第一章 理想流体

第一节 连续性方程

对液体和气体运动的研究就是**流体动力学**的内容[1]。流体动力学所研究的对象具有宏观性质，所以在流体动力学中可以把流体看作连续介质。这意味着，可以认为任何流体微元仍然是足够大的，以至于其中还包含着数目极多的分子。因此，当我们说到无穷小的体微元时，总是指“物理上”无穷小的体微元，换言之，它与所考虑的流体体积相比足够小，但与分子间距离相比却足够大。在流体动力学中，对“流体微团”、“流体点”之类的术语都应当这样理解。例如，在论及某流体点的位移时，我们并不是指个别分子的位移，而是指包含大量分子的流体微元整体的位移，尽管在流体动力学中仍把后者看作一个点。[2]

在数学上可以利用一些函数来描述运动流体的状态，他们给出流体的速度分布 $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$ 和任何两个热力学量的分布，例如压强分布 $p(x,y,z,t)$ 和密度分布 $\rho(x,y,z,t)$ 。众所周知，根据任意两个热力学量的值和物质的状态方程即可确定所有的热力学量。因此，只要给定五个量：速度 $\vec{v}$ 的三个分量、压强 p 和密度 ρ 就可以把运动流体的状态完全确定下来。

所有这些量一般是坐标 x,y,z 和时间 t 的函数。我们强调，$\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$ 是在时刻 t 在空间的任何给定点 x,y,z 的流体速度，换言之，它是空间固定点的流体速度，而不是随时间在空间中移动的特定流体微元的速度。这一说明同样适用于量 ρ 和 p 。

我们来推导一些基本的流体动力学方程。首先推导表示质量守恒定律的方程。

考虑空间的某个区域 V_0 ，位于该区域内的流体具有质量 $\int\rho dV$ ，式中 ρ 是流体密度，积分运算是对区域 V_0 进行的。单位时间内流过区域表面微元 $d\vec{f}$ 的流体质量是 $\rho\vec{v}\cdot d\vec{f}$，其中矢量 $d\vec{f}$ 指向表面微元的法线方向，其大小等于表

[1] *本书采用红色字体，表示重要概念、重要定理、以及其他需要强调的文字；采用蓝色字体，表示鹿栖斋评阅、注疏的内容。——鹿栖*

[2] *这一段内容，就是一般流体力学书籍上所谓的连续介质假设。——鹿栖*

面微元的面积。我们规定 $d\vec{f}$ 指向外法线方向。于是，如果流体流出该区域，则 $\rho\vec{v}\cdot d\vec{f}$ 为正；如果流体流入该区域，则该表达式为负。因此，单位时间内流出区域 V_0 的流体总质量为:

$$\oint \rho\vec{v}\cdot d\vec{f}$$

式中的积分运算是对该区域的整个封闭表面进行的。

另一方面，区域 V_0 中流体质量的减少可以写为以下形式：

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV$$

让两个表达式相等，得：

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = \oint \rho\vec{v}\cdot d\vec{f} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1)$$

把曲面积分变成体积分：

$$\oint \rho\vec{v}\cdot d\vec{f} = \int \mathrm{div}(\rho\vec{v})\, dV$$

于是：

$$\int \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v})\right] dV = 0$$

因为这个等式应当对任何区域都成立，所以被积函数应当为零，即：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2)$$

这就是所谓连续性方程。

展开表达式 $\mathrm{div}(\rho\vec{v})$ ，也可以把 (1.2) 写成：[3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\rho = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.3)$$

矢量 $\vec{j} = \rho\vec{v}$ 称为质量流密度，其方向与流动方向一致，而大小等于单位时间内流过与速度垂直的单位面积的流体质量。

【鹿栖注疏】【TK13. 1】

注意到：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

[3] 对场论相关公式不熟悉的读者，建议先阅读吴望一《流体力学》第一章。——鹿栖

因此式（1.3）可以写成：[4]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}(\vec{v})=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.3e)$$

第二节 欧拉方程

设想从流体中划分出某个区域，它是由流体组成的。作用在这部分流体上的合力等于该区域边界上的积分[5]：

$$-\oint p d\vec{f}$$

将其变为体积分，有：

$$-\oint p d\vec{f}=-\int \mathrm{grad}\,p\,dV$$

由此可见，任何流体微元dV都受到周围流体对它的作用力$-dV\,\mathrm{grad}\,p$；换言之，单位体积上流体的作用力等于$-\mathrm{grad}\,p$。

现在，让作用力$-\mathrm{grad}\,p$等于流体的密度 ρ 与流体加速度$d\vec{v}/dt$的乘积，我们就可以写出流体微元的运动方程[6]：

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\mathrm{grad}\,p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

这里的导数$d\vec{v}/dt$并不代表空间固定点的流体速度变化，而是代表一个在空间中运动的给定的流体微元的速度变化[7]。应当用一些与空间固定点相关的量来表示这个导数。为此，我们指出，一个给定的流体微元在dt时间内的速度变化$d\vec{v}$由两部分组成：一部分是该空间点固定点的流体速度在dt时间内的变化，另一部分是（在同一瞬间）相距$d\vec{r}$的两点的速度之差，这里的$d\vec{r}$是给定流体微元dt时间内的位移。前者等于：

---

[4] 补充内容中的公式，在末尾标记字母 e；编号为原文上一个公式的编号。例如，原文上一个公式为 1.3，则补充内容的公式编号为 1.3e；如果补充了多个公式，则按以下顺序编号：1.3e-1，1.3e-2，……，依此类推。——鹿栖

[5] 简单而言，作用于流体的力可以分为质量力和面力（关于表面张力，见第七章）。质量力通常是按质量分布的长程力（如万有引力），质量力密度指单位质量流体所受的质量力。面力是按面积分布的力（如与流体表面相接触的物质对该表面上的流体的作用力），单位面积上的面力称为应力。在理想流体的情况下，面微元$d\vec{f}$上的面力（从矢量$d\vec{f}$所指的那一侧物质作用在该面微元上的力）为$-pd\vec{f}$。这里之所以有负号，是因为该面力通常表现为压力。此处只考虑面力。 ——李植（译者）

[6] 等式左边表示远程力，等式右边表示表面力。因此式 2.1 表示作用在流体上的远程力与表面力的平衡；注意与式 2.4 对照理解。 ——鹿栖

[7] 这句话的意思是，导数$d\vec{v}/dt$基于拉格朗日描述。——鹿栖

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

这里的偏导数$\partial \vec{v}/\partial t$是在$x$、$y$、$z$不变时计算的，即在空间给定点上计算的。速度变化的第二部分等于：

$$dx\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (d\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}$$

于是，

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (d\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}$$

或者，两边都除以 dt [8]，

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

将此关系式代入(2.2)，得到：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

这就是我们希望求出的流体运动方程[9]，它是由欧拉在 1755 年首先得到的。这个方程称为**欧拉方程**，是基本的流体动力学方程之一。

【鹿栖注疏】【TK13. 2】

采用张量表示法，有：

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3e-1)$$

于是式(2.3)可以写成：[10]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3e-2)$$

如果流体处于重力场中，则单位体积的任何流体还受到力$\rho\vec{g}$的作用，其中$\vec{g}$是重力加速度。这个力应当加在方程(2.1)的右侧，方程(2.3)的形式从而变为：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \vec{g} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

【鹿栖注疏】【TK13. 3】

如果流场中还有其他远程力，则上式变为：

---

[8] 为了强调这样定义的导数d/dt与物质运动的联系，我们称之为**物质导数**。——朗道

[9] *此式是无重力条件下理想流体运动方程。——鹿栖*

[10] *关于张量，以及张量表示法，参见吴望一《流体力学》第一章。——鹿栖*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\vec{g}+\vec{f} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4e)$$

上式中，$\vec{f}$为单位质量力，量纲与加速度量纲一致。

在运动流体中可能存在能量耗散过程，这是由流体的内摩擦（粘性）和流体不同部分之间的热交换引起的。然而，在推导上述运动方程时，我们完全没有考虑这样的耗散的过程。所以，本章这一节和以后几节的全部论述，只适用于热传导过程和粘性过程都无关紧要的流体运动。讨论这样的运动就相当于讨论**理想流体**的运动。

流体各部分之间以及流体与边界之间没有热交换，这意味着流体是绝热的，并且任何一部分流体的运动都是绝热的。因此，必须把理想流体的运动看作绝热运动。

当流体在空间作绝热运动时，每一部分流体的熵在运动过程中都保持不变。如果用字母 s 表示单位质量流体的熵（质量熵），我们可以用方程

$$\frac{ds}{dt}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

来表示绝热运动条件。在这个过程中，就像(2.1)那样，对时间的全导数[11]表示给定的一部分流体熵变化率。该导数也可以写为：

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla s=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

这是表述理想流体绝热运动条件的一般方程。

【鹿栖注疏】【TK13. 4】

采用张量表示法，有：

$$\vec{v}\cdot\nabla s=v_j\frac{\partial s}{\partial x_j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6e-1)$$

对于标量函数s，显然有：

$$\vec{v}\cdot\nabla s=(\vec{v}\cdot\nabla)s \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6e-2)$$

由公式2.2、2.6、2.6$e-2$，对于任意函数 $\boldsymbol{\alpha}$ （无论$\boldsymbol{\alpha}$是标量、矢量还是张量），均有：

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\alpha} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6e-3)$$

[11] 即：物质导数。——李植

利用式(1.2)，可以将式(2.6)写为熵的“连续性方程”：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)+\operatorname{div}(\rho s\vec{v})=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.7)$$

乘积$\rho s\vec{v}$是熵流密度。

【鹿栖注疏】【TK13. 5】【证明式 2.7】

由式(1.2)、(2.6)：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0 \quad\Longrightarrow\quad s\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})\right]=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla s=0 \quad\Longrightarrow\quad \rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla s\right)=0$$

上两式相加，有：

$$s\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})\right]+\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla s\right)=0$$

整理，得：

$$\left(s\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial s}{\partial t}\right)+[s\operatorname{div}(\rho\vec{v})+\rho\vec{v}\cdot\nabla s]=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.7e-1)$$

注意到：[12]

$$s\operatorname{div}(\rho\vec{v})+\rho\vec{v}\cdot\nabla s=\operatorname{div}(\rho s\vec{v})$$

于是由式2.7e，有：

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho s\vec{v})=0$$

证毕

【鹿栖注疏】【TK13. 6】【拓展】

对于在单位质量上定义的任意标量函数$f(\vec{r},t)$，只要满足式(2.5)：

$$\frac{df}{dt}=0$$

就可以按上述方法导出式(2.7)：

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho f\vec{v})=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.7e-2)$$

如果

$$f(\vec{r})\equiv 1$$

则式(2.7)就变为式(1.2)：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0$$

---

[12] 参见吴望一《流体力学》上册，P19，第 5 式。——鹿栖

绝热方程经常具有简单得多的形式。就像经常遇到的那样，如果流体的质量熵在某个初始时刻处处相同，则在此后的流动中，质量熵仍然处处相同并且不随时间变化。因此，这时可以把绝热方程简单地写为：[13]

$$s = const \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.8)$$

我们以后通常使用这种形式的绝热方程。这样的流动称为等熵流。

利用等熵流条件，可以把运动方程(2.3)写为略微不同的形式。为此，我们运用熟悉的热力学关系式

$$dw = Tds + Vdp$$

式中w是流体的质量焓[14]，$V = 1/\rho$是质量体积，T是温度。因为$s = const$，所以

$$dw = Vdp \quad \Leftrightarrow \quad dw = \frac{1}{\rho}dp$$

从而

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla w$$

因此，可以把方程(2.3)写为以下形式：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\operatorname{grad} w \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.9)$$

值得注意的是，欧拉方程还有一种形式，其中只包含速度。应用矢量分析中的已有公式：[15]

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 = \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

可以把(2.9)写为

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v} = -\operatorname{grad}\left(w + \frac{v^2}{2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.10)$$

在这个方程两侧取旋度，就得到只包含速度的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{rot}(\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.11)$$

---

[13] $const$ ：常数。——鹿栖

[14] 关于焓的概念，见林宗涵《热力学与统计物理学》，或朱明善《工程热力学》；对热力学不熟悉的同学，没有必要过于深究焓、熵等热力学概念的物理意义，只要记住相互之间的运算关系就可以了（即：记住概念之间的数学关系即可）。事实上，的确有一些学者倾向于从数学的角度解释这些物理概念。例如知乎的铁褥网友就认为：焓“本质上就是在量纲正确的前提下为了方便运算和方便分析热力学过程的产物”。见网页：https://www.zhihu.com/question/271772930；——鹿栖

[15] 见吴望一《流体力学》上册，P19，公式 11。——鹿栖

【鹿栖注疏】【TK13.7】

证明式(2.11)用到场论中的一个重要定理：梯度场是无旋场。对于任意函数 $\varphi(\vec{r})$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=0$$

【鹿栖注疏】【TK13.8】【拓展】

由场论公式

$$\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b}-\vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a}$$

有：

$$\mathrm{rot}(\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v})=[(\mathrm{rot}\,\vec{v})\cdot\nabla]\vec{v}-(\vec{v}\cdot\nabla)(\mathrm{rot}\,\vec{v})+\vec{v}\,\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{v})-(\mathrm{rot}\,\vec{v})(\mathrm{div}\,\vec{v})$$

注意到旋度场是无源场

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{v})=0$$

因此

$$\mathrm{rot}(\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v})=[(\mathrm{rot}\,\vec{v})\cdot\nabla]\vec{v}-(\vec{v}\cdot\nabla)(\mathrm{rot}\,\vec{v})-(\mathrm{rot}\,\vec{v})(\mathrm{div}\,\vec{v})$$

有了运动方程，还应当补充在流体界面上必须成立的一些边界条件。对于理想流体，边界条件应当表述出流体不能穿透固体壁面的事实。这意味着，固体壁面上的流体法向速度分量应当等于零：

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.12)$$

（在运动壁面的一般情形下，$\vec{v}\cdot\vec{n}$应当等于壁面速度的相应分量）

在两种互不混合的流体之间的边界上应当成立两个边界条件，其一是两种流体的压强在分界面上相等，其二是两种流体在分界面上的法向速度分量相等（并且该法向速度分量等于分界面本身的法向移动速度）。

正如在第一节一开始就指出的，运动流体的状态取决于五个量：速度$\vec{v}$的三个分量以及诸如压强p和密度ρ的两个热力学量。因此，**封闭的流体动力学方程组应当包括五个方程。对于理想流体，这些方程就是运动方程、连续性方程和绝热方程**。

习题 1.2

设a是流体微元在某一时刻$t=t_0$的 x 坐标（a称为拉格朗日坐标[16]），写出关于变量a、t的理想流体一维运动方程[17]。[18]

【解析】

在上述变量下，每个流体微元在任意时刻的坐标x可以看作t和它在初始时刻的坐标a的函数，$x=x(a,t)$. 于是，流体微元的质量在其运动过程中守恒的条件（连续性方程）可以写为：

$$\rho dx=\rho_0 da \quad \Leftrightarrow \quad \rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t=\rho_0$$

式中$\rho_0(a)$是给定的初始密度分布[19]。根据定义，流体微元的速度是[20]

$$v=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$$

而导数$(\partial x/\partial t)_a$给出该流体微元在运动过程中的速度变化率。欧拉方程和绝热方程分别可以写为：

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t \quad ; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a=0$$

[16] 虽然这些变量通常称为拉格朗日变量，但是利用这些变量表示的流体运动方程其实最初是由欧拉在得到基本方程（2.3）时同时得到的。

[17] 如果考虑表面张力，可以参考第七章。——李植

[18] 描述物体运动通常有两种方法：拉格朗日描述、欧拉描述，分别对应拉格朗日坐标和欧拉坐标。流体力学一般是基于欧拉描述。本题探讨的是将欧拉描述下的流体力学方程，转换为拉格朗日描述下的流体力学方程。相关知识可参阅吴望一《流体力学》上册，P91. ——鹿栖

[19] 根据上下文，应该是把$t=t_0$时刻作为“给定的初始时刻”，这个时刻对应的密度就是 ρ_0. ——鹿栖

[20] 这个公式的意思是：初始时刻坐标为 a（可视为流体微元的编号，即：第 a 号流体微元）的流体微元，对时间的导数。——鹿栖