。爱因斯坦和黎曼是数学物理的两位伟人，爱因斯坦在微分几何上留下了痕迹，比如爱因斯坦求和约定，以及爱因斯坦流形。当爱因斯坦在寻找广义相对论的数学语言时，竟然在半个世纪前就有黎曼的微分几何在等着他，他不得不感觉自己被美震撼，说出：

“……纯粹数学……，开启我们对自然现象的理解……”

数学在这个时候真的成为人们仰望深邃宇宙的透镜。

爱因斯坦流形天然的吸引了数学家，因为他有很美的性质，比如它的 $Z\text{-}ab$ 无迹里奇张量， $Z\text{-}ab=R\text{-}ab-1/4 R g\text{-}ab$ 天然退化。这在四维流形和塞伯格-威腾理论研究中是一个方便的地方。

荷兰天文学家德西特于 1917 年根据爱因斯坦方程式导出的一个解，其中包括了正的宇宙常数项。正的宇宙常数能产生负的压强，所以能产生与引力不一样的排斥力。1998 年，《科学》杂志排出 10 大科学进展，宇宙学的暗能量荣登榜首。这一点也不奇怪，因为这意味着以前的宇宙观要被完全改变，这样的改变不是相对论一家的事情，而是整个物理学的事情，粒子物理学家也不能袖手旁观。1997 年到 1998 年，天文学家在观察遥远的超新星爆发时得出结论：我们的宇宙正在加速膨胀，它是一个渐近德西特时空。

现在的宇宙，用 RW 度量来描述，假定它的空间是 3 球面，那么就属于 $K>0$ 的情况。它的空间部分拓扑是 3 球面。这个 3 球面具有最大对称性，就是所谓的宇宙学原理。而德西特时空的空间部分也是 3 球面，整体拓扑是 $S^3 \times R^1$ ，它不但空间上有最大对称性，而且整个时空具有最大对称性。具有最大对称性的流形，意思是说它上面有度量，上面存在凯林矢量场，凯林矢量场的个数必须是尽量地多，多到不能再多的程度，那就是最大对称了。数学表明，一个 n 维流形最多可以允许 $n(n+1)/2$ 个凯林矢量场。所以对德西特时空来说，它显然具有 10 个凯林矢量场。4 维的时空，具有最大对称性的只有 3 种，一种是德西特时空，一种是反德西特时空，最后一种就是闵氏时空。

反德西特时空是最受人们喜欢的，它好象一个年纪很青的姑娘，不晓得人们为什么喜欢她，但总有大量的人跑上来大显殷勤。1997 年，年轻的马德西纳 (J. Maldacena) 的发表了关于弦论和规范理论对偶的著名文章。Juan Maldacena (那时他还在哈佛大学) 首先推测，在反德西特时空上存在 ADS/CFT 对偶，这之后据说超弦生动了，因为这显示了美丽的全息原理是正确的。此后，美国新泽西州普林斯顿大学高级研究院的 Edward Witten 及普林斯顿大学的 Steven S. Gubser、Igor R. Klebanov 和 Alexander M. Polyakov 在多种情况下证实了该推测。现在已经确定在多种不同维度的时空上都存在着这样的全息原理。受到弦论的影响，膜宇宙理论出现了，丽莎兰多等人也是把宇宙放在 5 维反德西特时空里，至于为什么要放在反德西特

时空里，这可能是因为在反德西特时空带有宇宙项，可以约化到 4 维。那为什么不放在德西特时空呢？因为在反德西特时空可以让我们的宇宙膨胀起来。

带宇宙项的真空爱因斯坦方程是

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0$$

其中 Λ 是常数，但 R 在一般情景下不是常数，它是里奇标量，是一个函数，要它成为常数，需要流形是最大对称空间。德西特空间是最大对称的， R 成了常数，所以它就是一个爱因斯坦流形了。

2004 年的秋天，天空寂静，引力波在遥远的天边荡漾，很多人在寻找引力波，这个时候我上研究生一年级，刘辽教授做了一些研究，他试图研究在德西特时空背景之下没有引力波的存在，至于为什么要把德西特时空作为背景，是因为目前我们的观测宇宙非常接近于德西特时空。以前的人们研究引力波，总是在闵氏时空之上进行的。

很多相对论学家，引力学家，实验物理学家，全在拼命地寻找引力波，因为这确实是一件大事。但引力波迟迟没有被找到。1969 年的时候，weber 在 PRL 上发表文章，说他确认找到了引力波，他还说：只有死鱼才顺着潮流漂流。但他的实验不能被人重复，所以他找到的引力波是真是假，大家也很是怀疑，这就是生活。1978 年马上就到了，泰勒把他观测双星的结论公布于世，他发现按照引力辐射的规律，双星的轨道衰减可以被预言。他于是得到了诺贝尔奖，证书说：他的工作，对天文观测和双星系统有很深造诣，似乎可能大概也许这简直是引力波存在的明证。泰勒的工作在国内也引起了反响，有几个小组做了类似的计算。

今天，望远镜的观测距离，大概在 100 亿光年以上。在这个尺度上，星系团不再组成更大的团，而是在宇宙中均匀地分布着。这个均匀性是对我们有益的，它使得我们可以认为宇宙是光滑流形，否则的话，微分几何就不能再用了，假如那样的话，这何尝不是一种悲哀。而假如我们的宇宙对称性比 RW 宇宙还要高，带有正的宇宙常数，那么它很有可能就是德西特宇宙，那是一个爱因斯坦流形，数学家会很喜欢的。

以前爱因斯坦的狭义相对论，是在闵氏时空上建立的，也就是说，狭义相对论在闵氏时空的等度量群（ponicare 群）下不变。之后才有了广义相对论。但是，闵氏时空天生有它的两个兄弟，这两个兄弟在出生的时候就走散了，现在这两个兄弟已经找回来了，假如时光回到 1905 年，爱因斯坦在德西特空间上建立了狭义相对论，因为德西特空间具有 $so(1, 4)$ 的等度量群，所以说，要是建立 $so(1, 4)$ 不变的狭义相对论，那么，历史就要走向另外的岔道。

第十九章 贝肯斯坦

(1)

在阿拉伯世界有一个故事。

从前有一群飞蛾，它们很想知道火焰到底是什么。

第一个飞蛾绕着火焰飞了一群，它跑了回来，说，火焰很是明亮。

第二个飞蛾过去了，在火焰上烧了一下，它跑回来，说，火焰很烫。

第三个飞蛾过去了，它投身于火焰之中，它的身子在噼里啪啦地燃烧，它带来了一片璀璨的光辉。

第三个飞蛾明白了火焰到底是什么，但是它已经回不来了。

这是一个动人的故事，每一个想亲身体会黑洞的人，最终会象第三个飞蛾一样，在一个人进入黑洞的时候，他再也不能回来了。

贝肯斯坦出名的时候还是一个研究生，他出名的时候是在 1972 年，20 多岁，那时候霍金也还很年轻，30 岁，但霍金已经很有名气了，因为 1969 年彭罗斯证明了第一个奇性定理之后，霍金迅速地跑上去证明了第二个奇性定理，1970 年霍金和彭罗斯（R.Penrose）合作，证明了宇宙奇性定理：在极一般的条件下，按照广义相对论，宇宙大爆炸必然从一个奇异点开始。由此，他们共同获得 1988 年的沃尔夫物理奖。从霍金的经历看来，1959 年他 17 岁的他考入牛津大学学习物理，那个年纪要是在中国，他可能刚考进高中。霍金说：“由于物理学制约宇宙之行为，我想探究其底蕴，所以我投身物理学”。三年后的大学毕业考试，他获得一等成绩，由此，1962 年秋天他到剑桥读研究生，他想跟随的导师是霍伊尔，但没有成功，他跟上了莎玛，霍金将这视作灾难，他开始研究广义相对论和宇宙学，1965 年获博士学位。他化了三年时间就得到从一个学士变为一个博士，要是在中国，那一般要 6 年的漫长时间。在中国，以后研究黑洞的赵峥于 1943 年出生，与霍金只差一岁，两人几乎可能是中国和英国这两个国家黑洞研究的缩影，但当时 60 年代，在中国还没有机会研究黑洞，很多人的命运不为自己掌握。

60 年代和 70 年代的中国，真理属于人类，谬误属于时代。

(2)

贝肯斯坦的故事，与一种叫“熵”的东西有关系。

“熵”这个字非常漂亮，秀才读半边，一般人就是不认识也可能知道它的发音，“商”，——猜想它与除法有关系。但从字面上看，它与“火”有关系，或者说与温度有关系。没有错，熵 S 是能量 U 与温度 T 的商。

$S=U/T$

在微分几何里，是没有熵的，跟一个数学家谈论熵，很可能是对牛弹琴。崇尚几何的相对论学家，他的内心相当不服气，于是 penrose 有了他的外尔曲率猜想，他用外尔张量 C-abcd 的自我缩并构成的标量来定义熵密度，这个是非常几何的，当然别的人改进了他的定义。

wald 用非仿射参数来定义表面引力，也就是温度，也是很几何的。

数学是自然科学的基础，但它同时居然也堪称一门艺术。所以我分不清楚，数学道理是理科还是文科。我一直是把它当文科来学的。

但贝肯斯坦的黑洞熵公式里出现了 h，出现了 G，出现了 C，这说明黑洞熵是与量子力学有关系，也与相对论有关系，于是，就与量子引力有关系，从道理上说来，这是现代人类文明的最高成就了。

贝肯斯坦提出黑洞熵的那时候在美国普林斯顿大学，是惠勒的博士生。张爱玲说：“出名要趁早啊”。贝肯斯坦和霍金一样，出名很早，算是一个典范。他年轻的时候天高云淡，历史就给了他机会。他 1972 年关于黑洞熵的研究直到今天还是量子引力中最为重要的工作。他和霍金获得的黑洞熵公式不依赖于具体的量子引力理论，却是任何量子引力理论必须满足的，无论是弦论还是圈论，或者扭量理论。

(3)

那是在光辉的 1972 年。

1972 年美国副总统尼克松访问了红色中国，中国大陆上在进行轰轰烈烈的文化大革命，到处是红旗和虚妄的口号。1968 年，一个 20 岁的诗人食指写下这样的诗歌《相信未来》。

当蜘蛛网无情地查封了我的炉台，

当灰烬的余烟叹息着贫困的悲哀，

我依然固执地铺平失望的灰烬，
用美丽的雪花写下：相信未来。
当我的紫葡萄化为深秋的露水，
当我的鲜花依偎在别人的情怀，
我依然固执地用凝露的枯藤，
在凄凉的大地上写下：相信未来。
我要用手指那涌向天边的排浪，
我要用手掌那托住太阳的大海，
摇曳着曙光那枝温暖漂亮的笔杆，
用孩子的笔体写下：相信未来。
我之所以坚定地相信未来，
是我相信未来人们的眼睛——
她有拨开历史风尘的睫毛，
她有看透岁月篇章的瞳孔。
不管人们对于我们腐烂的皮肉，
那些迷途的惆怅，失败的苦痛，
是寄予感动的热泪，深切的同情，
还是给以轻蔑的微笑，辛辣的嘲讽。
我坚信人们对于我们的脊骨，
那无数次的探索、迷途、失败和成功，
一定会给予热情客观、公正的评定，
是的，我焦急地等待着他们的评定。
朋友，坚定地相信未来吧，
相信不屈不挠的努力，
相信战胜死亡的年青，
相信未来，热爱生命。

democracy is dying, science is ruined.

国内有一个批判相对论的小组，这个小组在文革过程中为了消灭掉爱因斯坦的理论，对相对论进行了研究。当时最出名政治大批判组可能是“**梁效**”。

1965年7月霍金一拿到博士学位就与简结婚。1970年他得靠四腿的架子才能走路。1972年他开始使用轮椅至今。1985年他因严重的肺炎做了气管切开手术，保住了生命，但从此失去声音。此后他依靠为他专门设计的一台语音合成器来说话，通过握在手上的开关控制计算机，一分钟最多可以造一个简单句子。虽然很艰难，但霍金却十分幽默而乐观地用这一系统进行语言交流，写论文和著作。

也许是他写文章不容易，所以读他写的文章，感觉非常干净，一般不给人乱糟糟的感觉。可能，1998年是霍金最后的创作时期，他写了很多文章，在 hep-th 查一下那是他文章是最多的一年，他在98年11月的文章是关于 ADS/CFT 对偶的，他研究了反德西特空间里的 Kerr 黑洞的热性质。2002年霍金大谈膜宇宙，2004年他在都柏林制造新闻，大谈黑洞辐射的信息守恒问题。黑洞辐射的信息守恒问题科普地说大体是这样的：

假如进入黑洞的是一个胖子，那么辐射出来的还是不是一个胖子，他会不会变成一个瘦子。在60年代，霍伊尔曾经在bbc的广播里每天晚上大讲相对论啊外星人啊，那在英国是一个科普的60年代，那些夜晚是美妙的，震撼人心的，不晓得霍金有没有听到广播，但1962年快要在牛津大学毕业的霍金，申请去剑桥大学攻读宇宙学博士学位，他心目中的导师就是霍伊尔。但是后来剑桥大学安排给他的导师是一位他从没有听说过的丹尼斯·莎玛（Denis

Sciama), 霍金将这视作灾难, 可见霍伊尔当时确实非常出名, 是当时相对论领域的一面旗帜。在中国, 缺少当年霍伊尔这样的讲座。

1970 年的霍金发现一个黑洞的动力学性质, 如果两颗黑洞碰撞并且合并成一颗单独的黑洞, 围绕形成黑洞的事件视界的面积比分别围绕原先两颗黑洞的事件视界的面积的和更大, 这相对于说 $1+2>3$, 这样的记号不能往死里理解, 正如歌德巴赫猜想不是真的要证明 $1+1=2$ 。霍金的这个发现就是面积不减定理, 它无疑暗示, 在一颗黑洞的事件视界面积和热力学的熵很类似。热力学第二定律说, 熵总是随时间而增加。如果把黑洞的面积理解成为熵的话, 那么这一切就很漂亮, 霍金的“面积定律”, 即稳态黑洞的“视界”的面积随时间永远不会缩减, 这似乎与热力学第二定律有异曲同工之妙。但黑洞动力学可以当作黑洞热力学吗??? 当时的霍金还没有这样的意识。

霍金认为既然稳态黑洞的绝对温度为零, 也就是说黑洞没有温度, 那它就不可能有熵, 所以他肯定黑洞的视界肯定与热力学的熵没有关系。但是贝肯斯坦 (Jacob Bekenstein) 有一天对惠勒教授说: “黑洞视界的面积不只是接近黑洞的熵——实际上就是黑洞的熵。因为……” 因为什么呢?

假如黑洞存在, 就在你的办公室里, 你把一杯开水倒进黑洞里, 那么杯子里的熵就减少了, 这是违背热力学第二定理的, 所以只能把黑洞和杯子看成一个整体, 熵没有减少, 而是跑到黑洞了去了!!

多么简单的想法啊, 但就是这个想法, 标记这量子引力时代的正式来临。

(4)

惠勒对贝肯斯坦的说: “你的想法有点大胆的疯狂, 但很有可能是对的, 那么你就拿出去发表吧!” 于是贝肯斯坦在 1973 年在《黑洞热力学》一文中正式发表了自己的观点。注意, 这个文章的题目看上去是千无古人的, 是关于黑洞的“热力学”, 不是动力学。这里面有一个在霍金看来很不爽的“热”字。

霍金严重地不相信, 他和其他两人立即在 1973 年 2 月的数学物理通讯上发表了经典的论文《黑洞力学中的四个定律》的论文, 反驳了贝肯斯坦。

这个文章思路很清楚, 是霍金那简洁明了风格的写照, 也算是广义相对论研究的集大成之作。他完整的写出了黑洞动力学的四个定理。情景完全类似于牛顿的三个运动定律。

黑洞动力学第零定律: 稳态黑洞的表面引力在视界上是常数。

黑洞动力学第一定律: 稳态轴对称黑洞质量 M , 事件视界面积 A , 表面引力 k , 角动量 J , 角速度 ω 满足一个关系 $dM=(k/8\pi)dA+\omega dJ$ 。

黑洞动力学第二定律: 事件视界面积在演化中不会减少。

黑洞动力学第三定律: 不可能通过有限次操作把黑洞表面引力降为零。

但是, 这四个定律, 其实越看越象是热力学定律。

第一定律一看就知道和热力学第一定律很相似, 也就是能量守恒定律, 只要把 k 看成温度, A 看成熵就行。第二定律是霍金之前的结果, 它不允许单个黑洞分裂成为两个, 而且要求两个黑洞碰到一起形成新的视界面积一定要大于原来面积的和。第三定律并没有严格的数学证明, 但是有些很强的证据, 它与从旋转黑洞里提取黑洞转动能的彭罗斯过程有关系, 彭罗斯过程可以降低表面引力, 但是当表面引力越来越低的时候, 彭罗斯过程的效率也越来越低, 趋于零。这在热力学里就是说, 绝对零度是不能达到的, 也就是能斯特定理。

但从这样的相似性里还不能断言, 这四个黑洞力学公式就是黑洞热力学的定律。因为黑洞是一个绝对的黑体, 它温度为 0, 什么样子的辐射它全能吸收, 所以它的熵要是存在, 那一定是无穷。所以霍金他们确定: 黑洞动力学和热力学定律的相似只是表面的。

贝肯斯坦后来回忆说: “在 1973 年那些日子里, 经常有人告诉我走错了路, 我只能从惠勒教授那儿得到安慰, 他说, ‘黑洞热力学是疯狂的, 但疯狂到了一定程度之后就会行得通。’”

开始霍金对初出茅庐的贝肯斯坦根本不放在眼里，但是，最后贝肯斯坦对了！

贝肯斯坦的直觉是正确的，但他同时是幸运的，因为他的想法其实不是最深刻的，甚至于有一点 naive。他要想服众，必须说明一件事情，那就是黑洞不是零温的，这样的话，黑洞才可能具有有限的熵。

1974 年初。

霍金把量子力学用到黑洞领域，他非常惊讶地发现，黑洞似乎以恒定的速率发射出粒子。

这一次，霍金简直成了神。

以前的经典广义相对论认为黑洞不能发射粒子。但当量子力学加进来的时候，黑洞正如同通常的热体那样产生和发射粒子，这热体的温度和黑洞的表面引力成比例并且和质量成反比，它的辐射谱是热谱，所以辐射不带有任何有意思的信息。但这使得贝肯斯坦关于黑洞具有有限的熵的论点站住了脚，黑洞以某个不为零的温度朝外辐射，黑洞有熵。

(5)

之后泊梭等人研究起熵界来。

罗维林在 1998 年用圈量子引力得到了黑洞熵的一个说明，他的证明技术过程非常清晰，大体上是对的，用的方法也是有意思的，居然是组合数学里的整数分拆和菲波那切数列这样的东西。我第一次读到他的这个文章，觉得数学很美丽，数学显然是技术科学的基础，但我没有想到的是，数学对我来说，一直能起到艺术的作用。罗维林的这篇文章被我当作是我见过的最喜欢的艺术品之一，圈量子引力关于黑洞熵的说明引得了世界性的注视。当然这也许是一场炒作。

第二十章 艾虚卡：素描

(1)

罗维林的书挂在网络上，后来就被剑桥大学出版社出版了。他的附录写了一个《历史》，讲量子引力的历史。

简单地摘录于下：

1967 年，penrose 开始了扭量研究。

1970 年，pauli 有一个观点，zumino 说，引力的量子化必然需要把引力看成是一个更广义的力的低能极限。

1971 年，thooft 和 veltman 决定去研究引力的重整化，相反，他们发现规范场是可以重整化的。

1986 年，penrose 猜想，波函数塌缩可能是量子引力的起因。

1987 年，格林，schwarz，和 witten 出版了他们在超弦上的那本专著。

1988 年，jacobson 和 smolin 在最基本的联络形式（基本变量是联络，和标架，标架做为导数）里找到了 WD 方程的 loop-like 解答。

但在江湖上，公认的量子引力的领导人当然是艾虚卡（ashtekar）。他看上去矮胖而黑，是一个印度人，所以说，印度的相对论是远比中国要强的。艾虚卡是 1976 年从芝加哥大学的博士毕业，导师是盖罗奇。盖罗奇在相对论的影响，集中在经典相对论领域，所以一开始，艾虚卡也专门做类光无限远上的 ADM 质量，后来他才改了方向，去做量子的引力。当然这任重道远。但雄心勃勃。他所做的事情，用最少的字来概括，那就是“从度量到联络”。

1974 年，他在美国芝加哥大学物理系获得博士学位。那时候的芝加哥大学物理系，因为钱德拉塞卡和盖罗奇，相对论已经是领导潮流了。后来温伯格写了一本《引力论和宇宙论》，是从粒子物理学家的角度来写的，基本上没有微分几何，芝加哥大学的沃德 1980 初期来中国武汉访问讲学，看见中国人多数看温伯格的，说：“温伯格的并不代表美国的广义相对论。”

沃德 1984 年的书《广义相对论》写的异常优美，和霍金和爱里斯 1973 年的书一样，非常几

何化。

艾虚卡推出了一个新的主义，——圈量子引力。他认为时空不再是光滑的。如果说黎曼几何刻画的时空是光滑的，好象一个油画，那么圈量子引力，也就是量子几何就是用粗线条画出来的一个素描。

但素描也可以惟妙惟肖。

时空是一块画布，素描的线条象蜘蛛网一样爬行，这就是时空的离散图景。penrose 在他的博士论文中创造的用画图来做 spinor 计算的方法，被利用起来了。所以，你如看到一个号称做量子引力的人在黑板上画蜘蛛网，那么很显然，他是懂量子引力的。不过 penrose 一生的创造，真是过分丰富，比如他 1950 年代，还是一个大四的学生，就在和霍伊尔吃饭或者聊天间发明了 penrose 图。青年时代的 penrose，套用曹操的语言，就是生子当如孙仲谋。他后来发明的扭量，也就是一对旋量，把时空与 CP2 联系起来，他的同学数学家阿提亚喜欢的不得了，一段时间内简直是不谈 twistor 不行。威腾用旋量证明正质量定理，现在也开始搞点 twistor。这莫非就是深受 penrose 影响，仿佛 twistor 是一种气质。但 twistor 一直没有流行起来，但它是量子引力大家族的长子。出生最早，至今未亡。

量子力学与广义相对论是曾经发现的两个尺度的科学，前者的尺度在原子世界，或者说 fermi 尺度，也就是 10 的负 15 次方米的尺度，后者是在太阳系或者银河系尺度的，当然也有人喜欢甚至说是整个宇宙尺度，假如这样，那么是把银河系当作一个质点，也就是宇宙学原理，但这似乎的确是很恐怖的，广义相对论是不是真能在这样的近似下使用？

如果直觉是可以相信的，我宁愿认为，这里面存在问题。我断言，广义相对论不能在宇宙尺度使用。为此，我写了一个短文

《宇宙学缺少玻尔》

张轩中

这也许是我这辈子最喜欢的文章。这个夏天，空气象桑拿一样蒸着人们。我的宿舍里，同学放着一本书，就是派依斯写的《粒子物理学历史》，里面讲的故事，相当的全面。玻尔有个数学家兄弟，他还曾是丹麦国足的守门员。这个派依斯，他当然还写过另外一本书，就是《上帝不可捉摸》——这本爱因斯坦的传记，一直在我家里，我很少看，是因为它不是最优美的。嗯——好，为什么要谈爱因斯坦，因为爱因斯坦在量子论里做了很大的贡献。为什么要谈玻尔，是因为玻尔相对论于爱因斯坦，他没有能在相对论做贡献。

是这样的，玻尔为什么出名？？

世界是一个现象。不能离开观察者，或者说人。所以量子力学天生是观察者依赖的。相对论正好相反，我引以自豪的就是我学到的相对论，那天生是不依赖观察者（坐标系）的。这就是整体微分几何。

但学相对论的我，一直信仰一个道理，那就是，这个世界本质上是一个观察者依赖的量子世界。

世界有 3 个尺度。

观察者处于第 2 个尺度。

第一个是原子的尺度，第二个是人类的尺度，第三个是宇宙的尺度。

在第一个尺度与第二个尺度之间，有一个桥梁，联系起来了，那就是玻尔的对应原理，也就是玻尔的历史贡献。但是，因为宇宙学缺少玻尔的工作，使得我们现在的理论，缺少了关键的一环，当然这也是历史的条件限制，那就是，在第二个是人类的尺度和第三个是宇宙的尺度之间，存在什么样的对应原理？？？

我们需要宇宙学里的玻尔，而玻尔迟迟不能出现，我们需要象等待戈多一样，等待玻尔。

(3)

20 世纪之初的发现，影响到后来的数 10 年发展。原因是因为量子力学和相对论是基础物理学的躯干。进一步来说，在理论适用的范围内，它们都可以非常非常好地描述物理现象。量子电动力学的就象是一个神话，我们知道兰姆位移的精确实验。广义相对论现在在更高的精度里与实验吻合。可惜这 2 个理论给我们的是全然不同的物理图景。广义相对论的世界是精细的几何学的。而量子力学的世界却是为内在的不确定性与几率所控制。这个原因很简单，因为 h 尺度碰巧是如此之小所以我们要研究这个尺度的所谓量子引力必然需要有点精神分裂症的脱俗气质，需要经常看到幻觉。

一个人的研究的方向若是量子引力，他一定属于 2 种人，第一种人天赋异禀，第二种人好高骛（鹜）远。有一句笑话是：每周一三五搞量子，每二四六搞引力，每礼拜天精神分裂一次。还有一个版本的最后一句是：周日向上帝祈祷，让这两个理论统一起来。

在讨论宇宙与天文现象的时候用广义相对论；而在讨论亚原子世界时候转向量子力学。我们过去生命告诉我们：这 2 个理论仅可能是一个更大的单一理论的 2 个侧面与近似。这个更大的单一理论的基础当然是广义相对论的基础加上量子力学的基础。这个更大的单一的理论就是我们要寻觅的量子引力论。当然，量子力学的基础其实不需要超对称，而广义相对论也不需要额外维，所以圈理论抛弃这样的假设，使得自己迥异于超弦理论。

任重道远。

首先，量子引力必须能恰当地描述已知世界，这就是要用充分好的半经典近似。这个方面韩慕辛和我勉强做过一下子，但还没有写出文章来，也就是用量子力学类似的相干态来做，当然这背后的道理，需要考证。其次量子引力要在 2 个理论的共同势力范围寻求一致。

对大多数在工作的科学家来说，量子力学的基本观点他们是相当熟悉的。拿 Maxwell 的理论来说。在经典的理论是重要的目标是得到 maxwell 方程的解，知道时空各点的电磁场强度。这些电磁场通过双曲方程传播。能动张量的通量是光滑场的积分等等。当量子力学进入 maxwell 理论以后，假如电磁场还是经典的，我们就是在做郎（朗）道能级，假如连电磁场也被量子化了，那我们需要有激进的修正。电场与磁场全成了算符，是算符的全受到 heisenberg 不确定原理的管辖。所以它们的数值不可能在瞬间被指定。场激发意味着粒子态——光子。传播是通过 schrodinger 方程在 fock 空间里进行的。量子的电磁场的能量是光量子的总和。

对广义相对论我们也希望一个相似的量子力学描述，把几何描述抛出历史轨道。为什么在很多时候学物理的人不需要懂广义相对论，是因为我们的物理的相互作用，总是局域的，也就是不需要考虑整个时空的弯曲。但这个时候，我们要听一下相对论的意见。

相反，广义相对论也有自己的意见。它要求时空存在微分同胚的不变性，要求那里没有作为背景的几何结构。在基本粒子的相互作用过程之中，引力的作用根本不需要考虑，基本粒子的相互作用象泰坦尼克号油轮与冰山相互碰撞，人们不需要考虑空气的影响——尽管空气无处不在。于是，粒子物理学家是在平坦空间做事情，他们只关心庞加莱群；而广义相对论学家看到的是一个弯曲的时空，他们也关心一个群，这个群就是四维流形的微分同胚变换群。在相对论中没有标准的时空来给量子力学的赋予时间的观点，这方面很深刻，也就是说在相对论里，根本没有天然的时间，所以一切物理的象 schrodinger 方程等等动力学方程，全是不自然的。因为原则上我们在一个时空之中，没有天然的时间可以区分时间前后。在小尺度上没有时空的因果结构，我们拿什么来使用时间，又如何使用 schrodinger 方程。

一般的场方程，全是 poincare 群的表示对象，这个群有我们比较熟悉的 casimir 算符，质量跟自旋。假如没有 poincare 群，我们面临一个微分同胚群，会怎么样。

广义相对论还给量子场论一个墓碑，它抛弃了量子力学的 Minkowski 时空背景。

我特意地要集中你们的注意力来说这样一事儿，那就是量子引力目前最前沿的东西。这个比

散射振幅更麻烦的东西正在向我们扑来，要跟我们搏斗。

在广义相对论里面，爱因斯坦告诉我们引力与时空几何是同气连枝的。在那里几何是一个具有一定自由度的动力学的物理的实体。因此，任何诚恳的量子引力必须是时空几何的量子理论。

好了，量子引力或者量子几何到底是啥玩意？如果有这样一个物理实体，比如说这张你正在看的纸，它有内部组分吗？组分是什么东西呢？这些组分是如何在奔到一起来形成这样的一张纸的？在经典引力的奇点形成之前可能会发生什么？用什么理论来代替经典引力？我们在宏观上所觉察到的光滑几何是不是一种“平均场”效果？在远离平均场效果的时候我们需要用什么样的物理概念与数学技术？

弯曲时空的量子场论与黑洞的热力学有了非常让人兴奋的相互影响。这个是很迷人的成绩，真的，很多人相信这样的相互影响是非常基本的东西。它们都可以从量子引力中得到吗？在经典广义相对论中关于黑洞的观念是依赖于整体微分几何的。想知道给定一组初始数值会不会导致黑洞的出现，这就是象 yau 这样的人喜欢考虑的数学问题了。

回头来看，早在 1930 年，很多志士如 dirac 发现了统一量子力学与相对论的重要意义。在最近的 30 年里很多人苦心孤诣付诸实践。但此黑暗隧道尽头的灯光依然暗淡。什么原因使得这件事情如此困难？为什么在可以量子化其他相互作用的方法在引力那里失去效果？最主要的困难，当时是我们没有基于量子引力的实验数据。再则，我们发现广义相对论是一个自我矛盾的反常体而似乎不是一个完美的规则（假定广义相对论正确，可以导致奇点存在，奇点存在，在奇点处，广义相对论自身失效。）在量子引力中，我们试图从 fermi 原子尺度一下跳到 planck 尺度。我们希望在这两个尺度之间没有新的未知领域，或者新的物理。当然我们只是希望而已。假如在这个尺度间隙还有新的物理规律，那事情显得很让人绝望，但绝望实际上很难免。本质上量子引力就是 7 个字，”过尽千帆皆不是“。

第 21 章 克尔解

(1)

如果有一天，你可以象钱德拉塞卡一样，坐在从印度到英伦的邮轮之上，在夕阳的红晕之下远行，带上一本钱德拉的书，在漫漫旅途里欣赏海鸥在天边飞行，你也许会惊叹，世界竟然有如此美妙的风景，你也许同时会感喟，每一只海鸥是死去水手的灵魂。翻开钱德拉塞卡的书，《黑洞的数学》前面的一页里印着两张照片。其中一张照片是史瓦西的，另外一张就是克尔的。如果问 1963 年以后的相对论工作者，从 1916 年广义相对论诞生到 1963 年，最激动人心的事件是什么？？？答案当然是克尔解的发现。虽然爱因斯坦曾经说过，想象力最重要。想象力在某些时候比知识更加重要，知识在大多数时候比技巧要重要，但 1963 年之前的相对论研究，已经严重缺乏想象力了，同时寻找爱因斯坦方程的轴对称解答，需要的是专业知识和高超的数学技巧。

1963 年有一个相对论专家和天体物理学家的交流会，这个交流会共七天，每天从早上 8:30 到凌晨 2:00，Kerr 是新西兰数学家，他在那里做了一个 10 分钟的演讲，他一上台，天文学家 and 天体物理学家们就没剩几个，剩下的，也都在小声讨论自己的话题，还有的就是在打瞌睡。Kerr 的工作无非是报告了自己发现的一个新的爱因斯坦方程的解答。这是三十年来众人跌倒的地方。Kerr 的解，描述了黑洞作为一个定向陀螺如何带动周围的时空旋转。这的确是相对论历史上少有的真正意义上的进步，这个解是稳态，不是静态的，也就是说，在 Kerr 解中，你无法找到一个类时的 killing 场，它是超曲面正交的。你如果找到一个类时的矢量场，它在 Kerr 时空之中，它能够超曲面正交，那么很抱歉，它一定不是 killing 场。所以，克尔时空有一个致命的特点，那就是旋转星球的外部时空，不可避免地被星体所拉动，这看上去，非常象一个旋涡。

因为大多数的星体总是在转动，于是就有角动量，这样的时空，假如转动不能忽视的话，那么它的解显然不能用史瓦西解来研究。所以，克尔解的现实意义是巨大的。

在这个解里，因为存在着相互对易的 2 个凯林矢量场，这 2 个矢量场是等度量群的生成元。所以说，它的等度量群是一个阿贝尔李群。

自由落体运动是伽利略最喜欢的，在相对论中，它同样是受到所有人的青睐。虽然一般的自由粒子只要一带有质量，必然引起周围时空的扰动。但这个扰动的因素是可以忽略的，于是我们考虑在固定背景之下的测地线方程。当然这显然是物理的，但不是数学的。如果万事追求拉普拉斯在行政机关当官时候的无穷小精神，那么这个粒子对时空的扰动是要考虑进去的。这件事情盖罗奇写过一篇文章，无非是把一个世界线看成一个世界管，然后做一些数学的处理，但完全有吃力但不讨好的嫌疑，因为这对相对论家们来说，是太物理了。当考虑在 $kerr$ 时空外部有一个粒子做自由落体运动，也就是走测地线的时候，人们已经不在乎这个粒子对时空的扰动，我们如何来解出这个测地线。我们需要运动常数来列出方程。对于 $kerr$ 时空来讲，最重要的性质之一在它那里存在一个 $kill$

张量。这个 $kill$ 张量是一个 $(0, 2)$ 型的张量。它的存在，将使得 $kerr$ 时空中的自由下落粒子，沿着这个粒子的世界线看，它的能量是运动常数，它的角动量是运动常数，它的质量是运动常数，还有一个运动常数就是这个 $kill$

张量场与粒子的四速的平方相互缩并得到的， $penrose$ 称之为 $carter$ 常数。卡特是相对论研究中的一个著名人物，他和罗宾逊等人研究 $kerr$ 黑洞，非常入迷，后来他们发现了比较著名的黑洞无毛定理：渐近平坦的稳态黑洞必然是克尔——纽曼黑洞。也就是说，稳态的黑洞，只可能有三个自由参数，一个是质量，一个是电荷，一个是角动量。罗宾逊是英国派的绅士，他在彭罗斯的扭量刚出来的时候，起过历史作用。但他和卡特的工作无非是一系列数学，比如说轴对称黑洞必然是稳态的，但一个巨大的数学问题是稳态黑洞是不是一定是轴对称的。所以，黑洞无毛定理是一个著名的结论。当然，前提是渐近平坦并且是稳态黑洞，对于一个非常一般的黑洞，这个定理是不成立的。这似乎很好理解，对于一个一点对称性也没有的黑洞，它显然能带有很大的任意性，也就是说，它可以有许多毛。于是有的文章考虑带非阿贝尔场的黑洞，各式各样的黑洞大家全考虑了。所有这些事情，全部的基础是克尔对旋转黑洞的解。所以新西兰也是小国，但有好的数学家。一个好的数学家，能够为很多数学家提供饭碗。

无毛定理，英文是“NO hair theorem”。这不表示黑洞是一个光头，但确实表示，黑洞是世界上最简单的事物。按照中国人的逻辑，也许黑洞无毛定理最好改名叫“三毛定理”，因为稳态黑洞正好有三根毛：质量，电荷，角动量。

(2)

具有电荷的旋转黑洞非常象一个质子，但它必然比质子大，因为形成黑洞有一个质量下限，那就是奥本海默质量下限，大概是 2 到 3 个太阳质量。也就是说，在经典广义相对论中，不能把质子想象成为一个黑洞，因为两者在尺度上，是具有天壤之别。但带有电荷的旋转黑洞是最普遍的，这就是克尔——纽曼黑洞。

克尔——纽曼黑洞是最普遍的黑洞，也就是说，在星体旋转的时候，它的外部不是真空的，而是有电磁场。这个时候，叫做电磁真空，

时空的标量曲率是零，但时空的黎曼曲率不是零。克尔——纽曼时空的标量曲率为零，原因当然是因为电磁场是光子场，光子是零质量的。所以无质量场的能动张量总是没有迹的。能动张量无迹也是这个场具有共形对称性的条件。共形对称性是比较宽松一点的要求，它不一定要要求矢量保长，而只要求矢量与矢量之间的夹角能在这个变换下保持，所以

又叫保角变换。一个场由一个能动张量刻画，如果时空存在一个凯林矢量场，那么这个能动张量和某个类时矢量场缩并可以得到一个矢量场，它可以看做是一个流，假如要求这个流是协变守恒的，我们会发现，这个类时矢量场必然是一个凯林场。如果这个类时矢量场是共形凯林的，那么只要能动张量是无迹的，刚才构造的流就依然是协变守恒的。协变守恒流的存在不依赖于观察者，也就是说与参考系是没有关系的，于是显得很优美，所以假如在广义相对论的框架下来看经典场，甚至于看量子场，是非常优雅的。盖罗奇在 1970 年代在芝加哥大学给学生讲量子场论，后来流传出一本讲义来《special topic on particle physics》。这本讲义写得很优美，对于喜欢几何语言的相对论研究生，这本讲义简直就是粒子物理的研究生眼睛里的温伯格的《引力论和宇宙论》。

克尔——纽曼黑洞具有电荷和质量，但这里面还有无穷的奥秘，一个很奇怪的事情是出现了，假如这个黑洞的电荷或者角动量远远大于它的质量，那么黑洞的奇点就要裸露出来。假如真的存在这样的黑洞，那么对于人类来说是很危险的，因果性被很严重的破坏。因果性是我们这个人类世界合理的基础。因为裸露的奇点它要吞噬周围的物质，是没有预兆的。这有点象热带丛林沼泽里的鳄鱼，突兀地吞噬前来戏水的羚羊。单说电荷，在直观上，我们似乎没有能力要求一个黑洞的电荷不能远远大于它的质量。这就是一个荷质比的问题，对于基本粒子，我们可以用磁场来研究运动的带电粒子的荷质比，可以想象，一个粒子的荷质比越大，它在磁场中走的圆周的曲率也就越大。这个是简单的高中物理就可以解释的，也就是洛仑次力提供粒子的向心力，那么荷质比正比于圆周的曲率。但对于黑洞来说，这个荷质比似乎要满足一定的限制，你不能太大，太大了，黑洞的奇点就裸露出来了。

裸奇点看来是一个糟糕的事情，因为这样的奇点的可以突然吞噬对黑洞外的事物。设想一下，你正在看的一本书，突然消失。这似乎很诡异，但裸的奇点，它的外面没有视界包裹，象一个裸女没有衣服，让相对论专家对它既爱又怕。彭罗斯猜测，裸露的奇点不应该在自然界出现。这就是著名的宇宙监督假设：上帝禁止裸奇点。

对于微分几何学家来说，彭罗斯的猜测无非是一组艰深的微分方程。谁能够解决这个猜测，谁就能够名垂青史。但彭罗斯本人也无法解决这个问题，所以这无疑是一个非常困难的题目。克尔——纽曼时空是最普遍的时空，当我们考虑一个有质量的粒子在这个时空背景里自由下落的时候。情景是非常有意思的，因为这个粒子象是一个石头是在进入一个旋涡，而不是进入一个平静的水面。最简单的和谐出现在牛顿引力里，我们动能和重力势能之和是总能量 $E=mv^2/2$

- GMm/r 如果

$E < 0$ ， 轨道是椭圆

$E = 0$ ， 轨道是抛物线

$E > 0$ ， 轨道是双曲线

在牛顿引力里，这个空间轨迹是在平面内的，它们全是一个平面截取一对圆锥以后的结果。束缚的空间轨道椭圆是封闭的，这背后是因为龙格—楞次矢量的存在，这个矢量在相对论中可以被认为就是卡特的凯林张量。

从最普遍的广义相对论角度来看，这个粒子的世界线当然是克尔——纽曼黑洞的测地线，当然它对应有一组沿着这个世界线的不变的运动常数。如果这个测地线要被唯一确定下来，我们至少需要四个运动常数。

既然广义相对论中没有天然的时间概念，那么我们如何才能说明一个粒子的运动常数，或者

说守恒量。这个问题的答案是，我们要求存在一个量 A ， A 如果沿着粒子的世界线的仿射参数求微分保持不变，那么我们称 A 为运动常数。我们知道，在非相对论中，一个自由粒子的哈密顿量是它的动能。也就是它三动量的平方。我们是把广义相对论中一个自由粒子的哈密顿量当作是它的静止质量的平方（三动量的平方减能量），这个运动常数可以看做是度量张量作为一个凯林张量产生的。这是一个广义相对论性的哈密顿量。在广义相对论中，一个自由粒子的哈密顿量是什么？？？我们称之为世界线哈密顿。任何一个相空间上的函数，对世界线仿射参数或者说固有时的变化，等于这个函数与世界线哈密顿的泊松括号。

在克尔—纽曼时空之中，粒子的运动常数或者说首次积分是粒子的能量，粒子的角动量和粒子的质量（其实是粒子质量的平方）。这样就有了三个运动常数，如果只有这三个运动常数，我们要确定粒子的轨道，必须做特殊的处理，就是让粒子在赤道平面内运动。但对于一般的粒子，这个条件是无法满足的，于是卡特开始了他的重要工作。

卡特是相对论领域的英雄人物之一。1973 年他和巴丁和霍金的文章《黑洞动力学的四个定律》完全的刻画了克尔黑洞各个参数之间的联系。也就是说，在克尔黑洞的三个毛之间，是有相互的内在联系的。而早在 1968 年卡特对克尔时空的深入研究得到结论，发现这个时空中存在着一个特殊的凯林张量。所谓凯林张量无非是凯林矢量的推广。因为用凯林矢量和粒子的四速缩并我们可以得到运动常数。用凯林张量与粒子的四速缩并同样得到运动常数。在克尔——纽曼时空存在的凯林张量使得卡特得到了第四个运动常数，这使得在这个时空中的测地线是可积的。卡特的文章发表在德国的《数学物理通讯》上，时间是 1968 年，这个时候中国刚刚进入文化大革命，毛泽东天安门接见百万的红卫兵，显然在中国没有人可以理解卡特的文章。

彭罗斯把第四个运动常数称为卡特运动常数。他当然能理解卡特的工作，1972 年他本人和 hughston, p.sommers 以及 walker 合作，用旋量分析的方法，重新证明了卡特的结论。彭罗斯的杰出才能得到了再一次的验证。所以彭罗斯是旋量分析的一代宗师，而中国在那个时代，恰恰缺少人能够跟上彭罗斯的步伐。

彭罗斯从大学四年级开始就对相对论做出贡献，那时候他得到彭罗斯图。在他的博士论文里他用 loop 图来表示旋量计算，后来被 loop 量子引力的一派所借鉴。他证明了奇性定理，极其早的和数学家们一起推动扭量计划，他提出宇宙监督猜测，有彭罗斯质量的定义……

在爱因斯坦时代黄昏的余晖下，最凄美的画面是彭罗斯走在牛津大学的林荫道上，慢慢老去……

22 章 外尔张量

(1)

相对论的发展当然吸引很多人。在 20 世纪 20 年代，量子力学的诞生，是物理学的又一场革命。哥廷根学派为量子力学提供了数学框架。冯·诺依曼的《量子力学的数学基础》，外尔的《群论与量子力学》成为一个时期的经典著作。以外尔对量子力学的理解，他完全懂得暧昧是最好的男女关系。但从外尔与薛定格的老婆的暧昧关系看来，数学家外尔与物理学交往确实很密切。这可能是三个人的《情难枕》。

词曰：

如果一切靠缘份
何必痴心爱着一个人
最怕藕断丝连难舍难分
多少黎明又黄昏
就算是不再流伤心泪
还有魂萦梦牵的深夜
那些欲走还留一往情深
都已无从悔恨
早知道爱会这样伤人
情会如此难枕
当初何必太认真
早明白梦里不能长久
相思不如回头
如今何必怨离分
除非是当作游戏一场
红尘任它凄凉
谁能断了这情份
除非把真心放在一旁
今生随缘聚散
无怨无悔有几人

外尔曾经引进了外尔变换。但被爱因斯坦否决，因为根据外尔的思想，一个粒子依赖于它过去的历史。但他的思想后来被杨振宁等人借鉴，发展出规范场论。狄拉克在方程里得到了正电荷的粒子，以为应该是质子，外尔说，根据群论，你这个粒子应该与电子有相同的质量，不可能是质子，于是狄拉克灵感迸发：“那就让它是正电子吧”。

从历史发展的轨迹来看，很多事情实际上可以有少数几个人来推动，所以这是一种英雄史观。外尔在微分几何上的业绩，导致一个在相对论中起着重要作用的张量诞生。在 20 世纪 20 年代，在哥廷根大学，克莱因已经退休，希尔伯特也已老了。闵可夫斯基因病早在 1909 年去世。但是，新人不断在成长。希尔伯特的继承人是 H. 外尔(Weyl, 1885 — 1955)。他是数学物理上广泛的天才，类似于彭加勒，他创立的学科数不胜数，例如，数论中的一致分布理论、黎曼曲面、微分流形、算子谱论、偏微分方程、胞腔概念、规范理论、李群表示等等。

一个相对论问题，可以用来引进外尔张量：“在真空之中，还有没有时空弯曲？”

答案当然是在于时空的外尔张量是否退化。

因为黎曼曲率可以做分解。

彭罗斯把这分解写成：

黎曼=里奇+外尔

里奇是意大利数学家，他是张量分析的鼻祖。

一般说来，从相对论的角度大体可以把微分几何分成以下四块：

1. 张量场
2. 微分形式
3. 旋量分析
4. 偏微分方程

里奇在第一块领域做出重要的业绩。而第二块领域的鼻祖是嘉当，陈省身。第三块领域的鼻祖当然就是彭罗斯，虽然欧拉曾经在三维空间引进旋量，而嘉当在四维时空引进了旋量。第四块领域，当然是首推 s.t.yau。

里奇张量是黎曼张量中的含迹部分。而外尔张量则为黎曼张量中的不含迹部分。

两类张量的特殊情景同样引起数学物理的交织：

a, 里奇平坦。

b, 外尔平坦，或者说共形平坦。

在超弦理论里，需要额外维度的空间，威腾和斯特罗明格等人得到了这个空间，就是卡拉比-yau 空间。在这个空间之上，存在一个凯林旋量，可以证明是里奇平坦的。里奇平坦不是黎曼平坦，后者过分平坦，会有非常多的凯林旋量。（见《超弦通俗演义》）

到底什么是里奇张量，什么叫外尔张量呢？？？

在爱因斯坦电梯里，电梯朝恒星下落，如果把电梯看成一个点，那它当然是自由落体。当电梯的尺度不是一个点的时候，引力的全部效应会体现出来。

电梯里的一个球面，会被引力的潮汐力拉成一个椭球面。这个就是外尔张量在起作用了。所以说，里奇张量在引力中使得物体朝引力源下落，而外尔张量使得物体被拉伸，或者扭曲——这个就是潮汐力，它不是牛顿引力那样的平方反比的，而是立方反比的。当然这是在四维时空之中的情景，假如在二维或者三维时空，外尔张量是不存在的，这意味着在一个低维的世界，潮涨潮落这样的涨落情景是很难看到的。

宋朝柳永曾经在杭州看到钱塘江的潮水，后来在内心里创作了一个词牌《望海潮》，他写下千古绝唱，描摹四维时空之中的人间美景：“东南形胜，三吴都会，钱塘自古繁华。烟柳画桥，参差十万人家。云树绕堤沙。怒涛卷霜雪，天堑无涯……”

(2)

对黎曼流形，分类是很有意思的。譬如在中国曾经把人群分成工人，农民，知识分子，当然流氓无产者不构成一个分类，这种特殊情景另当别论。对于黎曼流形，它上面已经有度量，所以不是微分流形，唐纳森的那套类似于“六脉神剑”的手法还用不上，（注 1 六脉神剑出自中国武侠小说《天龙八部》，著者金庸，前面提到钱塘江潮水，观潮胜地，首选金庸故乡——浙江海宁）我们只用一些基本的手法，比如等度量群的分类，和乐群的分类。还有一个在相对论中最常见的，就是对外尔张量的 petrov 分类。petrov 是俄国人，他在 1954 年左右开始考虑外尔张量或者黎曼张量的代数分类，到 1966 年，思路已经完全成熟。他显然是俄国人中研究相对论而在历史留名的少数人了。当然其他的俄国人就是郎道等人，他们写的《经典场论》被认为是一代经典。郎道研究相对论的时候，有个中国人跟他一起做研究，他就是段一士。段一士被郎道认为是无比聪明的中国青年。这是几十年前的事情了。段一士对广义相对论的能量问题，有一个自己的表述，被称为“段一士能量表述”。

petrov 也是最早几个认识到 1920 年代伯克霍夫的定理有缺陷的人之一。他在 1963 年指出这个错误，离 Birkhoff 证明那个定理已经 40 年了，

而 Birkhoff 好象是 1944 年就去世了，他活着的时候未能看到自己的错误被指出，不失为一件快慰的事情。正如牛顿活着的时候，没有一个叫爱因斯坦的人跑过去跟他说：“哥们，你这个 $F=ma$ ，那么我用力推一个小球，小球不断加速，最后的速度应该是无限大，但无限大不是物理的，你怎么解释你的理论？”倘若那样，牛顿一定会很慌，除非他相信，无限大也是物理的。牛顿在做最速降线的时候的那种气质，是非凡的，但他活着的时候没有遇见爱因

斯坦来指出他的错误，保全了他的气质。

什么是外尔张量 W_{abcd} 的代数分类呢？

这类似于矩阵的代数分类。

给定一个矩阵 M_{ab} ，再给定矢量空间的基，那当然可以把这个矩阵写出来。这个矩阵无论怎么复杂，我们可以讨论它的本征矢量。当然本征矢量很有可能是重复的，也可能找不到它的本征矢量。

对于外尔张量 W_{abcd} ，情景很类似，这个时候，petrov 只考虑它的类光本征矢量。当然这四个类光本征矢量也有可能是有重复的，或者找不到这样的类光本征矢量，于是得到 petrov 的分类。以下的数字 i 表示 i 次重复的本征矢量。

(1, 1, 1, 1)

(2, 1, 1)

(3, 1)

(2, 2)

(4)

(退化)

以上五种情景就是外尔张量的分类。对组合数学熟悉的人也许会惊讶，这不是正是整数 4 的无序分拆吗？其中第一类叫 I 型，最后一类叫 O 型。有了这样的数学，人们才能很好的处理引力辐射问题……

(3)

一般的，在流形之上的拉普拉斯方程把人们带向指标定理。如果我们要求拉普拉斯算子在流形上是共形不变的，我们必须加上 $R/6$ 这一项。其中 R 是标量曲率。这就是弯曲时空上共形不变的场方程。

如果时空是里奇平坦的，那么它可能是代数特殊的。一真空引力场称为代数上特殊的，即外尔张量不是 I 型或 O 型的。

Goldberg-sachs 有一个定理说的是非 O 型真空引力场是代数特殊的充要条件为它的主类光方向所定出的类光测地线是 shear-free 的。

这个就是 goldberg-sachs 定理。

什么叫 shear? 这个矢量场的一个剪切的程度……

另外，Levi-Civita 联络是 Levi-Civita 在 1917 年提出的，但那时候只用于 n 维 Euclidean space 中的超曲面，也是外尔在 1918 年澄清这个概念并把他推广到流形之上。所以，对于联络理论，外尔起到一个承前启后的作用。这个意义上，艾虚卡应该忠心感谢外尔。

“流形”这一概念虽然 Hilbert 在 1901 年有过比较清晰的定义，但是真正的定义也是外尔在 1913 年的《论 Riemann 面》中给出的。

这也是现代流形的普遍定义。外尔在生活中的爱恨似乎已经远去，但在这个言必称流形的数学物理时代，暮色深沉之中，外尔在相对论中的光辉印象矗立在宇宙的山峰。

第 23 章 从可见光到电磁张量

(1)

窗户外面阳光明媚，若你静坐在黑暗的房间里。一束光从窗户的罅隙里进入房间，你陷入了思考。《圣经》上曾经说过，上帝说要有光，于是就有了光。

到底是谁安排这样离奇的人生？从牛顿发现三棱镜能折射出七色光线之后，16 岁的少年爱因斯坦是第一次再次从不同的方向思考可见光的一个人。这个少年曾经一度不是很开心，他的世界冷漠疏离，他甚至认为，学校教育不能给他带来什么新鲜的知识，而他一生中最快乐的少年时光，也仅仅是在瑞士阿劳中学复读的那一年，偶然有些快乐。

少年的爱因斯坦曾经也思考过指南针：他的爸爸曾经送给孩提时代的爱因斯坦一个小指南针。他在磁铁上花的工夫不大，否则的话他可能是历史上最著名的凝聚态物理学家。如果你是一个小孩子，你可以思考磁铁为什么不能吸引铜这样的问题，你也可以按照爱因斯坦的思路，来思考一个问题。

“一个人要是跑得跟光一样快，他将看到一个什么样子世界？”

一百多年过去了，答案当然已经在相对论里面，在相对论里，一个人不能跑得跟光一样快，否则这个人的质量将是无穷大。因为狭义相对论里有一个公式

$m = m_0 / \sqrt{1 - q^2}$, 其中 $q = v/c$, m_0 是静止质量。

同时，光子是不能做参考系的，这个是因为光子的世界线的长度总是零。

相对论到底是什么呢？它一般被认为是以下三个理论：

1. 时间和空间的理论
2. 能量和质量的理论
3. 引力与物质的理论。

也许可以同时认为广义相对论是

4. 几何光学

几何光学无疑是一门优美的数学物理理论，在牛顿之前的数学物理，达到高峰的是阿基米德，他曾经在黑暗年代豪气冲天：“给我一个支点，我就能撬动地球”。阿基米德对杠杆的熟悉把握可以从一个事情看出，那就是他利用杠杆得到了球体的体积公式。这就是他那个时代最杰出的智慧。当然中国人也丝毫没有逊色，祖冲之和他的儿子也做到了这个事情。但祖冲之的方法是纯数学的，而阿基米德的方法，是数学物理的。这也许是 2000 多年前的中西科学思路的微小差异的写照，而这种差异随着时间流程好象被放大镜放了一下，使得之后在中国，几乎产生不出数学物理。唯一的数学成绩是宋朝杨辉得到了牛顿二项式。宋朝是一个开明的时代，也是文人墨客大喜过望的时代。这个时候西方也几乎没有物理，除了阿基米德的杠杆，但后来到了明末清初，中国出现了王夫之，陷入天人合一之哲学思辩；而西方出现了牛顿，牛顿一生之中曾经写过两本巨著，一本就是《自然哲学的数学原理》，另外一本就是《光学》。牛顿的《光学》，我相信他里面会写一点几何光学，据说在牛顿的这本书里，牛顿认为，引力（和电力）是明显的长程力，而他猜想可能存在其他短程力。在这一点上，牛顿的预见也是惊人的，后来的一批人，发现了奇异的原子世界，实验上发现了强衰变和弱衰变，这些衰变又各种不同的衰变道，各种变化有不同的几率，于是这个世界本质上的量子

性被大家看到了。

几何光学的背后是著名的费马原理。这个原理说：光线从 A 点跑到 B 点，总花费最短的时间。这个费马原理是一种奇特的伟大，很多平面几何的题目可以由它迅速得到。

一个长方体的长宽高分别是 12, 13, 23。一个蚂蚁从底面的 a 点爬到侧面的 b 点，蚂蚁能爬的最短距离是多少。这个问题当然很简单，你可以把长方体的表面展开，成为一个平面。如果是圆柱面，这个问题同样可以解答。但如果是球面，就不是那么简单了，因为你无法把一个球面展平了，于是你想要去计算这个蚂蚁从球面上 a 点爬到 b 点所需要的最短距离的时候，你陷入了僵局。

这个僵局完全可以用几何光学来处理——这就是相对论了。

费马原理天生就是一个相对论的原理，原因是光线天生就是相对论的。换一句话来讲，光子跑过的时间，总等于它走过的路程，无论在谁看来，全一样。

数学家伯努利或者别人用折射定理或者说斯涅尔定理得到最速降线。这是古典数学物理的伟大成就。这些结果全来自肉眼可以看到的可见光的运动规律。

整个牛顿时代的天空只有白天和黑夜，从来也没有灯光绚烂的不夜之城，大家还点着煤油灯

，过着寂寞的日子。但有的人也许曾经向往光明，顾城后来写到“黑夜给了我黑色的眼睛，我全用它来寻找光明”。顾城的诗在物理学历史上没有多少象征意义，他无非是在说，古代人在等待着一个灯火绚烂夜夜笙歌的时代的来临。某一天阳光不再普照大地，电光也能照亮璀璨俗世。

人们是在历史里等待。等待与太阳光不一样的灯火的出现。

牛顿时代没有霓虹，唯一的电磁现象是太阳光。牛顿把握住了光的折射，但没有可能得到光的进一步的性质，这需要法拉第和麦克斯维来完成。

没有人可以超越时代，风流总被雨打风吹过。宋朝苏轼写下《赤壁怀古》

“大江东去，浪淘尽，千古风流人物。古垒西边，人道是三国周郎赤壁，惊涛拍岸，卷起千堆雪。遥想公瑾当年，小乔初嫁了，雄姿英发。羽扇纶巾，谈笑间，檣櫓灰飞烟灭。故国神游，多情应笑我，早生华发，人生如梦，一尊还酹江月。”

反思牛顿的业绩，牛顿在那个黑暗时代最接近广义相对论的时候，是提出牛顿水桶的思想实验，而可以相信，牛顿水桶，无非就是 200 多年后的爱因斯坦转盘。

牛顿水桶和马赫把水桶壁加厚的争论，非常哲学，在现代广义相对论里，爱因斯坦提出一个平面转盘，这个转盘在平坦的四维时空里转动，因为转盘上不同半径上的观察者，转动角速度一样，而线速度不一样，所以根据狭义相对论的尺缩效应，平面转盘必然需要扭曲。这个思想实验完全与牛顿水桶一样，用现代的数学语言来说：转盘上的观察者组成的参考系，它们是一组 4 矢量场，这矢量场的扭转 (twist) 非零，所以它无法超曲面正交。或者说，它们无法有同时面。

牛顿属于他的时代，但他对光学的审美可以与万有引力统一起来，广义相对论在一定程度上也许可以再次被看成是一种几何光学。

(2)

从彭罗斯主义出发，旋量正好是类光矢量的平方根。光锥结构也就是时空的局部结构。

光是宇宙与地球之间的最紧密的纽带。而光速的有限性小说家可以构造无穷多凄美的爱情故事。

如果你现在是深圳城市里的一个 23 岁的男孩子，开始在公司上班，每天忙得象一个雨前的蚂蚁，在都市的高楼丛林里穿梭。织女星上“现在”有一个女孩，她用天文望远镜朝地球望去，能看到 26 年前的地球景象，她“现在”看到的是中国刚刚打开国门，深圳还是一片农村，你还没有出生。她在远方，经历多年的风霜月痕，要等待着你的出生，与你相爱。光速的有限性在体现出来了。

当然你也可以反过来问一句，那么，什么是所谓织女星上的“现在”？如何定义地球和织女星的同时面？你如何才能告诉那个织女星上的女孩子，告诉她你已经出生了，并且也很爱她。

你需要面临的是一场穿越时空的爱恋。

总的来说，这就是时空结构。时空结构就象是一条鲸鱼，而人类就象是活在鲸鱼背脊的小动物，以前这些小动物以为自己生活在小岛之上，现在他们开始觉悟了，自己是生活在另外一个动物之上。

唐代杜牧在《秋夕》中写道：“银烛秋光冷画屏，轻罗小扇扑流萤。天阶夜色凉如水，坐看牵牛织女星。”这是无比欢乐的古代的少女生活的写照，也是时空之中优美的图案。但他没有办法知道具体的时空结构是什么，现在的人是何其幸运。

因为只要你想守望星空，你已经有机会完全地理解时空结构。看到漫天星光，懂得如何能让自己超越璀璨俗世。

时空结构是由物质分布决定的，但它可以通过上面的类光测地线的性质来描述。

哥腾伯格—塞司（goldberg-sach）定理从类光测地线汇可以推论出外尔张量……塞司是一个相对论学家，他和一个华人数学家伍洪熙合写了一本相对论的书，书名叫《给数学家讲广义相对论》。哥腾伯格—塞司定理是一个代数定理，它涉及到外尔张量的代数性质。因为外尔张量是一个具有四个指标的张量，比较复杂。

我们可以首先看看比较简单的电磁张量 F_{ab} ， F_{ab} 具有 2 个指标，是一个 2 形式场。

与外尔张量的哥腾伯格—塞司（goldberg-sach）定理类似，电磁场也对于一个定理，叫做 Robinson-Mariot 定理。定理的内容如下：代数特殊的真空麦克斯维方程的主类光测地线汇是测地的，shear

free 的。

那么什么叫代数特殊呢？

假设 F_{ab} 是在四维平坦时空之上，而不是欧空间上。

那么，考虑本征方程如下

$$F A = f A \quad (13)$$

如果 A 存在的话，显然 A 是一个类光矢量， f 是非零的复数。

这无非是说，如果把 F_{ab} 看成一个矩阵的话，那么它有特征向量，这个特征向量的长度是 0，或者说零模矢量，类光矢量。

经典电磁场的代数性质浮现了：我们考虑的本征方程（13），如果它有 2 个不同的特征解 A_1 ， A_2 。如果我们考虑另一个跟（13）类似的方程，考虑类似的本征矢量。如果本征矢

量有重复，我们就称电磁场为代数特殊的。关于电磁场的代数性质背后有冗长的历史，可以与旋量分析联系起来。如果考虑电磁场与能动张量的关系，一个很重要的工作是 E.威腾的爸爸 L.威腾做出的，后来威腾对旋量的手法很纯熟，看来是深受其父的影响。而他的爸爸是专门研究广义相对论的，不可避免深受彭罗斯的影响。

前面已经说了，电磁场是 F_{ab} 。那么，还有一个它的对偶场，当然就是霍奇 (hodge) 对偶 *算子作用一下。因为时空是 4 维的，所以 F_{ab} 对偶场 $*F_{ab}$ 也是一个 2 形式场。

再次用霍奇 (hodge) 对偶 *算子作用一下 $*F_{ab}$ ，我们得到一个非常重要的方程 $**F_{ab} = -F_{ab}$ (14)

由此可见 *算子的平方的特征值是 -1。所以 *算子的特征值是 +i 或者 -i。

这预示了，量子化以后，电磁场光子的螺旋度是 $s=1$ 。

艾虚卡 (ashtekar) 是比较有能力的广义相对论学家，他曾经写了一个文章，1985 年，题目叫做 A note on helicity and self duality。这个文章很优美，体现了他的水平。loop 量子引力是什么？是一种量子场论。我某一个时间一直看不出艾虚卡思想的来源，后来看到 1973 年 geroch 在芝大的讲义 a

special topic on particle

physics。这本讲义是天造之作。而在这本讲量子场论的内部讲义里，我可以看到后来 loop 的影子。这个事情很简单，1973 年附近，ashtekar 是 geroch 的博士生。

霍奇 (hodge) 对偶 *算子正好是螺旋度算子。艾虚卡 1985 年的文章有记录。

在 yang-mills 情景下，如果我们转如欧氏号差 {++++} 我们会发现

$**F_{ab} = F_{ab}$ (15)

在这个欧氏号差下，*算子的平方的特征值是 +1，所以 *算子的特征值是 +1 或者 -1。

我们把满足 $*F_{ab} =$

F_{ab} 的叫做自对偶瞬子。自对偶的瞬子方程的解空间，或者说 moduli 空间是有限维的。这个 moduli 空间是有限维的结构曾经吸引了阿蒂亚，希钦，马宁，和唐纳森的兴趣。

但为什么没有人谈 $F_{ab} = *F_{ab}$ 在电磁场中的情景呢？原因是因为电磁场是阿贝尔的，这个解空间是平庸的。或者说因为电磁场是线性的，而 yang-mills 方程是完全非线性的。

回到 (13)，再次强调，如果 $A_1 = A_2$ ，或者 A_1, A_2 不存在，这个电磁场就是代数特殊的了。当然这个其实完全类似于 petrov 的对外尔张量的分类。

经典电磁场 F_{ab} 的存在，是几何光学的全部内涵的源泉。那么我们可以得到它对应的能动张量 T_{ab} ，暂时假如 F_{ab} 是无源的。

T_{ab} 在对偶转动下是不变的。所谓对偶转动是如下变换， $F_{ab} \rightarrow *F_{ab} \cos a + F_{ab} \sin a$

其中 a 是转动角， $*F_{ab}$ 是转动后的电磁张量。

当然这样的对称性意味着什么？？？

从 T_{ab} 看来， $*F_{ab}$ 与 F_{ab} 是不能分辨的。

一个另外的结果是，任何电磁场，经过对偶转动后，总可以实现 $F *F = 0$ ，也就是说，经过对偶转动后任意电磁场总可以是简单 (simple) 的。

(3)

对于电磁张量的代数分析导致了后来的旋量分析。所以的代数结论全可以用旋量语言重新描述。从几何光学到电磁张量的历史变迁吸引了很多人。

电场，磁场，磁荷，磁单极所有的问题糅合在一起，这些看不见的光线在黑暗的灵魂世界织出绚丽的彩虹。

顺便评论 2 点如下：

a. 没有磁单极的时候，磁场是一个赝矢量。这与洛伦次李群有关系。

b. 电磁场有类光与非类光的区别。或者说有静电场与辐射场的区别。辐射场的能流能到达类光无限远。

虽然爱因斯坦得诺贝尔奖的原因在于光的粒子性，但他一辈子最重要的贡献在于光的波动性质，或者说经典性质。这是几何光学历史上最杰出的成绩。

爱因斯坦在普林斯顿的晚年留下很多故事，有一个故事类似于一个笑话，爱因斯坦有一次回家忘了自己家的住址，于是打电话给秘书，变了个声音说：“你好，请问爱因斯坦教授在吗？”

秘书回答说：“很抱歉，先生，爱因斯坦已经回家去了。”于是爱因斯坦接着问：“那你能告诉我爱因斯坦家的住址吗？我有物理问题要找爱因斯坦教授讨论。”秘书说：“对不起，爱因斯坦要求我们严格保密他的住址，不经他的同意我们不能告诉您。”

然后爱因斯坦压低声音无奈地说：“我是爱因斯坦，您能告诉我，我家的住址吗？”

当犹太人自己建立的国家以色列，请爱因斯坦回国担任总统时，爱因斯坦婉言谢绝了，他的理由是政治只为一时，而方程可以久远。每当想起这个故事，我们能想起很多人，包括 lz.Fang，伽罗华。

随着年事日高，爱因斯坦的亲朋好友一个又一个先他而去，先是他的大女儿。然后是格罗斯曼教授。在格罗斯曼的葬礼上，爱因斯坦的悼词中写到：“作为普通人的眼光看，你永久离开了我们这个世界；但在我们物理学家都坚信，所谓空间和时间都不过是人脑中一种执著的幻像而已。”

伴他多年的夫人埃尔莎的死对他沉重的打击。幸亏他的妹妹专程赶来陪他，使他的精神稍有好转。当妹妹亦身患重病也离他而去时，爱因斯坦陷入了更大的孤寂，自己亦知时间不远了。

在最后的日子里，爱因斯坦仍没有放弃自己的工作，统一场论的数学公式始终不断地在脑中徘徊。在 1955 年 4 月 17 日的深夜，躺在病床上的爱因斯坦带着统一场论的秘密永远的离开了这个世界。

窗外，一片树叶静悄悄地落了下来。

再次向这位一辈子几乎孤冷的勇敢战士，人类永远的伟大儿子阿尔伯特·爱因斯坦致敬！这个曾经的少年在思考阳光的时候，脸上写满了明媚的哀伤。

第 24 章 loop 量子引力之梦

(1)

克尔解和对引力场和电磁场的分类使得经典广义相对论生机勃勃，而钱德拉塞卡在他后半辈子做的重要贡献，是在克尔时空中解出了 Dirac 方程。钱德拉塞卡相当于在天空中引进了超对称。之后钱德拉的影响就渐渐萎靡，因为真正能够集大成的彭罗斯在莎麻的影响下由一个数学家成为一个广义相对论学家。1985 年彭罗斯和林德勒出版了《旋量和时空》，基本上奠

定了经典相对论的格局。wald 则在弯曲时空干起了公理化的量子场论。他开始做半经典半量子的东西。wald 的数学不错，他做弯曲时空量子场论，就是用 C 星代数，泛函分析。wald 的弯曲时空量子场论，明确地告诉人们：量子代数很重要。量子代数是绝对的，而粒子，当然是相对于观察者的。

这从温茹效应可以看出。

真空和粒子是一个依赖于观察者的概念，这是很新奇的。通俗的说，你看到的电脑和桌子，在别的观察者看来，也许是一片真空。

量子论和相对论的结合出来了新的物理。最著名的当然是霍金的黑洞热辐射。

人们全在等待量子论和相对论的全面结合。

人们希望追求终极真理。也许用数理逻辑来说明，终极的量子引力真理并不存在。但这不会让那些做量子引力的人伤心欲绝。弦论的领导者威腾认为，也许在别的星球上，是先发现量子引力，然后再发现量子力学和相对论。这当然是很有可能。但弦论有一个缺点，就是依赖于时空背景。

在这个星球之上，最优美的量子引力理论会从什么地方出来。谁也不知道。很多人曾经年轻，或者正在年轻，有的将要年轻，很多年轻人无法做出判断，从理智上来讲，我相信很多参数全在跑动，凝聚态很重要；从情感上来讲，相对论很优美，把它直接量子化是一件痛快的事情。这种心情完全是普通生活的写照，多数人很普通，没有天才，没有天才的人可以相信相信量子引力以一种非理性的天才方式出现，比如当年薛定格方程的出现。

在量子引力上，有二条道路，它们的出发点是广义相对论。

它们就是 loop 和 twistor。

loop 量子引力的 05 年会匆匆地在德国 Glom 结束。Glom 在柏林附近，在 potsdam 市。蒋中正委员长在 1945 年曾经去过 potsdam 开会，和邱吉尔和杜鲁门商量在盟国二战胜利以后如何处理日本。max-planck 研究院在那里有一个引力研究所，叫***因斯坦研究所。德国是人才辈出的国家，数学物理上高斯，黎曼，爱因斯坦和希尔伯特，普朗克，海森堡……很多人出现在那块并不是很大的土地之上。

potsdam 是一个不大的城市，显得很寂寞。交通很方便，在那里好象是没有城市和乡村的区别，爱因斯坦研究所一片荒草地上，应该算是农村了。

loop 还很年轻，缺少数学家的帮助。从 1986 年 ashtekar 以联络为新变量开始，到现在大约 20 年，20 年艾虚卡已经老了，2005 年 loop 年会的时候，会上多数报告者报告的时候必称是爱因斯坦研究所的梯曼 (thiemann) 的业绩，显然他已经是最有才情的新人，还不到四十岁，他已经写了一本 loop 量子引力的书了，《正则量子引力导引》。另外一本书是罗维林写的，《量子引力》。这几个人，他们影响了 loop 的历史轨道。thiemann 第一次到中国来，我还是一个研究生。他给我们讲量子引力。

德国的马克思普郎克研究院，俗称马普所，地位相对于中国科学院，是国立的，全国各地有它的研究所，里面有一个爱因斯坦研究所，是专门研究引力的。有一天，Thiemann 来中国了，是受到我的导师的邀请来的，4 月的北京已经热起来了，Thiemann 穿着一件带红色的外套来了，他来给我们上几节课，从量子引力的运动学开始讲起。那是一个周一的清早，他看上去那么年轻，好象是 27 岁的样子，让人非常惊异，看上去如此年轻的一个人，居然已

经是这个地球上研究 loop 量子引力的三大领军人物之一了。他开始讲课了, how to quantize a theory with constraints? 他在黑板上用英文写下。

经典广义相对论的时空 3+1 分解好了, 在 hamilton 形式里, 真空爱因斯坦方程表现为 3 个约束函数, 如何把这 3 个约束量子化, 然后研究量子化以后算子的解空间, 这就是 loop 量子引力。等量子化好了, 函数变成了算子, 算子要实现在什么样的希尔伯特空间上呢? 也就是说, 怎么样把这个算子表示成希尔伯特空间上的算子, Thiemann 考虑的是用 GNS 构造。他来讲学的第一天上午就这样过去了……

(2)

loop 量子引力最简单的理解是 3 个相交的圆, 每一个圆里分别写着 3 个字母, C, G, h, 这三个字母分别表示的是光速(狭义相对论), 引力(广义相对论), planck 常数(量子力学)。也就是说, loop 量子引力是想把引力量子化了。

loop 量子引力只考虑如何把引力量子化, 所以似乎有很多问题

比如:

为什么时空是四维的?

如何统一其他的三种力?

ashtekar 有时候称 loop 量子引力为量子几何, 因为引力只是几何而已。

ahstekar, 他在宾州大学。他身材矮小, 但声音很洪亮, 听起来很有振聋发聩的效果, 做 loop 的人也许在内心应该全很感激他, 因为他让人们有了一碗饭吃。虽然据说现在搞 loop 的正儿八经能找到工作的也算是一大奇迹。但做 loop 的人相信未来的眼睛。ahstekar 的量子引力方法和 penrose 的扭量方法有共同的平台, 那就是广义相对论。把广义相对论做为基本的出发点这在做物理的人看来不是严肃的事情。很多人觉得广义相对论是一个低能有效场论, 但做 loop 的人默认一个习惯, 就是最基本的东西, 是几何的, 也就是说, 广义相对论是最基本的。

ashtekar 这个黑黑的印度人, 的确是很有实力的。他和波兰华沙大学的 lewandowski 一起写了不少 loop 的文章。

loop 也计算黑洞熵。

量子代数那种量子化的方法, 怎么样用到 loop 量子引力里来。在 loop 量子引力里, 最基本的可观察量就是联络沿线的和乐和标架场在一个面积上的通量了。它们组成了和乐-通量代数。

在量子力学里, 人们知道冯纽曼定理, 这个定理说明, 正则对易关系的表示是唯一的, 那就是只有一种量子力学。

loop 的进展说明, 和乐-通量代数的表示也是唯一的, 只有一种 loop 量子引力。

(3)

这生活就是一场战争, 有的时候就是这样的, 你需要不断地杀死别人才能保全自己。

在 loop 面前, 敌人就是 string, 潜在的盟友是 twistor. 他们全出身于广义相对论, 有了共同的阶级感情, 但全失去了广阔的市场. 高尔基曾经说: 真理是朴素的。

loop 是朴素的。

Max-planck 研究院, 爱因斯坦研究所的头头是 nicolai, 他有一个很大的肚子, 德国人喜好啤酒, 所以多数人有大的肚子, 但 thiemann 是一个例外, 他也能拿着啤酒瓶子喝酒, 但人却是异常清

秀.Nicolai 曾经听 thiemann 讲过 loop,他马上就跟上了,写了一个 loop 入门,现在他又写了一个 <旁观者看 loop>.文章号是 hep-th/0501114

loop 起源于对爱因斯坦方程的直接量子化。loop 理论到现在 20 年的发展,造就了几个中心,一个是加拿大的圆周研究所 (PI),PI 的核心人物是 lee smolin,smolin 写了一个科普书,<通往量子引力的三条路途>.以及他的前妻,做物理能象做菜一样的马可波罗-芙蕘妮.他们已经分手了,但分手之后,他们的爱情故事被圈内人关注,芙蕘妮有了新的男朋友,smolin 好象也有了新的妻子.所以当 2 个人坐在一起,在饭桌上聊天,谈笑风声,其实内心有万千头绪.smolin 已经 50 出头,前妻 30 出头,这一对旧人,随着时间流淌。另外的组一个是法国的 Rovelli 组,一个是美国的 ashtekar 组,还有就是波兰的 lewandowski 组,还有就是德国的 thiemann 组,风头最健.

loop 坚持认为,在高能情景之下,引力还是用爱因斯坦方程描述,原因是因为他们认定,引力不是一种力,而仅仅是几何效应.这种几何,甚至说微分几何,可以被推到 planck 时期,量子化为量子微分几何.当然,引力为什么不是一种力,原因有很多,引力的非局域性很明显,这也是很特殊的。比如你无法定义引力的局部能量。

penrose 认为,熵和引力是一对矛盾.一个封闭的箱子,熵使得气体分子扩散,做均匀分布,但引力全使得气体分子抱团.所以在黑洞里,情景是黑洞熵不是跟体积成正比.hawking 证明了黑洞热辐射,得到了熵和黑洞面积成正比.loop 号称也能得到同样的结果.hawking 的手法是半经典半量子的,好象 bohr 的原子论,而 loop 的手法是纯量子的,好象是 schrodinger 的量子力学.

penrose 不是一个普普通通的男人,他认为世界的本质是广义相对论,甚至连波函数坍塌也有引力引起.因此,如果 penrose 可以相信,twistor 和 loop 全是值得发展的.

引力是孤冷的,在物理学里,面对物理学其他领域的飞速发展和技术实现,引力显得有点绝望了.但事实说明,从牛顿到爱因斯坦,非常杰出的人全对引力入迷。

很多年前学狭义相对论,我觉得很吃惊的是:

一切事情已经发生(存在),只是不同的观察者看到不到的场景.仅仅是事情的因果关系还是一致的,对每一个观察者全一样.

从广义相对论看来,这个理论里存在世界线,世界线全是给定的,所以似乎人类没有自由意识.但世界线之间的相互碰撞不能避免。这可能就是自由意志起作用的地方???

相对论很优美,这可以从 penrose 的<旋量和时空>看出来.经典广义相对论已经被 penrose 终结.但还剩下一些比如准局部能量的问题.这些问题的背后会给物理学一个新的刺激。到了现在,我们居然不知道什么是重力势能?

当然相对论也有无能的地方,最简单的 3 体运动,在牛顿引力就无比复杂,不知道在广义相对论中如何表达这个问题。

在电影<终结者 2>中,有一个场景,那就是女主角在桌子上用匕首刻下 2 个字:no fate.

她的意思是说,命运并不存在,人力可以有所作为.这说明,事情纵然凄惨,也许美丽。这也正是 loop 量子引力之梦。

第 25 章 四元数

(1)

广义相对论是一副绝世名画,当很多人欣赏这个画的时候,有的人看不太懂。以为这个是凡高的画,你横直看不懂的时候,除了赞美之外只能保持缄默不语。而当代还活着的广义相对论画家中,彭罗斯却一意孤行,有了很高的见地。从他的旋量手法出发,他几乎一个人做出了扭量 (twistor), 这是一个曲高和寡的计划。在扭量计划中, 一直以来物理学家习惯的时空点不再是最基本的。也就是说, 时空点不是最基本的。这确实是疯狂了, 凡高因为他的疯狂割掉了自己的耳朵, 最后还饮弹自戕。这是一种艺术的疯狂, 而彭罗斯浑身充满了科学的理性的色彩, 他生活在优美的世界里, 有美丽的妻子, 安静的日子。

会画画的人多数知道射影几何。当一个画家站在野外写生的时候, 画板竖立在面前, 画家看到一对平行的铁路线, 当在画在纸上的时候, 所有跟铁路一起平行的线应该是交于一个点的。这背后的数学就是射影几何。

如果时空点不是最基本的, 那么什么是最基本的呢? 彭罗斯的答案是光线。

这个答案确实让人感觉深刻地懵懂。但光线是世界上最重要的因素。在前面我们已经看到, 上帝说要有光, 于是就有了光。同时, 人类是有眼睛的生物, 眼睛是最伟大的生物器官之一。上帝对多数人足够仁慈, 他不曾考验多数男人, 出过二难绝境: 如果让你失去眼睛, 或者失去男根, 二选一, 你将做何选择?

人的眼睛是很重要的, 这是审美的工具, 也是这个世界有意义的大部分理由。一条光线从远处跑来, 它一路经过了很多时空点, 但在视网膜上仅仅是同一点。

在扭量计划中, 通俗地讲, 视网膜相当于扭量空间。所以, 眼睛是心灵的窗户, 这句话背后完全有数学的基础。人类通过讲废话达到相互确认, 但心灵上总是感觉空虚, 这原因在于, 多数废话背后没有数学的基础。

什么是一个扭量呢?? (这个问题的答案很长, 读者请漫漫往下读, 读到最后就明白了。)

最简单的说, 一个时空点 R , 需要 (t, x, y, z) 四个实数来刻画。而这个点的四个实数相对于一个原点, 构成了一个四维矢量。这个四矢量背后, 有一个美丽的故事。

对于三维矢量, 人们可以谈论叉乘。也就是矢量乘法, 但这不是一件平庸的事情。也仅仅在三维中, 一个矢量和另外一个矢量的叉乘, 得到的还是一个三维矢量。

(2)

威廉·哈密顿, 历史上最伟大的数学家之一。

1805年8月3日出生于爱尔兰的都柏林, 1865年9月2日卒于都柏林附近的敦辛克天文台。哈密顿是一位罕见的语言奇才。14岁时就学会了12种欧洲语言。13岁就开始钻研牛顿和拉普拉斯等人的经典著作。17岁时掌握了微积分, 并在光学中有所发现。22岁时大学还未毕业就被聘任为他就读的都柏林三一学院的教授, 同时获得“爱尔兰皇家天文学家”的称号。哈密顿在物理学和数学领域里都有杰出的成就, 他是一位勤奋工作而酷爱真理的人。他和妻子在一起散步的桥头, 已经有一个纪念碑。

四元数是由哈密顿在1843年爱尔兰发现的。爱尔兰有一个很多人熟悉的英雄, 威廉·华莱士。在电影《勇敢的心》中, 有一柄长剑, 叮地插在大地之上, 长剑在风中微颤, 你仿佛听见爱尔兰的英雄在高呼: Freedom!!

在通往数学的自由或者奴役的道路之上, 哈密顿的四元数是一个丰碑。从物理学上讲, 它就是 pauli 矩阵, 有了 pauli 矩阵, 就有了 2 分量旋量。所以天才总是相互感应, 而有了 pauli 矩阵, 才有了扭量, 这亦是自然的事情。

当时他正研究扩展复数到更高的维次（复数可视为平面上的点）。他不能做到三维空间的例子，但四维则造出四元数。根据哈密尔顿记述，他是于 10 月 16 日跟他的妻子在都柏林的皇家运河散步，突然灵感扑面而来，他在桥上写下乘法表：

$$i^2=j^2=k^2=-1, i \cdot j=k, k \cdot i=j, j \cdot k=i; j \cdot i=-k; i \cdot k=-j, k \cdot j=-i。$$

这是一个普通的桥，它以前的名字叫布鲁穆桥（Brougham Bridge，现称为金雀花桥 Broom Bridge）。

哈密顿创造了把四元数描绘成一个有序的四重实数：一个标量（a）和向量（bi + cj + dk）的组合。

根据上述乘法表，四元数显然是复数的扩充，它将复数作为特殊形式包含在自身之中，它属于超复数。但这种数对乘法的交换律不再成立，哈密顿为此考虑了十几年，最后直觉地想到：必须牺牲交换律，于是第一个非交换律的代数诞生了，在以前的乘法中，乘法是交换的，比如从小学数学开始，没有人告诉你为什么 $1 \times 2 = 2 \times 1$ ，但这背后其实埋藏无穷秘密。哈密顿的这个创造，把代数学从传统的实数算术的束缚中解放出来，人们开始认识到数学既可来自现实世界的直接抽象也可以来自人类的思维的自由创造，这种思想引起了代数学领域的一次质的飞跃，现代抽象代数的闸门被打开了。

我们知道， $so(n)$ 群中，只有 $so(4)$ 不是单李群。也只有在 4 维之上，霍奇算子能把曲率映为曲率。也只有在 4 维欧空间之上，唐纳森发现了无穷多微分结构。loop 量子引力被人诟病，因为她不能回答为什么时空是 4 维的，但上帝用数学来回答。

在 19 世纪到 20 世纪，哈密顿之后，物理学家洛仑次写了厚厚的《电子论》，Lorentz 的《The Theory of Electrons》总共三百多页，当时还没有发现电子。这是历史上一个伟大的事情，虽然洛仑次不是最出色的，但人们应该注意到，在洛仑次力公式

$$f=qE+v \times B$$

出现了点乘与叉乘。

这个是一个经典电动力学里的假设，但可以相信，这个假设说明，在四元数中，结合方法必须既有点乘又有叉乘。这个假设是实验证实的，所以洛仑次是伟大的。

电磁理论与四元数的结合是自然的，天然的，同时是微妙的。因为电磁场在 4 维时空才是天然的。

我们知道一个 3 矢量与一个 3 矢量的叉乘，但不知道如何把这种叉乘推到高维。能做到呢？？ Grassmann（1809-1877）生于德国 Stettin（今属波兰），曾经在柏林大学攻读神学，哥廷根大学没落之后，柏林大学似乎已经成为德国最出色的大学。格拉斯曼大学毕业后长期在家乡中学任教，业余从事科学研究，成为梵文权威和数学家。1844 年他发表了《线性扩张论》。建立了所谓的“扩张的量”（即有 n 个分量的超复数）的概念和运算法则，其中包括了非交换乘法和 n 维空间的重要思想，形成了张量理论的初步思想。

grassmann 代数又叫外代数，超对称代数就是由 poincare 代数与外代数组成的。

clifford 代数当然是数学家讲旋量必须的出发点之一，数学家不讲这个而谈旋量显得有点脱离潮流。

一个很直接的看法是，n 维向量空间上的外代数和 n 维向量空间（含内积）上面的 clifford 代数具有相同维数，全部是 2 的 n 次方维。这样的话，作为有限维的向量空间，它们是同构

的。但作为代数，它们不是一样的事情。clifford 比外代数复杂一点，或者说，前者是后者的量子化或者畸变。

总的来说，外代数很重要，因为外微分很重要。clifford 代数很重要，因为我们有复数，有四元数，我们希望推广到更加高的维数，但一般的代数，到了 8 元数就终结了，要找新的代数，只能去发现 clifford 代数了。因为它作用在旋量之上，所以在下面的章节可以漫漫谈来。

旋量由此产生，最早起源于嘉当。旋量与群论关系密切，但也可以说与 clifford 代数关系密切。比如物理学家比如咯兴林的《高等量子力学》把 dirac 矩阵乘起来的 16 个矩阵叫做 dirac 群，其实这就是一个 clifford 代数。

旋量具体来说就是 N 维度空间上的正交群的表示。大家最熟悉的莫过于三维欧氏空间的转动群 $SO(3)$ 的表示了，其最低维的双值表示便是二维的旋量表示，这个是转动群的通用覆盖群的 $SU(2)$ 单值表示。把这个结果推广到一般维数的空间。其结果是：最低维旋量的表示维数是： $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 当 n 是偶数的时候； $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 当 n 是奇数的时候。

当维数为六时， $SO(2,4)$ 的表示便是扭量。这是从抽象的代数语言来说扭量，扭量如何在时空点和光线空间实现对应呢？

对于的关键在于，我们把四矢量 (t, x, y, z) 用 pauli 矩阵写出来，或者说，用四元数写出来。写出来后是一个矩阵。这个矩阵，记做 N 。

那么，一个扭量 (z_1, z_2, z_3, z_4) 满足如下扭量方程。

$$\begin{matrix} z_1 & N & N & Z_3 \\ z_2 & = & N & N & Z_4 \end{matrix}$$

这个方程非常专业，跟爱因斯坦方程一样是一副名画。但不专业的读者们可以暂时忘却它，不能忘却的是，扭量理论中最重要的是光线，光线最重要。

对于多数人来说，光线意味着光明。对相对论来说，光明意味着光线，也意味着扭量。

第 26 章 扭量方程

(1)

似乎李·斯莫林曾经这样说过：彭罗斯是一个英雄。
一个英雄能做的事情，有的时候就是独步遥登百丈楼。
百丈之楼，高处不胜寒。

1994 年在英国剑桥大学牛顿数学科学研究所举行了一次相对论历史上最著名的辩论。辩论

被认为是爱因斯坦玻尔之间的争论在 60 年后的延续。一甲子的时光，沧海桑田，大地也换了新颜，但相对论和量子论的争论不能停止。辩论的双方是彭罗斯和霍金。霍金因为在 1970 年代把量子理论引进相对论，得到了著名的黑洞辐射，而确立了一个山头的霸主地位，所以他的后 2 次演讲的题目是《量子黑洞》和《量子宇宙学》，在气质上，他似乎是玻尔再现。霍金 2004 年似乎在没有成熟的思想准备的情景之下大放厥词，说：黑洞辐射中，信息守恒。

这确实让都柏林沸腾，17 届引力大会因为霍金的一句大话变得异常亢奋。在场的人，很多人期待着霍金的对他自己的言辞负责，这是 2004 年的夏天，这个夏天似乎人们全在等待这个轮椅上的大人物，对未来的发展做出必要的指示。

跟霍金打赌的那个 preskill，知道自己不是一盘菜，他得到了霍金送来的杂志，《阁楼》还是《花花公子》？他赢得很懵懂，他说：“我，我不知道自己为什么赢了。”这个世界因为霍金显得荒谬起来。但生活在继续，

彭罗斯继承了牛津数学物理的古典主义色彩，他和爱因斯坦一样坚信：量子力学理论虽然成功，但它最终是没有意义的。

比起霍金，彭罗斯谦逊而低调，他是一个纯粹的理想主义者，是爱因斯坦相对论精神的化身，他甚至认为，世界的本质是广义相对论的。他在 1994 年的辩论中再次推出了自己的扭量计划。

他们得这次辩论后来在中国大陆被出版成了一本科普书《时空本性》。这本科普书毫无疑问是中国历史上最难的科普书，中国大陆 13 亿人中，能够看懂这本科普书的，也许在 13 人左右。这本书的短小精悍，第六章就是彭罗斯的《时空的扭量观点》。

威滕也是谦逊而低调的一个人，追索他的业绩，不难在威滕身上一点看到彭罗斯的痕迹，尽管威滕(EDWARD WITTEN)现在还不到五十岁，但早已是跻身于当今数学名家之列。他在数学上的业绩也可以与 S·S·CHERN(陈省身)，M·ATIYAH, DONALDSON, S·T·YAU(丘成桐)，A·CONNES 等当代几何(拓扑)学大师相提并论。他 90 年的菲尔兹(FIELD)奖有关。他获奖的一个原因，是他在 1981 年将丘成桐等人对广义相对论中正能定理的证明，利用旋量方法进行了大大的简化。为什么威滕能够想到使用旋量？这可能是因为当时彭罗斯影响下的广义相对论，旋量已经成了比张量更加优雅的语言，而同时威滕的父亲 L.witten 是一位广义相对论学家，老前辈对旋量甚是喜欢，难免潜移默化到儿子。当然正能定理仅仅是威滕文豪般创作里的一小部分亮点，他的文章数已经到达 300 多篇，多数文章领导研究的时尚，他 82 年的文章研究宇宙早期的 QCD 相变，到现在还是被广泛引用，因为这涉及到宇宙中的中子星，到底是不是真的中子星，也许是奇异夸克星。

他在 86 年左右开创了拓扑量子场论用物理学中场论的方法，来对空间的拓扑结构进行研究；从物理的角度来看，是将空间的(特别是非平庸的)拓扑结构，纳入场论的范围内来加以考虑。利用拓扑量子场论，威滕自己首先便对 2+1 维(两维空间，一维时间)量子引力进行了研究，证明了它完全是一个可解问题。随后 95 年左右，威滕和塞伯格(SEIBERG)理论，对超对称中“电磁”对偶性进行研究。这个理论在四维拓扑学引起了对四维拓扑不变量--DONALDSON 不变量的计算量，大大地减少。因此威滕和塞伯格理论也许可以被认为是唐纳森理论的高中版本。2000 年以后威滕又在弦论得计算中引进了彭罗斯一辈子提倡得扭量手法。扭量理论和超弦理论的爱情故事已经展开，威滕是这个爱情故事的导演。

看到谦逊的威滕和彭罗斯，很多人觉得这生命是那么宁静优雅。不由得让你感慨：

“人生到处知何似，
应似飞鸿踏雪泥。
泥上偶然留指爪，
鸿飞哪复计东西。”

(2)

相对论研究时间与空间的性质，主要兴趣也停留在经典的范围，和时空的整体几何性质；粒子物理学家，只管研究粒子之间的相互作用，对于一个粒子物理学家来说，自由场其实不是物理，相互作用才是正道。算传播子，算散射矩阵和散射截面，对于粒子存在的时空背景，取平直时空的近似也足够用了。相对论与粒子物理似乎是井水不犯河水。

相对论的语言，正统的当然是彭罗斯的语言。penrose 的抽象指标和旋量语言似乎是比较优美的。

相对论发展到一定程度，数学家也不是很有兴趣了，因为正能定理被 s.T.yau 他们搞定了，但自从有了 penrose 的扭量，这相对论这一块，可以迅速地与复几何代数几何联系。这似乎没有还引起国内人的兴趣，因为这个扭量，确实是非常之冷僻，空谷幽冷，泉水丁冬，也只能留得住三两个耐得住寂寞的隐士。

这是一种《山行》的意境：

“远上寒山石径斜，白云生处有人家。停车坐爱枫林晚，霜叶红于二月花。”

扭量也许永远也不会时髦。

扭量不时髦的一个原因在于语言。因为写下扭量的语言是对大众非常陌生的语言---旋量。所以学习扭量语言来理解世界非常象国学大师用几百年前的突厥语吐蕃语在现代人群中交谈。

语言很重要，还记得我上大学的时候，penrose 的语言在物理系已经开始悄然流行，penrose 的语言引起大家的喜欢。这种语言就是抽象指标和旋量语言，它给人的感受是

"落霞与孤鹜齐飞，秋水共长天一色"

这是能够把广义相对论与规范场论联系起来的优雅的语言。

在上一章我们知道四维(复)时空可以与扭量空间建立一个对应关系。这个对应叫作 incidence 关系。扭量空间中的一个扭量由 2 个二分量旋量组成。一个二分量旋量是 2 维复空间的一个元素。一个扭量就是 4 维复空间的一个元素。4 维复空间是实 8 维的。这样高维度的空间谁也没有见过，这个空间叫做扭量空间，记做 T。

扭量是两个两分量旋量的组合，Dirac 旋量也是两种最小两分量旋量的组合，它是否是扭量呢？

答案是这样的：dirac 四分量旋量不是扭量，虽然它们形式上一样，但他们满足不同的方程。

最简单的说法可能是，dirac 旋量描述的电子有质量，扭量描述无质量场。扭量场方程其实就是共形不变的凯林旋量方程。

dirac 方程是物质场的运动方程。

twistor 方程不是描述一个真实物理的场，而是在时空点与扭量空间 $T=C^4$ 建立了一个对应。

为什么要建立这样的对应呢？

简单的想法也许是人们希望利用复几何的种种优雅的工具来研究物理学。俄国的数学家马宁，写过一本《复几何和规范场论》，里面也写到扭量。中国也许需要有这样的书，由中国人自己写的。有了这样的书，才说明中国的科学水平，终于赶上了西方。中国人不是东亚病夫，民间科学家很多人在孜孜不倦地证明，而学院在沉寂。民间科学家和少年儿童现在很幸运，因为彭罗斯在 2004 年出版了他的新书《通往现实之道路》。这是他历时 8 年写的一本科普书，在某种意义上来说，这是又一本《费曼物理讲义》。《通往现实之道路》显然将影响未来的数学物理学家。

(3)

penrose 的扭量也许不是很物理,但它可以用到解决不少数学问题,比如一些极小曲面的研究。penrose 把任意自旋的无质量场写成旋量形式:

$$(D^A A) \Phi_{ABCD} \dots =$$

从 incidence 关系出发,我们对这个关系进行微分,就得到扭量方程.

$$D^A (A-W-B) = 0 \quad (\text{打不出指标, 不是完整版})$$

在得到扭量方程的过程中,重要的是利用了 incidence 关系中其中一个 2 分量旋量 π 是常旋量. 这个常旋量对应的 flagpole 实际上表示无质量场的动量。

常旋量平行移动不变, 它的物理意义就是动量是不依赖于坐标系原点的。

而另外一个旋量就不是常旋量了,它与之前的那个旋量 π 一起,可以表示出无质量场的角动量。

扭量方程被认为是物理学里相继出现的几个最漂亮的方程里的一个.

它们依次是:

schrodinger 方程,dirac 方程,爱因斯坦方程, 扭量方程。

爱因斯坦和彭罗斯是相对论历史上最高大的山峰,彭罗斯继承了爱因斯坦的古典主义和理想主义。而扭量理论与圈量子引力的联系还没有被发展, 故事刚刚开始, 以前发生过的一切, 仅仅只是序幕。

天上每一颗星星,对应这地上每一个生命。当流星滑落天际的时候, 地面上就要死去一个生命。这是美丽的, 忧伤的文学, 这似乎也是扭量理论的实质。彭罗斯在天球与地平面之间建立了一个对应。换成复几何的语言, 这就是在 CP^1 与 C^1 之间存在球极影射。

第 27 章 最完美的错误

(1)

彭罗斯的扭量理论发展起来,他几乎很少在宇宙学上作工作.虽然他的扭量宇宙学作为一个数学理论预言宇宙在空间上应该是双曲的.也就是业内人士所谓的 $K=-1$.彭罗斯作为当代最杰

出的广义相对论专家在他的新书<通往现实之道路>里对极早期宇宙发生物理情景表示怀疑。

爱因斯坦曾经在写给外尔的信笺里提到:在引力场方程里引进宇宙学常数是我最一生中最大的错误。

宇宙学很象是历史学.但凡讲到历史学,很多人希望能找到一个历史线索,把所有事件联串起来.在宇宙学里,这个历史线索就是宇宙学常数。

北宋的时候,超新星 1054 爆发.这个超新星是肉眼可见的,白天有 23 天就可以看到它与太阳一起出现在天穹里.这个事件被中国史官记载下来.超新星是天文观测的宠儿.在黑洞不能被观察到的情景之下,观察到超新星是最好的选择.伽利略发明了天文望远镜,到了 1998 年,天文望远镜对超新星的观测得到一个惊人的结论:我们的宇宙正在加速膨胀之中。

1992 年的 *cobe* 卫星看到的宇宙背景涨落被霍金认为是科学历史上最主要的发现.*cobe* 的发现是人类站在 137 亿年之后看到宇宙的婴儿时代.(光速有限).这个涨落的存在是星系形成和人类形成必须的.所以其意义确实不能小嘘.其观察结论后来被 *WMAP* 更加精密地证实。

但 1998 年发现宇宙加速膨胀是对物理学的一次颠覆。

直观地说,宇宙要加速膨胀,需要有一种反引力,这个反引力是产生排斥力的。

(2)

因为光速有限,我们可以看到宇宙的去.比如在夜晚的时候看到星空,多数星星的光线旅行到地球上,化了上万年的时间.更加早的光线可以到达地球,最早的光线是在宇宙变的透明的的时候发出来的.原则上人们不能看到宇宙大爆炸时候发出的火光,因为在这个时期,宇宙里的光子因为极端高温所以反应的很剧烈,它们是高能物理的奴仆,还不是自由身.等宇宙冷却下来,它们才能跑出来,到了今天,成了宇宙背景辐射。

宇宙背景辐射是一个光子背景.它们是最远古的使者,再没有比它们更老的老人了.也许还存在一个中微子的背景,中微子的背景这里先不去招惹它们,因为中微子只有左手的,它可能是有质量的.这一切太复杂了.等我们讲暗物质的时候再慢慢写起。

宇宙背景光子它们是宁静的,当它们被发现是那么的均匀的时候,彭奇亚斯和威尔逊这两个不经意的工程师得到了诺贝尔奖.而当它们被发现不是那么均匀的时候,霍金觉得这个事情简直是无比精美。

这个背景是寒冷的宇宙舞台,这个舞台的温度是零下 270 度.在这个舞台之上,流星赶月,漫天繁星.对于这个寒冷的舞台来说,星星的生老病死显得生机勃勃.但这个舞台是光子背景,极端高能粒子不能在上面行走,因为极端高能粒子可以与背景光子发生反应.物理学家能在这个舞台上看到历史。

1985 年,这一年,北京城里全是自行车,北京师范大学引力组的研究生把霍金抬上了长城.霍金在长城之上说:"我宁愿死在长城,也不愿意死在剑桥".霍金在长城上看到了的历史比较其熟

悉的宇宙历史,要短暂的多.但中国历史的曲折变迁的美丽可以在长城看到,而宇宙历史的神秘变迁的美丽可以在宇宙学常数里看到.

霍金对宇宙学的贡献是他的无边界宇宙论,也就是说他认为宇宙的 $K=1$.相反,彭罗斯的扭量宇宙学认为 $k=-1$.而微波背景角功率谱说明 k 大约等于 0.

K 等于多少相当于问宇宙在空间上到底是不是有限的,这个问题在爱因斯坦年代是一个不好回答的问题.现在依然不好回答.一种方法是利用观测到的哈勃常数求出临界密度,然后再测量出宇宙的平均密度,但这个观测的误差不小,事情没有办法在短暂的瞬间被敲死.爱因斯坦当时相信宇宙静态,所以得到的静态宇宙模型在空间上是一个三球面.爱因斯坦相信宇宙静态,实际上他的静态宇宙是经受不起微扰的,也就是说,一个胖子在地球上跺脚,可能引起宇宙剧变,天崩地裂.

爱因斯坦为了得到这个错误的宇宙模型,引进了一个宇宙学常数.因为这个宇宙学常数可以提供反引力,使得宇宙不会因为万有引力收缩从而达到静态.

爱因斯坦引进宇宙学常数成就了历史的曲折险峻.

1998 年宇宙加速膨胀被发现之后,人们把引起这个加速膨胀的能量称为暗能量.(dark energy).这个暗能量到底是什么?到现在还没有人知道,我们仅仅知道背景光子绝对不是暗能量,因为人们对暗能量几乎一无所知.但这个暗能量在宇宙中占的比例,居然高达 73%.

物理学家一向以理解宇宙为己任.但现在看来,除了 73%未知道的暗能量,就是 27%未知的暗物质(dark matter).而物理学家比较熟悉的普通物质和辐射,只占了不到 1%.

看到如此水深火热的物理学现状.没有一个物理学家不高兴,因为这个时代是喜忧参半的时代,英雄出于乱世,现在是一个很好的乱世.

(3)

如果暗能量密度不会随着时间改变.那么这个暗能量就是爱因斯坦的宇宙学常数.所谓常数,就是它作为一个能量密度随着宇宙膨胀保持不变.相当得说,假如一个商人看见自己的钱放满在柜子里,当自己想办法把自己家的柜子变得越来越大,而钱总是满的一柜子.这真是一个无比让人喜悦的事情.

宇宙也许正在发生这样的一幕.

在宇宙学这个热门领域只有物理学家,没有理想主义者.因为理想主义者只能处理数学模型,不能处理天文观测.爱因斯坦曾经在他那个时代在宇宙学领域表现出的是一个理想主义者的姿态,这个姿态使得他在物理实验还没有成熟的时候单纯因为信仰问题而引进这个宇宙学常数,这个被他认为是最大错误的常数使得他隐隐作痛.

对于现今的物理学家来说,爱因斯坦犯下的是一个完美的错误.

